数学分析教程

A Course in Mathematical Analysis

第一卷

导数与微分　定积分　级数展开　几何应用

Édouard Goursat 著

巴黎大学数学教授

Earle Raymond Hedrick 英译

密苏里大学数学教授

中文全译审校开放版

Open Edition 1.0　·　CC BY-SA 4.0

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目

公开版本识别码：GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

开放授权与版权声明

本公开版旨在使任何人都能自由阅读、下载、复制、打印、教学、研究、再分发和改编，同时防止开放成果被删去署名后重新包装为排他性的封闭版本。

一、底本与许可范围

Édouard Goursat 的原著以及 Earle Raymond Hedrick 于 1904 年发表的英译本，著作财产权保护期在中国及许多法域已经届满。本项目不对这些公有领域材料重新主张排他权；任何人直接使用公有领域底本时，不因本声明而受到额外限制。不同法域的公有领域认定可能存在差异，使用者应自行确认当地法律。

就本项目依法享有或有权许可的部分，包括中文翻译、校勘、译注、术语整理、排版、目录与索引、插图重绘、内部链接、汇编和数字编辑成果，作如下声明：

© 2026 古尔萨《数学分析教程》中文译校项目

本公开版采用 **Creative Commons Attribution–ShareAlike 4.0 International**（**CC BY-SA 4.0**）许可。

https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

本页只是便于阅读的中文说明；如与许可证法律文本存在差异，以 Creative Commons 官方法律文本为准。本项目仅授予其有权授予的著作权及相关权利，不对公有领域材料或依法无需许可的使用设限。

二、您可以做什么

在遵守下列条件的前提下，任何人均可复制、发行、公开传播、转换格式、节选、翻印、改编和制作衍生版本，也可进行商业性印刷或发行。许可证授予的是全球性、免版税、非独占且不可撤销的开放许可。

三、必须遵守的条件

1. **署名。**再发布时须以适合媒介和情境的合理方式保留作品名称、指定署名方、版权声明、许可证名称与链接、免责声明，以及在合理可行时提供原始来源链接。

2. **标明修改。**若修改、删节、重排、校订或改编，须明确说明作了修改，标出修改者、修改日期和主要变化，并保留此前修改的说明。

3. **相同方式共享。**公开传播改编版本时，须继续采用 CC BY-SA 4.0，或 Creative Commons 认可的兼容许可证，不得把改编版变成排他性的封闭版权版本。

4. **不得附加限制。**不得附加会限制许可证所准许行为的法律条款、数字版权管理措施或其他有效技术限制。

5. **不得暗示背书。**未经明确书面许可，不得声称修改版、印刷版或商业版获得本项目认可、赞助，或属于本项目的“官方定本”。

建议完整保留本页。若因重新排版而不保留本页，必须在显著位置提供具有同等内容的署名、许可、修改说明和免责声明；仅删除本页而不给出等效信息，不符合本许可的署名条件。

四、免责声明

本作品按“现状”和“现有”状态提供。在法律允许的最大范围内，本项目不对权利无瑕疵、适销性、特定用途适用性、不侵权、准确性或不存在错误作任何明示或默示保证。使用者应自行核对数学内容、当地法律和具体用途。

署名、再发布与版本验证

推荐署名格式

完整转载、镜像或印刷本建议使用：

> 《数学分析教程》第一卷：中文全译审校开放版，古尔萨《数学分析教程》中文译校项目，Open Edition 1.0，版本识别码 GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0，采用 CC BY-SA 4.0 许可。

若制作修改版，建议使用：

> 本版本改编自《数学分析教程》第一卷：中文全译审校开放版（古尔萨《数学分析教程》中文译校项目，GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0，CC BY-SA 4.0）。修改者：________________；修改日期：____________；主要修改：________________________。本修改版继续采用 CC BY-SA 4.0 许可。

指定署名方可以使用项目名称而非实名；再使用者应按照上面的项目名称署名，不应把“Creative Commons”误写为作者或译者。

公开版本识别

公开版本	Open Edition 1.0
版本识别码	GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0
公开署名	古尔萨《数学分析教程》中文译校项目
开放许可证	CC BY-SA 4.0

许可地址	https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/
正式源文件	与本 PDF 同包发布的 LaTeX 源文件、校记登记表、逐图审校资料、完整 QA 报告及许可证文本

校验值与证据链

PDF 不能在不采用专门数字签名结构的情况下把自身最终 SHA-256 值写进自身，否则写入校验值会再次改变文件，形成循环。因此，本 PDF 不印入自己的最终哈希；正式 SHA-256 校验值列在同包的 `SHA256SUMS.txt` 与 `PROVENANCE.json` 中。公开发布时，应把 PDF、源文件包、许可证文本和校验清单放在同一发布记录中长期保存。

本 PDF 的标题、作者、版权、许可证和版本识别码也写入普通 PDF 元数据与 XMP 元数据；除标题页和特殊空白页外，各页底部均印有简短的许可证与版本识别信息。删除这些信息不会使原有权利消失，但会削弱来源可追溯性，并可能违反署名条件。

再发布建议

1. 原样镜像时，建议同时提供 PDF 和源文件包，并一并提供下列文件：

   ```
   LICENSE-CC-BY-SA-4.0.txt
   ATTRIBUTION.md
   SHA256SUMS.txt
   ```

2. 修改版应使用新的版本号与文件名，保留原版本识别码和修改历史，不得覆盖原始版本的来源记录。
3. 印刷或收费发行可以自行定价；但不得借收费发行增加排他性的版权条件，也不得以附加禁转条款或 DRM 阻止读者继续依许可证复制、修改和分享。
4. 本项目名称不得被用于制造“官方授权”或“官方定本”的假象；修改版应在封面或版权页显著标明“非官方修改版”。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目
Open Edition 1.0 · 2026 年 7 月

版本记录

本版名称	中文全译审校开放版
公开版本号	Open Edition 1.0
版本识别码	GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0
内部修订号	Release 53
开放许可证	CC BY-SA 4.0
发布日期	2026 年 7 月
主要底本	Édouard Goursat, *A Course in Mathematical Analysis*, Vol. I, translated by Earle Raymond Hedrick, Ginn & Company, 1904.
参校本	现代 LaTeX 重排本；凡重排本与 1904 年英译本不一致，均结合原版、上下文和数学推导复核。
收录范围	作者序、英译者序、第一至第十二章、§§1–258、全部习题、原书脚注与图 1–52。
电子导航	目录、索引、PDF 书签、节号、公式号、图号及跨章引用均设内部跳转链接；索引页码按本中文定本的实际页码编制。

本公开版在逐章全译、逐章系统审校及两轮全书总校的基础上定稿，并在正式定本上增加开放许可证、署名规范、版本识别、XMP 权利元数据与逐页来源标识。标题页不使用工作稿标识；内部修订号仅用于源文件、校勘记录与可复现编译的版本追踪。

底本中可以确证的误排、漏项、错误回引或条件缺失，均在正文中订正，并分别标为“中译者校记（底本原误）”或“中译者校记（现代重排本误排）”；纯属现代术语、适用条件或全局性假设的补充说明，则标为“中译者说明”。

Open Edition 1.0　·　Release 53

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

作者序

本书收入的材料, 除少数变动外, 就是我在巴黎大学课程中讲授的内容。为了把实变量函数中除微分方程理论以外的一切内容合在同一卷内，我对讲课时所采用的次序稍作修改。由于微分记号不在“数学专门班”（*Classe de Mathématiques spéciales*）中讲授，[1]我便从开端起讲这种记号，并且只预设读者已经知道求导数的形式运算法则。

既然数学分析在本质上是连续统的科学，从逻辑上说，任何分析课程似乎都应从无理数的研究开始。不过我假定学生已经熟悉这个题目。不可公度数的理论已有许多优秀而著名的著作加以处理，[2]所以我认为无须再进入这样的讨论。至于分析基础中的其他基本概念, 例如上极限、定积分、二重积分等等, 我都力求以必要的严密性加以处理，同时保留本书的初等性质，并避免那些在一本供教学使用的书中显得多余的推广。

若干用比正文较小的字体排印的段落，包含的是详细解出的习题，或者是补充材料；读者初读时可以略过这些段落而不致有不便。每章之后都附有一组例题，这些例题直接说明本章所讲的方法。它们大多曾在考试中出现。另有若干用星号标明的例题稍难一些；这些例题大多取自原始论文，并在书中给出参考。

我在高等师范学校的两位旧日学生 Émile Cotton 先生和 Jean Clairin 先生曾好意协助校改清样；我愿借此机会向他们表示衷心的感谢。

1902 年 1 月 27 日　　E. Goursat

[1]关于法国数学教学方法，可以参看 Pierpont 在 *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. VI, 2nd series (1900), p. 225 上的一篇有趣说明。——英译者

[2]这样的书在英文中并不常见。读者可参看 Pierpont, *Theory of Functions of Real Variables*, Ginn & Company, Boston, 1905；Tannery, *Leçons d’arithmétique*, 1900，以及其他关于算术和实函数的外文著作。

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

英译者序

本《教程》的翻译，是在 W. F. Osgood 教授建议下进行的；他对原著的书评发表于 1903 年 *Bulletin of the American Mathematical Society* 七月号。英文数学标准教材的匮乏众所周知，无须多加说明。我真诚地希望，本书能帮助填补整个美国数学界普遍感到的这一需要。在我们的教学制度中，本书可方便地用作第二门微积分课程的教材；作为参考书，美国学生在整个学习过程中也会发现它很有价值。

与法文原文相比，本译本只作了少量改动。为了方便，偶尔对记号作了轻微改变；并且在 Goursat 教授建议下作了若干修改和增补，他非常友善地关心本书的翻译工作。凡不见于法文原文的补充材料，除署名的脚注外，均出自他；即使这些脚注不是由他发起，也总是经过他的校订。我借此机会感谢作者准许我翻译本书，并感谢他始终给予的理解与支持。我还要感谢 Osgood 教授在翻译过程中给予的建议，以及在疑难翻译问题上的帮助。

出版者 Ginn & Company 诸君不遗余力，力求排印精美。他们在整个事业中的精神远非商业性的；他们和我一样希望，本书的出版有助于美国数学的进步。

1904 年 8 月

E. R. Hedrick

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

译校说明

本中文稿以 Earle Raymond Hedrick 1904 年英译本为主要底本，并逐节参照现代 LaTeX 重排本。两种底本不一致时，以原版正文、前后推导与数学一致性相互校核；现代重排本若有漏排、误排或压缩，则回到原版恢复。

翻译遵循忠实全译原则：不删节正文、证明、例子、脚注和习题，不把原文改写成摘要。原书的章次、节号、公式号和图号尽量保留。历史记号或术语与现代习惯不同之处，正文保留其理论内容，并用简短说明澄清现代含义。

术语以现代中文数学用语为主；对雅可比行列式（Jacobian）、黑塞行列式（Hessian）、Schwarzian、Dupin cyclide、line congruence、line complex 等容易产生歧义的历史术语，首次出现时保留英文或设置索引参见项。平面曲线的“次法线”和空间曲线的“副法线”等不同概念严格区分。

底本中可以确证的公式错误、漏项、错误回引或条件缺失，均在正文中订正，并以统一格式的“中译者校记”说明依据；不确定之处不作无声改写。原书脚注、英译者脚注与中译者校记在措辞上加以区分。

本电子版的目录、索引、书签、节号、公式号、图号与跨章引用均设置内部链接；索引页码以本中文定本的实际页码为准。本版为逐章系统审校和两轮全书总校后的开放共享定本；公开版本号为 Open Edition 1.0，版本识别码为 GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0，Release 53 仅作为内部修订号，用于记录可复现的编译与校勘过程。

原书脚注、英译者脚注与中译者校记严格区分。底本原误、现代重排本误排以及中译者补充说明分别使用三种固定标题，避免把原作者或英译者的文字同后出的校勘意见混为一谈。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目

Open Edition 1.0 · 2026 年 7 月

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

目录

开放授权与版权声明 ii

署名、再发布与版本验证 iv

版本记录 vi

作者序 viii

英译者序 ix

译校说明 x

第一章　导数与微分 1

I. 一元函数 1

1. 极限 1
2. 函数 2
3. 连续性 2
4. 不连续性的例子 3
5. 导数 4
6. 逐次导数 6
7. Rolle 定理 6
8. 中值定理 7
9. 中值定理的推广 9

II. 多元函数 10

10. 引言 10

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

11. 偏导数 11
12. 曲面的切平面 15
13. 从增量到导数的过渡 16
III. 微分记号 19
14. 微分 19
15. 全微分 23
16. 复合函数的逐次微分 25
17. 乘积的微分 27
18. 齐次函数 29
19. 应用 30
习题 32

第二章 隐函数、函数行列式、变量变换 **37**
I. 隐函数 37
20. 一个特殊情形 37
21. 隐函数的导数 40
22. 对曲面的应用 41
23. 逐次导数 42
24. 偏导数 44
25. 一般定理 47
26. 反演 52
27. 空间曲线的切线 53
II. 函数行列式 55
28. 基本性质 55
29. 雅可比行列式的另一性质 60
30. 黑塞行列式 61
III. 变换 64
31. 问题 I 64
32. 应用 65
33. 公式 (20) 67
34. 问题 II 68

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

35. 平面曲线的变换 69
36. 接触变换 70
37. 射影变换 72
38. 问题 III 74
39. 另一种方法 77
40. 问题 IV 80
41. Legendre 变换 80
42. Ampère 变换 82
43. 曲线坐标中的势方程 84
习题 88

第三章 Taylor 级数、初等应用、极大与极小 **95**

I. 带余项的 Taylor 公式；Taylor 级数 95
44. 带余项的 Taylor 公式 95
45. 曲线的应用 98
46. 展开的一般方法 99
47. 不定式 102
48. Taylor 级数 103
49. $\log(1+x)$ 的展开 105
50. 函数 (1+x) 的 m 次幂的展开 108
51. 推广到多元函数 111
52. 应用 112
II. 奇点、极大与极小 114
53. 奇点 114
54. 曲面的奇点 117
55. 一元函数的极值 119
56. 二元函数的极值 121
57. 未定情形 123
58. 未定情形中的高阶项 125
59. 三元函数 127
60. 点到曲面的距离 129

61. 隐函数的极大与极小 130
62. 另一个例子 131
63. d'Alembert 定理 133
习题 135

第四章 定积分 137

I. 特殊求积法 137
64. 抛物线求积 137
65. 一般方法 138
66. 例 140
67. 原函数 142
II. 定积分；相关几何概念 143
68. 上确界与下确界 143
69. 振幅 145
70. 连续函数的性质 145
71. 和 S 与 s 148
72. 可积函数 149
73. Darboux 定理 153
74. 积分第一中值公式 153
75. 积分第二中值公式 154
76. 回到原函数 156
77. 指标 159
78. 曲线面积 161
79. 有限跳跃间断的函数 162
80. 曲线弧的长度 163
81. 方向余弦 166
82. 直线段的变分 166
83. Graves 与 Chasles 定理 167
III. 变量代换；分部积分 168
84. 变量代换 168
85. 分部积分 171

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

86. 带余项的 Taylor 公式 172
87. 数 e 的超越性 173
88. Legendre 多项式 174
IV. 积分概念的推广；反常积分；线积分 176
89. 被积函数变为无穷大 176
90. 积分限为无穷 181
91. 进一步的例子 183
92. 函数 $\Gamma(a)$ 185
93. 线积分 186
94. 闭曲线的面积 189
95. 极坐标中曲线的面积 191
96. 积分 $\int x\,dy - y\,dx$ 的值 194
V. 由定积分定义的函数 195
97. 积分号下求导 195
98. 间断性的例子 197
VI. 定积分的近似求值 198
99. 引言 198
100. 插值法 200
101. Gauss 方法 202
102. Amsler 求积仪 204
习题 207

第五章 不定积分 **210**
I. 有理函数的积分 210
103. 一般方法 210
104. Hermite 方法 213
105. 类型 $\int R(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})\,dx$ 的积分 217
106. 双曲线的面积 220
107. 抛物线的求长 222
108. 有理曲线 223
109. 二项微分的积分 226

II. 椭圆积分与超椭圆积分 228
110. 积分的约化 228
111. 代数可积的情形 233
112. 椭圆积分 234
113. 伪椭圆积分 237
III. 超越函数的积分 240
114. 正弦与余弦的有理函数的积分 240
115. 约化公式 243
116. Wallis 公式 245
117. 余弦因子乘积的积分 246
118. 有理函数与指数函数乘积的积分 249
119. 杂项积分 250
习题 251

第六章 二重积分 256

I. 二重积分；计算方法；Green 定理 256
120. 二元连续函数 256
121. 二重积分 258
122. 体积 260
123. 二重积分的计算 260
124. 一般积分区域 264
125. 与单积分的类比 267
126. Green 定理 270
II. 变量代换；曲面面积 271
127. 预备公式 272
128. 二重积分的变换：第一种方法 274
129. 例子 276
130. 二重积分的变换：第二种方法 278
131. 曲面面积 281
132. 曲面面积元素 284
III. 二重积分的推广；反常积分；曲面积分 287

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

133. 反常积分 287
134. 函数 $B(p, q)$ 289
135. 曲面积分 291
136. Stokes 定理 292
IV. 分析与几何应用 295
137. 体积 295
138. 直纹曲面；棱柱体公式 296
139. Viviani 问题 298
140. 若干特殊定积分的计算 299
141. $\log\Gamma(n+1)$ 的近似值 302
142. d'Alembert 定理 304
习题 306

第七章 多重积分；全微分的积分 **311**

I. 多重积分；变量代换 311
143. 三重积分 311
144. 一般区域上的三重积分 313
145. 变量代换 316
146. 体积元素 320
147. 椭圆坐标 323
148. Dirichlet 积分 324
149. Green 定理 326
150. 多重积分 328
II. 全微分的积分 332
151. 一般方法 332
152. 积分 $\int P\,dx + Q\,dy$ 335
153. 周期 337
154. 两个方程的公共根 340
155. 前述结果的推广 341
习题 344

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第八章 无穷级数 **348**

I. 实常数项级数；一般性质；收敛判别法 . . . 348

156. 定义与一般原理 . . . 348
157. 从数列过渡到级数 . . . 350
158. 正项级数 . . . 352
159. Cauchy 判别法与 d'Alembert 判别法 . . . 353
160. 上极限的应用 . . . 357
161. Cauchy 积分判别法 . . . 357
162. 对数判别法 . . . 361
163. Raabe 或 Duhamel 判别法 . . . 363
164. 绝对收敛 . . . 367
165. 条件收敛级数 . . . 369
166. Abel 判别法 . . . 370

II. 复项级数；多重级数 . . . 372

167. 定义 . . . 372
168. 级数的乘法 . . . 374
169. 二重级数 . . . 375
170. 化为单级数 . . . 380
171. 多重级数 . . . 381
172. Cauchy 积分判别法的推广 . . . 382

III. 变项级数；一致收敛 . . . 384

173. 一致收敛的定义 . . . 384
174. 级数的逐项积分与逐项微分 . . . 388
175. 积分号下求导的应用 . . . 392
176. 例子 . . . 396

习题 . . . 399

第九章 幂级数；三角级数 **400**

I. 一元幂级数 . . . 400

177. 收敛区间 . . . 400
178. 幂级数的连续性 . . . 403

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

179. 幂级数的逐次导数 405
180. Taylor 级数的推广 409
181. 优函数 411
182. 一个级数代入另一个级数 414
183. 幂级数的除法 417
184. $1/\sqrt{1-2xz+z^2}$ 的展开 419
II. 多元幂级数 420
185. 一般原理 420
186. 优函数 423
III. 隐函数；解析曲线与曲面 426
187. 一元隐函数 426
188. 一般定理 429
189. Lagrange 公式 431
190. 反演 434
191. 解析函数 434
192. 平面曲线 435
193. 空间曲线 437
194. 曲面 437
IV. 三角级数；杂项级数 439
195. 系数的计算 439
196. 积分 $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ 442
197. Fourier 级数 446
198. 例子 448
199. 连续函数的展开；Weierstrass 定理 449
200. 无处可导的连续函数 452
习题 455
第十章 平面曲线 **457**
I. 包络 457
201. 包络的确定 457
202. 459

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

203. 直线族的包络 461
204. 圆族的包络 463
II. 曲率 466
205. 曲率半径 466
206. 渐屈线 468
207. 摆线 471
208. 悬链线 473
209. 曳物线 474
210. 内蕴方程 475
III. 平面曲线的接触 477
211. 接触阶数 477
212. 解析方法 479
213. 密切曲线 482
214. 作为极限曲线的密切曲线 484
习题 486

第十一章 空间曲线 **488**
I. 密切平面 488
215. 定义与方程 488
216. 驻定密切平面 490
217. 驻定切线 492
218. 特殊曲线 494
II. 曲面族的包络 496
219. 单参数族 496
220. 双参数族 497
221. 可展曲面 498
222. 可展曲面的微分方程 500
223. 空间曲线族的包络 502
III. 空间曲线的曲率与挠率 505
224. 球面示性曲线 505
225. 曲率半径 506

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

226. 主法线；曲率中心 508
227. 极线；极面 509
228. 挠率 510
229. Frenet 公式 513
230. 把 x, y, z 展成弧长 s 的幂级数 515
231. 渐伸线与渐屈线 516
232. 螺线 518
233. Bertrand 曲线 520
IV. 空间曲线之间的接触；曲线与曲面之间的接触 522
234. 两条曲线之间的接触 522
235. 密切曲线 524
236. 曲线与曲面之间的接触 525
237. 密切球面 527
238. 密切直线 528
习题 530

第十二章 曲面 **532**

I. 曲面上曲线的曲率 532
239. 基本公式；Meusnier 定理 532
240. Euler 诸定理；指标曲线 535
241. 主曲率半径 537
II. 渐近线；共轭线 540
242. 渐近线的定义与性质 540
243. 参数形式的微分方程 541
244. 直纹曲面上的渐近线 543
245. 共轭线 544
III. 曲率线 547
246. 曲率线的定义与性质 547
247. 曲面的渐屈面 548
248. Rodrigues 公式 550
249. 参数形式的曲率线 550

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

250. Joachimsthal 定理 553
251. Dupin 定理 553
252. 对若干类曲面的应用 555
IV. 直线族 558
253. 直纹曲面 558
254. 分布参数的直接定义 561
255. 直线汇；直线汇的焦面 562
256. 法线直线汇 564
257. Malus 定理 566
258. 直线复形 568
习题 571
索引 **574**

第1章

导数与微分

I. 一元函数

1. 极限

当变量 x 的相继各值越来越接近一个常量 a，以至于差 $x-a$ 的绝对值终于变得并且保持小于任意预先指定的数时，常量 a 叫作变量 x 的*极限*。这个定义给出了判定 a 是否为变量 x 的极限的准则。其充要条件是：任给一个正数 ϵ，无论它多么小，在某一时刻以后，变量 x 所能取的一切值都使 $x-a$ 的绝对值保持小于 ϵ。

在几何和代数中可以找到许多极限的例子。例如，当 m 趋近于 a 时，变量

$$x = \frac{a^2 - m^2}{a - m}$$

的极限是 $2a$；因为只要 $|m-a| < \epsilon$，就有 $|x-2a| < \epsilon$。同样，变量 $x = a - 1/n$，其中 n 是正整数，当 n 无限增大时趋近于极限 a；因为只要 n 大于 $1/\epsilon$，就有 $a-x$ 小于 ϵ。从这些例子可以看出，变量 x 趋近其极限时的相继各值，可以构成一个连续序列，也可以构成一个不连续序列。

一般说来，确定一个变量的极限是很困难的。下面的命题我们将看作是不言自明的；在许多情形中，它能使我们建立极限的存在性。

> 任何一个从不减小、并且总是小于某个常量 L 的变量，都趋近于一个极限 l；这个极限小于 L，或者至多等于 L。

类似地，任何一个从不增大、并且总是大于某个常量 L' 的变量，都趋近于一个极限 l'；这个极限大于 L'，或者等于 L'。

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

例如，若某一无穷级数的各项都是正的，并且逐项分别小于另一个已知收敛的正项无穷级数的对应项，那么第一个级数也收敛；因为第一个级数前 n 项之和 s_n 显然随 n 增大而增大，并且这个和始终小于第二个级数的总和 S。

2. 函数

当两个变量如此相关，以致其中一个变量的值依赖于另一个变量的值时，我们说它们彼此为*函数*。如果假定其中一个可以任意变化，它就叫作*自变量*。设这个变量记作 x，并且例如假定它能取两个给定数 a 与 b 之间的一切值 $(a < b)$。再设 y 是另一个变量，使得 x 在 a 与 b 之间的每个值，以及端点值 a 与 b 本身，都对应于一个完全确定的 y 值。那么 y 叫作 x 的函数，定义在区间 (a, b) 上；这种依赖关系写作方程 $y = f(x)$。例如，y 可能是对 x 施行某些算术运算所得的结果。初等数学中研究的最简单的函数，如多项式、有理函数、根式等等，正是这种情形。

函数也可以用图形来定义。在一个平面内取两条坐标轴 Ox, Oy；再用任意形状的一段曲线弧 ACB 连接这个平面内任意两点 A 与 B，但要求任何平行于 Oy 轴的直线至多在一点截这条曲线弧。那么这条曲线上一点的纵坐标就是它的横坐标的函数。弧 ACB 可以由若干属于不同曲线的不同部分组成，例如直线段、圆弧等等。

简言之，可以假定任何完全任意的规律，用来从 x 的值求出 y 的值。*函数*一词在其最一般的意义上，不过就是：每一个 x 的值都对应于一个 y 的值。

3. 连续性

无穷小分析所适用的函数定义不容许如此广泛的一般性。设 $y = f(x)$ 是定义在某一区间 (a, b) 上的函数，又设 x_0 与 $x_0 + h$ 是该区间中 x 的两个值。如果当 h 的绝对值趋近于零时，差

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

趋近于零，就说函数 $f(x)$ 对值 x_0 *连续*。由极限定义本身还可说，函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，是指对应于每一个正数 ϵ，无论它多么小，都能找到一个正数 η，使得

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \epsilon$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

对于一切绝对值小于 η 的 h 都成立。[1]如果一个函数 $f(x)$ 对区间 (a,b) 中的每一个 x 值都连续，并且当现在只取正的 h 趋近于零时，两个差

$$f(a+h)-f(a), \qquad f(b-h)-f(b)$$

都趋近于零，我们就说函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中连续。

在初等教科书中通常证明，多项式、有理函数、指数函数和对数函数、三角函数以及反三角函数，除去变量的某些特殊值外，都是连续函数。由连续性的定义直接可知，有限个连续函数的和或乘积本身仍是连续函数；对于两个连续函数的商也是如此，只须除去分母为零的那些变量值。

这里似乎没有必要解释为什么我们要假定由物理条件定义的函数至少在通常情况下是连续的。

在连续函数的性质中，我们现在只陈述下面两个。人们或许会想把它们看成不言自明，但它们实际上是真正的定理；其严格证明将在以后给出。[2]

I. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 中连续，并且 N 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数，那么方程 $f(x)=N$ 在 a 与 b 之间至少有一个根。

II. 在区间 (a,b) 中（包括端点）至少存在一个 x 值，使 y 取得一个值 M；这个值大于，或者至少等于，该函数在区间内任何其他点的值。同样，也存在一个 x 值，使 y 取得一个值 m；在这个区间内函数没有比 m 更小的值。

数 M 与 m 分别叫作 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中的*最大值*和*最小值*。显然，函数 $f(x)$ 取得最大值 M 的 x 值，或者对应于最小值 m 的 x 值，可以是端点 a 或 b 之一。由上述两个定理立刻推出，如果 N 是介于 M 与 m 之间的一个数，那么方程 $f(x)=N$ 至少有一个根位于 a 与 b 之间。

4. 不连续性的例子

我们将要研究的函数通常是连续的，但它们可能在变量的某些例外值处不再连续。下面给出几类最常见不连续性的例子。

函数 $y=1/(x-a)$ 对 x 的每一个值 x_0 都连续，唯一例外是 a。由 x 确定 y 的值所必需的运算，在 x 被赋值为 a 时就不再有意义；但我们注意到，当 x

[1]记号 $|a|$ 表示 a 的绝对值。

[2]见第四章。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

非常接近 a 时，y 的绝对值非常大，并且 y 的正负随 $x-a$ 而定。随着差 $x-a$ 变小，y 的绝对值无限增大，以致终于变得并保持大于任何预先指定的数。我们说，当 $x=a$ 时，y 变为无穷大。这种不连续在分析中极为重要。

其次考虑函数 $y=\sin(1/x)$。当 x 趋近于零时，$1/x$ 无限增大，而 y 不趋近于任何极限，虽然它始终保持在 $+1$ 与 -1 之间。方程 $\sin(1/x)=A$，其中 $|A|<1$，在 0 与 ϵ 之间有无穷多个解，不论 ϵ 取多么小。无论在 $x=0$ 时给 y 赋予什么值，所考察的函数都不能在 $x=0$ 处成为连续函数。

另一类不连续的例子由收敛无穷级数给出：

$$S(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots.$$

当 x 趋近于零时，$S(x)$ 趋近于极限 1，虽然 $S(0)=0$。因为当 $x=0$ 时，级数的每一项都是零，所以 $S(0)=0$。但是若给 x 一个不等于零的值，就得到一个等比级数，其公比为 $1/(1+x^2)$。因此

$$S(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\frac{x^2(1+x^2)}{x^2}=1+x^2,$$

于是可见 $S(x)$ 的极限是 1。所以在这个例子中，当 x 趋近于零时，函数趋近于一个确定的极限，但这个极限不同于函数在 $x=0$ 时的值。

5. 导数

设 $f(x)$ 是一个连续函数。当 x 保持固定而 h 的绝对值趋近于零时，商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

的分子和分母同时趋近于零。如果这个商趋近于一个极限，这个极限就叫作函数 $f(x)$ 的导数，在 Lagrange 的记号中记作 y' 或 $f'(x)$。

一个重要的几何概念同导数这个解析概念相联系。在平面 XOY 中考虑曲线 AMB, 它表示函数 $y=f(x)$; 我们假定该函数在区间 (a,b) 中连续。设 M 与 M' 是这条曲线上、位于区间 (a,b) 内的两点，它们的横坐标分别为 x 与 $x+h$。直线 MM' 的斜率正好就是上面的商。现在，当 h 趋近于零时，点 M' 趋近于点 M；如果函数有导数，则直线 MM' 的斜率趋近于极限 y'。因此直线 MM' 趋近于一个极限位置，称为曲线的切线。于是切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 X 与 Y 是动坐标。

为了推广，考虑空间中的任意曲线，并设

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t), \qquad z = \psi(t)$$

是曲线上一点的坐标，表示为变量参数 t 的函数。设 M 与 M' 是曲线上分别对应于参数值 t 与 $t+h$ 的两点。弦 MM' 的方程为

$$\frac{X - f(t)}{f(t+h) - f(t)} = \frac{Y - \phi(t)}{\phi(t+h) - \phi(t)} = \frac{Z - \psi(t)}{\psi(t+h) - \psi(t)}.$$

如果把每个分母都除以 h，然后令 h 趋近于零，弦 MM' 显然趋近于一个极限位置；只要三个函数 $f(t), \phi(t), \psi(t)$ 都有导数，这个极限位置由方程

$$\frac{X - f(t)}{f'(t)} = \frac{Y - \phi(t)}{\phi'(t)} = \frac{Z - \psi(t)}{\psi'(t)}$$

给出。因此，解析地说，求曲线切线的问题化为求导数的问题。

每一个有导数的函数必定连续，但反过来不真。容易给出一些连续函数的例子，它们在变量的某些特殊值处没有导数。例如函数 $y = x\sin(1/x)$，在 $x = 0$ 处是完全连续的函数，[3]并且当 x 趋近于零时 y 趋近于零。但是比值 $y/x = \sin(1/x)$，如我们已经看到的，并不趋近于任何极限。

再考虑函数 $y = x^{1/3}$。这里 y 对 x 的每一个值都连续，并且当 $x = 0$ 时 $y = 0$。但是比值 $y/x = x^{-2/3}$ 在 x 趋近于零时无限增大。为了简便，我们说导数在 $x = 0$ 时为无穷大；表示这个函数的曲线在原点同 y 轴相切。

最后，函数

$$y = \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

在 $x = 0$ 处连续，[3] 但比值 y/x 随 x 以正值趋近于零还是以负值趋近于零而趋近于两个不同的极限。当 x 为正且很小时，$e^{1/x}$ 为正且很大，比值 y/x 趋近于 1。但是如果 x 为负且绝对值很小，则 $e^{1/x}$ 很小，比值 y/x 趋近于零。因此，依 x 趋近于零的方式不同，导数有两个值；表示这个函数的曲线在原点有一个角点。

从这些例子可以清楚看出, 存在一些连续函数在变量的特殊值处没有导数。但是无穷小分析的发现者曾深信，一个连续函数通常有导数。甚至有人尝试证明这一点，不过这些证明当然是错误的。最后，Weierstrass 通过给出在变量的

[3]这里须在 $x = 0$ 时给 y 赋值为零。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

任何值处都没有导数的连续函数的例子，彻底解决了这个问题。[4]但是由于这些函数迄今尚未在任何应用中使用，我们在这里不考虑它们。

今后，当我们说函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 中有导数时，除非另有明说，意思是：它对 a 与 b 之间的每一个 x 值都有唯一的有限导数，并且在 $x = a$ 处（h 取正）以及在 $x = b$ 处（h 取负）也有这样的导数。

6.　逐次导数

函数 $f(x)$ 的导数通常又是 x 的另一个函数 $f'(x)$。如果 $f'(x)$ 又有导数，这个新函数叫作 $f(x)$ 的*二阶导数*，记作 y'' 或 $f''(x)$。同样地，三阶导数 y''' 或 $f'''(x)$ 定义为二阶导数的导数，如此等等。一般地，n 阶导数 $y^{(n)}$ 或 $f^{(n)}(x)$ 是 $(n-1)$ 阶导数的导数。如果在这样形成逐次导数时，从不遇到一个没有导数的函数，我们就可以想象这个过程无限继续下去。这样便得到从初始函数 $f(x)$ 出发的一列无止境的导数。直到现在，在各种重要应用中出现的函数都是如此。

上述记号归功于 Lagrange。Cauchy 的记号 $D^n y$ 或 $D^n f(x)$ 也偶尔用来表示 n 阶导数。Leibniz 的记号稍后给出。

7.　Rolle 定理

导数在方程研究中的用途，依赖于下面这个命题；它称为 *Rolle 定理*:

> 设 a 与 b 是方程 $f(x) = 0$ 的两个根。如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 中连续并有导数，那么方程 $f'(x) = 0$ 在 a 与 b 之间至少有一个根。

按假设，函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 与 $x = b$ 时消失。如果它在区间 (a, b) 的每一点都消失，则它的导数也在区间的每一点都消失，定理显然成立。如果函数 $f(x)$ 并不在整个区间内消失，它就在某些点取正值或负值。比如设它有正值。那么它必在某个 x 值，比如 x_1，处取得最大值 M；这个 x_1 位于 a 与 b 之间（§3，定理 II）。比值

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h},$$

[4] 1872 年 7 月 18 日在柏林科学院宣读的札记。其他例子可见 Darboux 关于不连续函数的论文（*Annales de l'École Normale Supérieure*, Vol. IV, 2nd series）。Weierstrass 的一个例子将在后面给出（第九章）。

其中 h 取正，必定为负或为零。因此这个比值的极限，也就是 $f'(x_1)$，不可能为正；即 $f'(x_1) \leq 0$。但是如果把 $f'(x_1)$ 看作比值

$$\frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h},$$

其中 h 为正，的极限，用同样的方式可得 $f'(x_1) \geq 0$。由这两个结果显然有 $f'(x_1) = 0$。

8. 中值定理

现在很容易从上面的定理推出重要的*中值定理*：[5]

设 $f(x)$ 是在区间 (a, b) 中连续并有导数的函数。那么

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \tag{1}$$

其中 c 是介于 a 与 b 之间的一个数。

为了证明这个公式，设 $\phi(x)$ 是另一个具有与 $f(x)$ 相同性质的函数，即它在区间 (a, b) 中连续并有导数。我们来确定三个常量 A, B, C，使辅助函数

$$\psi(x) = Af(x) + B\phi(x) + C$$

在 $x = a$ 与 $x = b$ 时都消失。这所需且充分的条件是

$$Af(a) + B\phi(a) + C = 0, \qquad Af(b) + B\phi(b) + C = 0;$$

若取

$$A = \phi(a) - \phi(b), \quad B = f(b) - f(a), \quad C = f(a)\phi(b) - f(b)\phi(a),$$

这些条件便满足。如此定义的新函数 $\psi(x)$ 在区间 (a, b) 中连续并有导数。因此它的导数

$$\psi'(x) = Af'(x) + B\phi'(x)$$

在某个介于 a 与 b 之间的值 c 处消失；于是把 A 与 B 换成其值，得到形如

$$[\phi(b) - \phi(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]\phi'(c) \tag{1'}$$

[5]原文法语为“Formule des accroissements finis”。法国人也用“Formule de la moyenne”作为同义语。英文中其他同义说法有“Average value theorem”和“Mean value theorem”。——英译者

的关系。只须取 $\phi(x)=x$，就得到要证的等式。注意，这个证明并不预设导数 $f'(x)$ 连续。

由刚证明的定理可知，如果导数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 的每一点都是零，则函数 $f(x)$ 在区间的每一点取同一个值；因为把公式应用于区间 (a,b) 中的两个值 x_1,x_2，就得到 $f(x_1)=f(x_2)$。所以，如果两个函数有同一个导数，它们的差是一个常量；反过来也显然成立。如果给定一个导数为 $f(x)$ 的函数 $F(x)$，那么所有有同一导数的其他函数，均由在 $F(x)$ 上加任意常量得到。[6]

式 (1) 的几何解释非常简单。画出在区间 (a,b) 中表示函数 $y=f(x)$ 的曲线 AMB。那么比值 $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ 是弦 AB 的斜率，而 $f'(c)$ 是横坐标为 c 的曲线上某一点 C 处切线的斜率。因此 (1) 表达的是：在曲线 AMB 上，在 A 与 B 之间，存在一点 C，使该处切线平行于弦 AB。

如果导数 $f'(x)$ 连续，并且让 a 与 b 以任意方式趋近同一个极限 x_0，则位于 a 与 b 之间的数 c 也趋近于 x_0；于是 (1) 表明，比值

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

的极限是 $f'(x_0)$。几何解释如下。在曲线 $y=f(x)$ 上取一个横坐标为 x_0 的点 M，并取两个横坐标分别为 a 与 b 的点 A 与 B。比值 $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ 等于弦 AB 的斜率，而 $f'(x_0)$ 是点 M 处切线的斜率。因此，当两点 A 与 B 以任意方式趋近点 M 时，割线 AB 以点 M 处的切线为其极限位置。

不过，如果导数不连续，这一般并不成立。例如，若在曲线 $y=x^{1/3}$ 上、y 轴的两侧取两点，从图形上显然可见，只要令这两点依照适当选择的方式趋近原点，连接它们的割线方向就可以趋近于任意预先指定的极限方向。

方程 (1') 有时叫作广义中值定理。由它可以立刻推出 l'Hôpital 关于不定式的定理。设 $f(a)=0$ 且 $\phi(a)=0$。在 (1') 中把 b 换成 x，得到

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(x_1)}{\phi'(x_1)},$$

[6]这个定理有时在未充分注意其陈述中的条件时被应用。比如设 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是两个连续函数，它们在区间 (a,b) 中有导数 $f'(x),\phi'(x)$。若这四个函数满足关系 $f'(x)\phi(x)-f(x)\phi'(x)=0$，有时人们就认为已经证明函数 f/ϕ 的导数，即 $[f'(x)\phi(x)-f(x)\phi'(x)]/\phi^2$，为零，于是 f/ϕ 在区间 (a,b) 中为常数。但是，除非函数 $\phi(x)$ 在区间 (a,b) 中不为零，这个结论并非绝对严格。例如，设 $\phi(x)$ 与 $\phi'(x)$ 在 a 与 b 之间的某个值 c 处都消失。取函数 $f(x)$ 在 a 与 c 之间等于 $C_1\phi(x)$，在 c 与 b 之间等于 $C_2\phi(x)$，其中 C_1 与 C_2 是不同常量。这个函数在区间 (a,b) 中连续并有导数，并且对区间内每一个 x 值都有 $f'(x)\phi(x)-f(x)\phi'(x)=0$。其几何解释是显然的。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 x_1 介于 a 与 x 之间。这个方程表明: 如果当 x 趋近于 a 时, 比值 $f'(x)/\phi'(x)$ 趋近于一个极限，则在 $f(a)=0$ 且 $\phi(a)=0$ 的条件下，比值 $f(x)/\phi(x)$ 也趋近于同一个极限。

9. 中值定理的推广

关于中值定理，已经有人提出了多种推广。下面这个推广归功于 Stieltjes（*Bulletin de la Société Mathématique*, Vol. XVI, p. 100）。为了确定起见，考虑三个函数 $f(x), g(x), h(x)$，它们都具有一阶与二阶导数。设 a, b, c 是变量的三个特殊值（$a<b<c$）。令数 A 由方程

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

定义，并令

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$$

为一个辅助函数。由于这个函数在 $x=b$ 与 $x=c$ 时消失，它的导数必在 b 与 c 之间的某个值 ζ 处消失。因此

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\zeta) & g'(\zeta) & h'(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

如果在这个方程左端把 b 换成 x，就得到一个关于 x 的函数，它在 $x=a$ 与 $x=b$ 时消失。因此它的导数在 a 与 b 之间的某个值处消失，我们把这个值记作 ξ。由此得到的新方程是

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f'(\zeta) & g'(\zeta) & h'(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2\xi \\ 0 & 1 & 2\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

最后，在这个方程左端把 ζ 换成 x，得到一个关于 x 的函数，它在 $x=\xi$ 与 $x=\zeta$ 时消失。因此它的导数在某个值 η 处消失；这个 η 位于 ξ 与 ζ 之间，因

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而位于 a 与 c 之间。于是 A 必有值

$$A = \frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) \end{vmatrix},$$

其中 ξ 介于 a 与 b 之间，而 η 介于 a 与 c 之间。

这个证明并不预设二阶导数 $f''(x), g''(x), h''(x)$ 连续。如果这些导数连续，并且各值 a, b, c 趋近于同一个极限 x_0，则在极限中有

$$\lim A = \frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) & h(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) & h'(x_0) \\ f''(x_0) & g''(x_0) & h''(x_0) \end{vmatrix}.$$

对于 n 个函数也有类似的表达式，其证明沿着同样的路线进行。如果只取两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，并令 $g(x) = 1$，这些公式就化为中值定理。

Schwarz 也给出了一个类似的推广（*Annali di Matematica*, 2nd series, Vol. X）。

II. 多元函数

10. 引言

一个变量 ω，其值依赖于若干相互独立的变量 $x, y, z, \ldots, t$ 的值，叫作这些自变量 $x, y, z, \ldots, t$ 的*函数*；这种关系记作

$$\omega = f(x, y, z, \ldots, t).$$

为了确定起见，设 $\omega = f(x, y)$ 是两个自变量 x 与 y 的函数。如果把 x 与 y 看作平面内一点的笛卡儿坐标，那么每一对值 (x, y) 决定平面上的一个点，反过来也一样。如果对于 xy 平面中某个区域 A 的每一点，都对应于一个 ω 值，其中区域 A 由一个或多个任意形状的轮廓围成，我们就说函数 $f(x, y)$ 在区域 A 中有定义。

设 (x_0, y_0) 是该区域内一点 M_0 的坐标。如果对于任意预先指定的正数 ϵ，存在另一个正数 η，使得当 $|h| < \eta$ 且 $|k| < \eta$ 时，有

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| < \epsilon,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

则称函数 $f(x,y)$ 对这一对值 (x_0,y_0) 连续。

这个连续性定义可以解释如下。设在 xy 平面内，以 M_0 为中心，作一个边长为 2η、边平行于坐标轴的正方形。坐标为 x_0+h, y_0+k 的点 M'，只要 $|h|<\eta$ 且 $|k|<\eta$，就位于这个正方形内。说函数对这一对值 (x_0,y_0) 连续，就等于说：只要把这个正方形取得足够小，便能使函数在 M_0 的值同它在该正方形任意另一点的值之差，在绝对值上小于 ϵ。

显然，可以用以 (x_0,y_0) 为中心的圆来代替正方形。因为如果上述条件对正方形内所有点成立，它显然也对内切圆内所有点成立。反过来，如果条件对某圆内所有点成立，它也对该圆内接正方形内所有点成立。因此，我们也可以这样定义连续性：对每个 ϵ 都存在一个 η，使得只要 $\sqrt{h^2+k^2}<\eta$，就有

$$|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)|<\epsilon.$$

含有 $3,4,\ldots,n$ 个自变量的函数的连续性定义与此类似。

显然，两个自变量 x 与 y 的任意连续函数，在把每一个变量单独看待时，都是该变量的连续函数。然而，反过来并不总成立。[7]

11. 偏导数

若在连续函数 $f(x,y)$ 中给 y 代入任意常值，就得到一个一元连续函数。这个关于 x 的函数的导数，如果存在，记作 $f_x(x,y)$ 或 ω_x。同样，符号 ω_y 或 $f_y(x,y)$ 用来表示把 x 看作常量而把 y 看作自变量时，函数 $f(x,y)$ 的导数。函数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的*偏导数*。它们本身通常又是两个变量 x 与 y 的函数。若再形成它们的偏导数，就得到给定函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数。因此共有四个二阶偏导数

$$f_{x^2}(x,y), \qquad f_{xy}(x,y), \qquad f_{yx}(x,y), \qquad f_{y^2}(x,y).$$

三阶、四阶以及更高阶的偏导数也类似定义。一般地，给定任意个自变量的函数

$$\omega=f(x,y,z,\ldots,t),$$

[7]例如考虑函数 $f(x,y)$: 当两个变量 x 与 y 不同时为零时, 它等于 $2xy/(x^2+y^2)$; 当 $x=y=0$ 时，它等于零。显然，当 y 为常量时，它是 x 的连续函数；反过来也一样。然而，对这两个自变量 x,y 来说，它在值对 $x=0, y=0$ 处并不是连续函数。因为如果点 (x,y) 沿直线 $x=y$ 趋近原点，函数 $f(x,y)$ 趋近于极限 1，而不是零。这类函数由 Baire 在他的论文中研究过。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

一个 n 阶偏导数，就是按照某种次序，对函数 f 关于出现在 f 中任意变量连续作 n 次求导所得的结果。我们现在说明，结果不依赖于这些求导进行的次序。

先证明下面的引理：

> 设 $\omega = f(x, y)$ 是两个变量 x 与 y 的函数。那么只要两个导数 f_{xy} 与 f_{yx} 连续，就有
> $$f_{xy} = f_{yx}.$$

为证明这一点，先把表达式

$$U = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)$$

写成两种不同形式；这里假定 $x, y, \Delta x, \Delta y$ 具有确定的值。引入辅助函数

$$\phi(v) = f(x + \Delta x, v) - f(x, v),$$

其中 v 是辅助变量。于是可写

$$U = \phi(y + \Delta y) - \phi(y).$$

把中值定理应用于函数 $\phi(v)$，得

$$U = \Delta y \, \phi_v(y + \theta \Delta y), \qquad 0 < \theta < 1;$$

或者，用 ϕ_v 的值代入，得

$$U = \Delta y \, [f_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) - f_y(x, y + \theta \Delta y)].$$

现在再把中值定理应用于函数 $f_y(u, y + \theta \Delta y)$，把 u 看作自变量，得到

$$U = \Delta x \, \Delta y \, f_{yx}(x + \theta' \Delta x, y + \theta \Delta y), \qquad 0 < \theta' < 1.$$

由表达式 U 关于 $x, y, \Delta x, \Delta y$ 的对称性可见，如果交换 x 与 y，也有

$$U = \Delta y \, \Delta x \, f_{xy}(x + \theta_1' \Delta x, y + \theta_1 \Delta y),$$

其中 θ_1 与 θ_1' 同样为小于 1 的正数。令 U 的这两个值相等，并除以 $\Delta x \Delta y$，得到

$$f_{xy}(x + \theta_1' \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) = f_{yx}(x + \theta' \Delta x, y + \theta \Delta y).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

由于假定导数 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 连续，当 Δx 与 Δy 趋近于零时，上式两边分别趋近于 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$，于是得到要证的定理。

注意，在上面的证明中，对另外两个二阶导数 f_{x^2} 与 f_{y^2} 没有作任何假设。这个证明也适用于函数 $f(x,y)$ 除 x,y 外还依赖于任意个别的自变量的情形, 因为这些其他变量在前面的推导中只须看作常量。

现在考虑任意个自变量的函数

$$\omega = f(x, y, z, \ldots, t),$$

并设 Ω 是这个函数的一个 n 阶偏导数。导致 Ω 的求导次序中的任意置换，都可以通过一系列相邻两次求导的交换来实现；而由于我们刚看到这些交换不改变结果, 所考虑的置换也同样不改变结果。因此, 为了给 n 阶偏导数一种不含歧义的记号，只需指出关于每个自变量求导的次数。例如，三元函数 $\omega = f(x,y,z)$ 的任意 n 阶导数，都可由下列记号之一表示:

$$f_{x^p y^q z^r}(x, y, z), \qquad D^n_{x^p y^q z^r} f(x, y, z),$$

其中 $p+q+r=n$。[8]这两个记号都表示把 f 分别关于 x 连续求导 p 次，关于 y 连续求导 q 次，关于 z 连续求导 r 次所得的结果；这些运算可按任意次序进行。有三个不同的一阶导数：f_x, f_y, f_z；有六个二阶导数：$f_{x^2}, f_{y^2}, f_{z^2}, f_{xy}, f_{yz}, f_{xz}$；如此等等。

一般说来，一个含 p 个自变量的函数，有多少个不同的 n 阶导数，就等于 p 个自变量的 n 次齐次多项式中有多少个不同项；这个数是

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots(p-2)(p-1)},$$

如组合论所示。

实用规则。初等微积分书通常给出若干求导实用规则。下面附上一张这样的规则表，把函数和它的导数放在同一行:

$$y = x^a, \qquad y' = a x^{a-1};$$

$$y = a^x, \qquad y' = a^x \log a,$$

[8]为简单起见，记号 $f_{x^p y^q z^r}(x,y,z)$ 代替 $f^{(n)}_{x^p y^q z^r}(x,y,z)$。例如用 $f_{xy}(x,y)$ 代替 $f''_{xy}(x,y)$，更简单而同样清楚。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中符号 log 表示自然对数；

$$y = \log x, \qquad y' = \frac{1}{x};$$

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x;$$

$$y = \cos x, \qquad y' = -\sin x;$$

$$y = \arcsin x, \qquad y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}};$$

$$y = \arctan x, \qquad y' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$y = uv, \qquad y' = u'v + uv';$$

$$y = \frac{u}{v}, \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$y = f(u), \qquad y_x = f'(u)u_x;$$

$$y = f(u, v, w), \qquad y_x = u_x f_u + v_x f_v + w_x f_w.$$

最后两条规则使我们能够求出函数的函数的导数，以及复合函数的导数，只要 f_u, f_v, f_w 连续。因此，我们能求出初等数学中研究的函数的逐次导数：多项式、有理和无理函数、指数函数和对数函数、三角函数及其反函数，以及由所有这些函数经组合得到的函数。

对于多元函数，也存在某些类似于中值定理的公式。为了确定起见，考虑两个自变量 x, y 的函数 $f(x, y)$。差 $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ 可写成

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) = {} & [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] \\ & + [f(x, y+k) - f(x, y)], \end{aligned}$$

对每一部分都可应用中值定理。因此得到

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf_x(x+\theta h, y+k) + kf_y(x, y+\theta' k),$$

其中 θ 与 θ' 都位于零与一之间。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

不论导数 f_x 与 f_y 连续与否，这个公式都成立。如果这些导数连续，还可使用另一个类似的公式，它只含一个未定数 θ。[9]为推出这个第二公式，考虑辅助函数 $\phi(t)=f(x+ht,y+kt)$，其中 x,y,h,k 具有确定值，而 t 表示辅助变量。把中值定理应用于这个函数，得

$$\phi(1)-\phi(0)=\phi'(\theta), \qquad 0<\theta<1.$$

现在 $\phi(t)$ 是 t 的复合函数，它的导数 $\phi'(t)$ 等于

$$hf_x(x+ht,y+kt)+kf_y(x+ht,y+kt);$$

于是前式可写为

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k).$$

12. 曲面的切平面

我们已经看到，一元函数的导数给出平面曲线的切线。同样，二元函数的偏导数出现在曲面的切平面的确定中。设

$$z=F(x,y) \tag{2}$$

是曲面 S 的方程，并假定函数 $F(x,y)$ 连同它的一阶偏导数，在 xy 平面中的一点 (x_0,y_0) 处连续。设 z_0 是对应的 z 值，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 S 上的对应点。如果方程

$$x=f(t), \qquad y=\phi(t), \qquad z=\psi(t) \tag{3}$$

表示曲面 S 上通过点 M_0 的一条曲线 C，则三个函数 $f(t),\phi(t),\psi(t)$，我们假定它们连续并可微，在参数 t 的某个值 t_0 处必须分别化为 x_0,y_0,z_0。这条曲线

[9]也可以得到另一个只含一个未定数 θ 的公式，即使导数 f_x 与 f_y 不连续也成立。把中值定理应用于辅助函数

$$\phi(t)=f(x+ht,y+k)+f(x,y+kt)$$

即可得

$$\phi(1)-\phi(0)=\phi'(\theta), \qquad 0<\theta<1,$$

或者

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x(x+\theta h,y+k)+kf_y(x,y+\theta k), \qquad 0<\theta<1.$$

只要导数 f_x 与 f_y 在点 $(x+ht,y+k)$、$(x,y+kt)$，$0\le t\le 1$，存在，所进行的运算以及最终公式都成立。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在点 M_0 处的切线由方程（§5）

$$\frac{X - x_0}{f'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{\phi'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{\psi'(t_0)} \tag{4}$$

给出。

由于曲线 C 位于曲面 S 上，方程

$$\psi(t) = F[f(t), \phi(t)]$$

必须对所有 t 成立；也就是说，这个关系必须是关于 t 的恒等式。按复合函数求导规则对右边求导，并令 $t = t_0$，得到

$$\psi'(t_0) = f'(t_0)F_{x_0} + \phi'(t_0)F_{y_0}. \tag{5}$$

现在可在方程 (4) 与 (5) 之间消去 $f'(t_0), \phi'(t_0), \psi'(t_0)$，消去的结果是

$$Z - z_0 = (X - x_0)F_{x_0} + (Y - y_0)F_{y_0}. \tag{6}$$

这是一个平面的方程；它是曲面上通过点 M_0 的所有曲线的切线的轨迹。这个平面称为曲面的切平面。

13. 从增量到导数的过渡

我们按照彼此递推的方式定义了逐次导数：n 阶导数由 $(n-1)$ 阶导数导出，如此等等。自然要问，是否可以不用低阶导数作为中介，而直接把任意阶导数定义为某个比值的极限。对于 f_{xy}，我们实际上已经做过类似的事（§11）；因为上面给出的证明表明，当 Δx 与 Δy 都趋近于零时，f_{xy} 是比值

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)}{\Delta x \, \Delta y}$$

的极限。用同样的方法可以证明，一元函数 $f(x)$ 的二阶导数 f'' 是比值

$$\frac{f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_1) - f(x + h_2) + f(x)}{h_1 h_2}$$

当 h_1 与 h_2 都趋近于零时的极限。

事实上，令

$$f_1(x) = f(x + h_1) - f(x),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

再把上面的比值写成

$$\frac{f_1(x+h_2)-f_1(x)}{h_1h_2}=\frac{f_1'(x+\theta h_2)}{h_1},\qquad 0<\theta<1;$$

或者

$$\frac{f'(x+h_1+\theta h_2)-f'(x+\theta h_2)}{h_1}=f''(x+\theta' h_1+\theta h_2),\qquad 0<\theta'<1.$$

因此，只要二阶导数连续，这个比值的极限就是二阶导数 f''。

现在转向一般情形。为了确定起见，考虑三个自变量的函数 $\omega=f(x,y,z)$。令

$$\begin{aligned}\Delta_x^h\omega&=f(x+h,y,z)-f(x,y,z),\\ \Delta_y^k\omega&=f(x,y+k,z)-f(x,y,z),\\ \Delta_z^l\omega&=f(x,y,z+l)-f(x,y,z),\end{aligned}$$

其中 $\Delta_x^h\omega,\Delta_y^k\omega,\Delta_z^l\omega$ 是 ω 的一阶增量。如果把 h,k,l 看作给定常量，那么这三个一阶增量本身就是 x,y,z 的函数；我们可以形成这些函数相对于变量增量 h_1,k_1,l_1 的相应增量。这便得到二阶增量

$$\Delta_x^{h_1}\Delta_x^h\omega,\qquad \Delta_x^h\Delta_y^k\omega,\qquad \ldots.$$

这个过程可以无限继续；n 阶增量定义为 $(n-1)$ 阶增量的一阶增量。由于任意两个这样的运算的次序都可以交换，所以只需指出给每个变量所作的逐次增量即可。一个 n 阶增量可用如下记号表示：

$$\Delta^{(n)}\omega=\Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\cdots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\cdots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\cdots\Delta_z^{l_r}f(x,y,z),$$

其中 $p+q+r=n$；这里各个增量 h_i,k_j,l_r 可以相等，也可以不相等。这个增量可以用 n 阶偏导数表示，它等于乘积

$$\begin{aligned}&h_1h_2\cdots h_p\,k_1\cdots k_q\,l_1\cdots l_r\\ &\quad\times f_{x^py^qz^r}\Big(x+\theta_1h_1+\cdots+\theta_ph_p,\Big),\\ &\qquad\qquad\qquad y+\theta_1'k_1+\cdots+\theta_q'k_q,\\ &\qquad\qquad\qquad z+\theta_1''l_1+\cdots+\theta_r''l_r\end{aligned}$$

其中每个 θ 都介于 0 与 1 之间。这个公式已经对一阶与二阶增量证明过。为了在一般情形下证明它，假设它对 $(n-1)$ 阶增量成立，并令

$$\phi(x,y,z)=\Delta_x^{h_2}\cdots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\cdots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\cdots\Delta_z^{l_r}f.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

那么按假设,

$$\phi(x,y,z)=h_2\cdots h_p k_1\cdots k_q l_1\cdots l_r \times f_{x^{p-1}y^q z^r}(x+\theta_2 h_2+\cdots+\theta_p h_p,\ y+\cdots,\ z+\cdots).$$

但所考虑的 n 阶增量等于 $\phi(x+h_1,y,z)-\phi(x,y,z)$；若对这个增量应用中值定理，就最终得到所需公式。

反过来，当所有增量 h,k,l 都趋近于零时，偏导数 $f_{x^p y^q z^r}$ 是比值

$$\frac{\Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\cdots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\cdots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\cdots\Delta_z^{l_r}f}{h_1h_2\cdots h_p\,k_1k_2\cdots k_q\,l_1\cdots l_r}$$

的极限。

值得注意的是，这个定义有时比通常定义更一般。例如，设

$$\omega=f(x,y)=\phi(x)+\psi(y)$$

是 x 与 y 的函数，其中 ϕ 与 ψ 都没有导数。那么 ω 也没有一阶导数，因而按通常意义谈不上二阶导数。然而，如果采用这个新定义，导数 f_{xy} 就是分式

$$\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk}$$

的极限；这个分式等于

$$\frac{\phi(x+h)+\psi(y+k)-\phi(x+h)-\psi(y)-\phi(x)-\psi(y+k)+\phi(x)+\psi(y)}{hk}.$$

但这个比值的分子恒等于零。因此该比值趋近于零作为极限, 我们得到 $f_{xy}=0$。[10]

[10]关于一元函数也可作类似说明。例如，函数 $f(x)=x^3\cos(1/x)$ 有导数

$$f'(x)=3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x},$$

而 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处没有导数。但是比值

$$\frac{f(2\alpha)-2f(\alpha)+f(0)}{\alpha^2},$$

即

$$8\alpha\cos\frac{1}{2\alpha}-2\alpha\cos\frac{1}{\alpha},$$

当 α 趋近于零时有极限零。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

III. 微分记号

微分记号比任何其他记号使用得都更早，[11]它出自 Leibniz。虽然它绝非不可缺少，但它有若干对称性和一般性上的优点，特别是在研究多元函数时很方便。这个记号建立在无穷小的使用之上。

14. 微分

凡以零为极限的变量，叫作*无穷小量*，或简称*无穷小*。这里变量这一条件是本质的；因为一个常量无论多么小，只要它不是零，就不是无穷小。

通常要同时考察若干个趋近于零的量。其中一个被选作比较的标准，叫作*主无穷小量*。设 α 是主无穷小量，β 是另一个无穷小量。如果比值 β/α 随 α 而趋近于零，就说 β 是相对于 α 的*高阶无穷小*。另一方面，如果当 α 趋近于零时，比值 β/α 趋近于一个不等于零的极限 K，就说 β 是相对于 α 的一阶无穷小。在这种情形下

$$\frac{\beta}{\alpha} = K + \epsilon,$$

其中 ϵ 是相对于 α 的另一个无穷小。因此

$$\beta = \alpha(K + \epsilon) = K\alpha + \alpha\epsilon,$$

而 $K\alpha$ 叫作 β 的*主部*。补充项 $\alpha\epsilon$ 是相对于 α 的高阶无穷小。一般地，如果能够找到 α 的一个正幂，例如 α^n，使得当 α 趋近于零时 β/α^n 趋近于一个有限且不等于零的极限 K，就说 β 是相对于 α 的 n 阶无穷小。于是有

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = K + \epsilon, \qquad \beta = \alpha^n(K + \epsilon) = K\alpha^n + \alpha^n\epsilon.$$

项 $K\alpha^n$ 仍叫作 β 的主部。

有了这些定义以后, 来考虑一个连续函数 $y = f(x)$, 并假设它有导数 $f'(x)$。令 Δx 是 x 的增量，令 Δy 表示 y 的相应增量。由导数的定义本身可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon,$$

其中 ϵ 随 Δx 而趋近于零。如果把 Δx 取作主无穷小，则 Δy 本身就是一个无

[11]牛顿的记号或许是例外。——英译者

CC BY-SA 4.0

穷小，其主部为 $f'(x)\Delta x$。[12]这个主部叫作 y 的微分，并记作 dy:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

当 $f(x)$ 化为 x 本身时，上式成为 $dx = \Delta x$；因此，为了对称起见，我们写作

$$dy = f'(x)dx,$$

这里，自变量 x 的增量 dx 对于同时考察的若干个 x 的因变量函数，须在同一次计算中取同一个值；这个值本身可以任意选取，因而仍是一个变量。

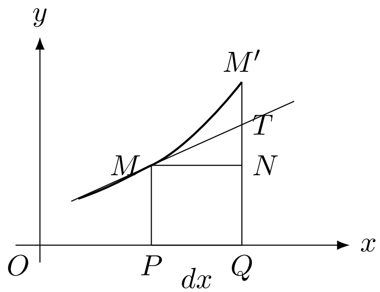


图 1

取一条方程为 $y = f(x)$ 的曲线 C，并考察其上两点 M 与 M'；它们的横坐标分别为 x 与 $x + dx$。在三角形 MTN 中有

$$NT = MN \tan \angle TMN = dx\, f'(x).$$

因此 NT 表示微分 dy，而 Δy 等于 NM'。从图上显然可见，随着 M' 趋近于 M，一般地说，除非 MT 平行于 x 轴，$M'T$ 是相对于 NT 的高阶无穷小。

逐次微分可以像逐次导数那样逐一由前一个定义。于是我们把一阶微分的微分叫作二阶微分，这里 dx 在两次微分中都赋予如上所说的同一个值。它记作 d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d\big(f'(x)dx\big) = f''(x)(dx)^2.$$

类似地，三阶微分为

$$d^3y = d(d^2y) = d\big(f''(x)(dx)^2\big) = f'''(x)(dx)^3,$$

[12]严格说来，此处应排除 $f'(x) = 0$ 的情形。不过，为方便起见，即使在这种情形下也保留同一定义 $dy = f'(x)\Delta x$，尽管它不再是 Δy 的主部。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如此等等。一般地，$(n-1)$ 阶微分的微分是

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n.$$

反过来，导数 $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$ 可由微分表示；由此得到导数的一种新记号：

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \qquad \ldots, \qquad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}, \qquad \ldots.$$

每一条求导法则都对应一条求微分法则。例如有

$$dx^m = m x^{m-1} dx, \qquad da^x = a^x \log a\, dx;$$

$$d \log x = \frac{dx}{x}, \qquad d \sin x = \cos x\, dx, \qquad \ldots;$$

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-x^2}}, \qquad d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

稍微考察一下复合函数的情形。设 $y = f(u)$，其中 u 是自变量 x 的函数。于是

$$y_x = f'(u) u_x,$$

两边同乘 dx，得到

$$y_x dx = f'(u) u_x dx;$$

也就是说，

$$dy = f'(u) du.$$

因此 dy 的公式与 u 是自变量时相同。这正是微分记号的优点之一。在导数记号中，为了表示 y 关于 x 的导数，需要两个不同的公式

$$y' = f'(x), \qquad y_x = f'(u) u_x,$$

具体使用哪一个，取决于 y 是直接作为 x 的函数给出，还是借助辅助函数 u 作为 x 的函数给出。在微分记号中，两种情形使用同一个公式。[13]

如果 $y = f(u, v, w)$ 是一个复合函数，那么至少在 f_u, f_v, f_w 连续时，有

$$y_x = u_x f_u + v_x f_v + w_x f_w;$$

[13]不过，这一特殊优点并不大；因为上面的最后一个公式同样也是一般公式，并且涵盖所提到的两种情形。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

同乘 dx，得到

$$y_x dx = u_x dx\, f_u + v_x dx\, f_v + w_x dx\, f_w;$$

也就是说，

$$dy = f_u\, du + f_v\, dv + f_w\, dw.$$

因此，例如有

$$d(uv) = u\, dv + v\, du, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}.$$

同样的法则使我们能够计算逐次微分。例如求函数 $y = f(u)$ 的逐次微分。已经有

$$dy = f'(u)du.$$

为了计算 d^2y，必须注意 du 不能看作固定不变，因为 u 不是自变量。因此必须计算复合函数 $f'(u)du$ 的微分，其中 u 与 du 是辅助函数。由此得到

$$d^2y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$$

为了计算 d^3y，必须把 d^2y 看作以 u, du, d^2u 为辅助函数的复合函数，这导致表达式

$$d^3y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)du\, d^2u + f'(u)d^3u;$$

如此等等。应注意，由于出现 d^2u, d^3u 等项，这些关于 d^2y, d^3y 等的公式并不同于 u 是自变量时的公式。[14]

对于多元函数的偏导数，也采用类似的记号。于是，函数 $f(x, y, z)$ 的 n 阶偏导数，在前面的记号中表示为 $f_{x^p y^q z^r}$，在微分记号中则表示为

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}, \qquad p + q + r = n.$$

这个记号只是纯粹的符号，在多元函数的情形下绝不表示商；它只在一元函数的情形下才有商的意义。[15]

[14]这个缺点似乎完全抵消了上面提到的优点。严格说来，我们应当区分 $d_x^2 y$ 与 $d_u^2 y$ 等等。——英译者

[15]用字母 ∂ 表示多元函数的偏导数，是 Jacobi 的做法。在他以前，仍使用与一元函数导数相同的字母 d。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

15. 全微分

设 $\omega = f(x, y, z)$ 是三个自变量 x, y, z 的函数。表达式

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

叫作 ω 的全微分; 这里 dx, dy, dz 是赋予三个自变量 x, y, z 的三个固定增量, 它们除此之外是任意的。三个乘积

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}dy, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

叫作偏微分。

二阶全微分 $d^2\omega$ 是一阶全微分的全微分；当我们由一个微分过渡到高一阶微分时，增量 dx, dy, dz 保持不变。因此

$$d^2\omega = d(d\omega) = \frac{\partial d\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial d\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial d\omega}{\partial z}dz;$$

也就是，展开后,

$$\begin{aligned} d^2\omega = &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz\right)dx \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz\right)dy \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz \\ = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz. \end{aligned}$$

如果把 $\partial^2 f$ 换成 ∂f^2，这个方程右端就变成

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

的平方。因此可以形式地写作

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(2)},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

约定在展开之后，把 ∂f^2 换成 $\partial^2 f$。

一般地，如果把 $(n-1)$ 阶全微分的全微分叫作 n 阶全微分，并记为 $d^n\omega$，那么在同样的符号意义下可以写作

$$d^n\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)},$$

其中在展开后应把 ∂f^n 换成 $\partial^n f$；也就是说，用普通记号写为

$$d^n\omega = \sum A_{pqr}\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}dx^p dy^q dz^r, \qquad p+q+r=n,$$

其中

$$A_{pqr} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

是在 $(a+b+c)^n$ 的展开中项 $a^p b^q c^r$ 的系数。事实上，假设这个公式对 $d^n\omega$ 成立。我们将说明它对 $d^{n+1}\omega$ 也成立；而由于我们已经对 $n=2$ 证明过，这就证明了一般情形。由定义可得

$$\begin{aligned} d^{n+1}\omega = d(d^n\omega) = \sum A_{pqr}\bigg[&\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{p+1}\partial y^q \partial z^r}dx^{p+1}dy^q dz^r \\ &+ \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^p \partial y^{q+1}\partial z^r}dx^p dy^{q+1}dz^r \\ &+ \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r+1}}dx^p dy^q dz^{r+1}\bigg]. \end{aligned}$$

于是，把 $\partial^{n+1} f$ 换成 ∂f^{n+1}，右端成为

$$\sum A_{pqr}\frac{\partial f^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}dx^p dy^q dz^r \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right),$$

或

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right).$$

因此，仍用同样的符号，可以写成

$$d^{n+1}\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n+1)}.$$

注。设以任意方式得到的 $d\omega$ 表达式为

$$d\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{7}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 P, Q, R 是 x, y, z 的任意函数。由于按定义

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \omega}{\partial z}dz,$$

我们必有

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\right)dx + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - Q\right)dy + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - R\right)dz = 0,$$

这里 dx, dy, dz 是任意常量。因此

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial z} = R. \tag{8}$$

于是单个方程 (7) 等价于三个分开的方程 (8)，并且一次确定全部三个偏导数。

一般地，如果以任意方式得到 n 阶全微分

$$d^n\omega = \sum C_{pqr} dx^p dy^q dz^r,$$

则系数 C_{pqr} 分别等于相应的 n 阶导数乘以若干数值因子。这样，所有这些导数便一次确定。我们马上会用到这些事实。

16. 复合函数的逐次微分

设 $\omega = F(u, v, w)$ 是一个复合函数，其中 u, v, w 本身是自变量 x, y, z, t 的函数。于是偏导数可写成如下形式：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\\
\frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},\\
\frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},\\
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}$$

如果把这四个方程分别乘以 dx, dy, dz, dt 后相加，左端成为

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \omega}{\partial z}dz + \frac{\partial \omega}{\partial t}dt,$$

也就是 $d\omega$；右端中 $\partial F/\partial u, \partial F/\partial v, \partial F/\partial w$ 的系数分别是 du, dv, dw。所以

$$d\omega = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv + \frac{\partial F}{\partial w}dw, \tag{9}$$

于是可见，复合函数的一阶全微分表达式，与辅助函数就是自变量时的表达式相同。这是微分记号的主要优点之一。方程 (9) 的形式既不依赖于自变量的个数，也不依赖于自变量的选择；并且它等价于与自变量个数相同的分开的方程。

为了计算 $d^2\omega$，把刚得到的 $d\omega$ 法则用于 (9)，并注意其右端含有六个辅助函数 u, v, w, du, dv, dw。于是得到

$$\begin{aligned}d^2\omega = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}du\,dw + \frac{\partial F}{\partial u}d^2u \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}dv\,dw + \frac{\partial F}{\partial v}d^2v \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}du\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}dv\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}dw^2 + \frac{\partial F}{\partial w}d^2w,\end{aligned}$$

或化简后，仍用上面的符号表示为

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv + \frac{\partial F}{\partial w}dw\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u}d^2u + \frac{\partial F}{\partial v}d^2v + \frac{\partial F}{\partial w}d^2w.$$

由于有 d^2u, d^2v, d^2w 中的项，这个公式稍显复杂；当 u, v, w 是自变量时，这些项就消失了。应当记住微分记号的这种限制，并且仔细区分这两种情形下的 $d^2\omega$。为了求 $d^3\omega$，我们要把同一法则用于 $d^2\omega$，并注意 $d^2\omega$ 依赖于九个辅助函数

$$u, v, w, du, dv, dw, d^2u, d^2v, d^2w;$$

如此等等。这些微分的一般表达式会越来越复杂；$d^n\omega$ 是关于

$$du, dv, dw, d^2u, \ldots, d^nu, d^nv, d^nw$$

的多项式，并且含有 d^nu, d^nv, d^nw 的项是

$$\frac{\partial F}{\partial u}d^nu + \frac{\partial F}{\partial v}d^nv + \frac{\partial F}{\partial w}d^nw.$$

如果在 $d^n\omega$ 的表达式中，把 $u, v, w, du, dv, dw, \ldots$ 用它们关于自变量的值代入，则 $d^n\omega$ 变成关于 $dx, dy, dz, \ldots$ 的多项式；其系数等于（参见 §15 的注）ω 的 n 阶偏导数乘以某些数值因子。这样便一次得到所有这些导数。

例如，设要计算复合函数 $\omega = f(u)$ 的一阶和二阶导数，其中 u 是两个自变量的函数 $u = \phi(x, y)$。如果分别计算这些导数，一阶的两个偏导数为

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

再把这两个方程分别关于 x 和 y 求导，只得到下列三个不同的方程，它们给出二阶导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{cases} \tag{11}$$

这些方程中的第二个，可以由 (10) 的第一个方程关于 y 求导得到，也可以由第二个方程关于 x 求导得到。在微分记号中，这五个关系 (10) 和 (11) 可写成

$$\begin{cases} d\omega = \dfrac{\partial\omega}{\partial u}du, \\ d^2\omega = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}du^2 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u}d^2u. \end{cases} \tag{12}$$

如果在这些公式中把 du 和 d^2u 分别替换为

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

那么第一式中 dx 与 dy 的系数给出 ω 的一阶偏导数；第二式中 $dx^2, 2dx\,dy, dy^2$ 的系数给出 ω 的二阶偏导数。

17.　乘积的微分

复合函数的 n 阶全微分公式，在实际应用中常见的若干特殊情形下会大为简化。于是，求两个函数乘积 $\omega = uv$ 的 n 阶微分。对于 n 的最初几个值，有

$$d\omega = v\,du + u\,dv, \qquad d^2\omega = v\,d^2u + 2\,du\,dv + u\,d^2v, \qquad \ldots;$$

一般地，从形成规律显然可见

$$d^n\omega = v\,d^nu + C_1\,dv\,d^{n-1}u + C_2\,d^2v\,d^{n-2}u + \cdots + u\,d^nv,$$

其中 $C_1, C_2, \ldots$ 是正整数。可以用代数归纳法证明这些系数等于 $(a+b)^n$ 展开中的系数；但同一目标也可以用下面的方法达到，这种方法优雅得多，并且适

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

用于许多类似问题。注意 $C_1, C_2, \ldots$ 不依赖于所用的特殊函数 u 与 v，取特殊函数 $u = e^x, v = e^y$，其中 x, y 是两个自变量，并在这个情形下确定系数。于是得到

$$\omega = e^{x+y}, \qquad d\omega = e^{x+y}(dx + dy), \qquad \ldots, \qquad d^n\omega = e^{x+y}(dx + dy)^n,$$

$$du = e^x dx, \qquad d^2u = e^x dx^2, \qquad \ldots,$$
$$dv = e^y dy, \qquad d^2v = e^y dy^2, \qquad \ldots;$$

一般公式除以 e^{x+y} 后成为

$$(dx + dy)^n = dx^n + C_1 dy\, dx^{n-1} + C_2 dy^2 dx^{n-2} + \cdots + dy^n.$$

由于 dx 与 dy 是任意的，便有

$$C_1 = \frac{n}{1}, \qquad C_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \qquad \ldots,$$
$$C_p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p}, \qquad \ldots.$$

因此，一般公式可写为

$$\begin{aligned} d^n(uv) = v\, d^n u + \frac{n}{1}\, dv\, d^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\, d^2v\, d^{n-2}u \\ + \cdots + u\, d^n v. \end{aligned} \tag{13}$$

这个公式适用于任意个自变量。特别地，如果 u 与 v 是一个变量 x 的函数，则除以 dx^n 后，就得到一元函数乘积的 n 阶导数公式。

用类似方法很容易证明关于任意个函数乘积的、类似于 (13) 的公式。

另一个使一般公式化为较简单形式的特殊情形，是 u, v, w 为自变量 x, y, z 的仿射线性函数:

$$u = ax + by + cz + f,$$
$$v = a'x + b'y + c'z + f',$$
$$w = a''x + b''y + c''z + f'',$$

其中系数 $a, a', a'', b, b', \ldots$ 是常量。此时有

$$du = a\, dx + b\, dy + c\, dz,$$

$$dv = a'\, dx + b'\, dy + c'\, dz,$$

$$dw = a'' \, dx + b'' \, dy + c'' \, dz,$$

并且所有高阶微分 $d^n u, d^n v, d^n w$（$n > 1$）都为零。因此 $d^n \omega$ 的公式与 u, v, w 是自变量时相同；也就是说，

$$d^n \omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw \right)^{(n)}.$$

下面应用这一说明。

18. 齐次函数

如果函数 $\phi(x, y, z)$ 在置

$$u = tx, \qquad v = ty, \qquad w = tz$$

时恒满足方程

$$\phi(u, v, w) = t^m \phi(x, y, z),$$

则称 $\phi(x, y, z)$ 是 m *次齐次函数*。

对这个方程两边关于 t 取 n 阶微分，并注意 u, v, w 关于 t 是线性的，且

$$du = x \, dt, \qquad dv = y \, dt, \qquad dw = z \, dt.$$

刚才的说明表明

$$\left(x \frac{\partial \phi}{\partial u} + y \frac{\partial \phi}{\partial v} + z \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1) t^{m-n} \phi(x, y, z).$$

如果现在令 $t = 1$，则 u, v, w 化为 x, y, z，第一端展开式中的任一项

$$A_{pqr} \frac{\partial^n \phi}{\partial u^p \partial v^q \partial w^r} x^p y^q z^r$$

化为

$$A_{pqr} \frac{\partial^n \phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} x^p y^q z^r;$$

于是可形式地写作

$$\left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1) \phi(x, y, z),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 $n=1$ 时，这化为著名公式

$$m\phi(x,y,z)=x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}+z\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

各种记号。这样，我们总共有三套多元函数偏导数记号：Leibniz 的记号、Lagrange 的记号和 Cauchy 的记号。它们每一种都有些冗长，特别是在复杂计算中更显不便。因此人们设计了许多较短的记号。其中，Monge 首先用于二元函数一阶和二阶导数的一种记号，现在已经通用。如果 z 是两个变量 x,y 的函数，就置

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y},\qquad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

于是全微分 dz 与 d^2z 由公式给出

$$dz=p\,dx+q\,dy,\qquad d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2.$$

另一种现在逐渐通用的记号如下。设 z 是任意多个自变量 $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ 的函数；那么采用记号

$$p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中某些指标 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 可以为零。

19.　应用

设 $y=f(x)$ 是一条平面曲线 C 关于一组直角坐标轴的方程。曲线上点 $M(x,y)$ 处切线的方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

在切点处垂直于切线的法线，其斜率为 $-1/y'$；因此法线方程为

$$(Y-y)y'+(X-x)=0.$$

令 P 为点 M 的纵标足，令 T 与 N 分别为切线和法线与 x 轴的交点。距离 PN 叫作*次法线*；PT 叫作*次切线*；MN 叫作*法线*；MT 叫作*切线*。

由法线方程可知，点 N 的横坐标为 $x+yy'$，因此次法线为 $\pm yy'$。如果约定把长度 PN 称为次法线，并按照方向 PN 为正或为负附以符号 $+$ 或符号 $-$，则无论曲线 C 处于什么位置，次法线总是 yy'。同样，次切线为 $-y/y'$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

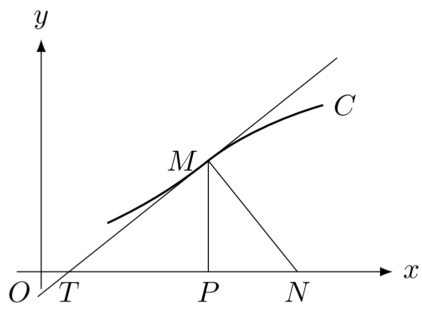


图 2

长度 MN 与 MT 由三角形 MPN 与 MPT 给出:

$$MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = y\sqrt{1 + y'^2},$$
$$MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

关于这些线段可以提出各种问题。例如，求所有次法线为常数且等于给定数 a 的曲线。这等于求所有满足方程 $yy' = a$ 的函数 $y = f(x)$。左端是 $y^2/2$ 的导数，而右端是 ax 的导数。因此这两个函数只能相差一个常数；于是

$$y^2 = 2ax + C,$$

这是以 x 轴为轴线的一条抛物线方程。再如，如果要求次切线为常数的曲线，则导致写出方程 $y'/y = 1/a$；于是

$$\log y = \frac{x}{a} + \log C, \qquad \text{或} \qquad y = Ce^{x/a},$$

这是一个以 x 轴为渐近线的超越曲线的方程。为了求法线为常数的曲线，我们有方程

$$y\sqrt{1 + y'^2} = a,$$

或

$$\frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 1.$$

第一端是 $-\sqrt{a^2 - y^2}$ 的导数；因此

$$-\sqrt{a^2 - y^2} = x + C,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

或

$$(x+C)^2+y^2=a^2,$$

这是半径为 a、圆心在 x 轴上的圆的方程。

切线为常数的曲线是超越曲线，后面我们将研究它们。

设 $y=f(x)$ 与 $Y=F(x)$ 是两条曲线 C 与 C' 的方程，令 M, M' 为对应于同一个 x 值的两点。两条次法线长度相等的充要条件是

$$YY'=\pm yy';$$

也就是说，

$$Y^2=\pm y^2+C,$$

这里的双重符号允许法线同向或反向。这一关系为曲线

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \qquad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2},$$

以及曲线

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2), \qquad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$$

所满足；这给出了作椭圆和双曲线法线的一种简单方法。

习题

1. 设 $\rho=f(\theta)$ 是一条平面曲线的极坐标方程。过极点 O 作一条垂直于矢径 OM 的直线，令 T 与 N 为这条直线分别与切线和法线的交点。用 $f(\theta)$ 与 $f'(\theta)$ 表示距离 OT, ON, MN, MT。分别求使这些距离中每一个成为常数的曲线。

2. 设 $y=f(x),\ z=\phi(x)$ 为空间曲线 Γ，也就是一般空间曲线的方程。令 N 为点 M 处的法平面与 z 轴的交点；这里所谓法平面，是垂直于 M 处切线的平面。再令 P 为从 M 到 z 轴所作垂线的垂足。分别求使距离 PN 与 MN 中每一个为常数的曲线。

   注。这些曲线位于旋转抛物面或球面上。

3. 确定关于 x 的七次多项式 $f(x)$，已知 $f(x)+1$ 可被 $(x-1)^4$ 整除，而 $f(x)-1$ 可被 $(x+1)^4$ 整除。推广这个问题。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

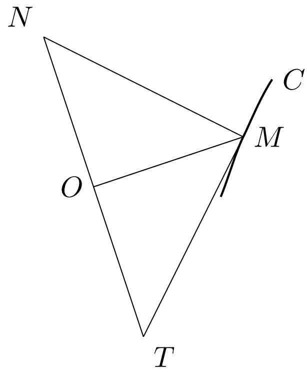


图 3

4. 证明：如果两个多项式 P 与 Q 满足关系

$$\sqrt{1-P^2}=Q\sqrt{1-x^2},$$

则

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中 n 是正整数。

注。由关系

$$1-P^2=Q^2(1-x^2) \tag{a}$$

可得

$$-2PP'=Q\big[2Q'(1-x^2)-2Qx\big]. \tag{b}$$

方程 (a) 表明 Q 与 P 互素；而 (b) 表明 P' 可被 Q 整除。

5*. 设 $R(x)$ 是四次多项式，其根全都相异；又设 $x=U/V$ 是 t 的有理函数，使得

$$\sqrt{R(x)}=\frac{P(t)}{Q(t)}\sqrt{R_1(t)},$$

其中 $R_1(t)$ 是四次多项式，P/Q 是有理函数。证明函数 U/V 满足形如

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{k\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}$$

的关系，其中 k 是常量。[Jacobi]

注。方程 $R(U/V)=0$ 的每一个根，由于它不能使 $R'(x)$ 为零，必使 $UV'-VU'$ 为零，因而也使 dx/dt 为零。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

6*. 证明：函数 $y=\phi(u)$ 的 n 阶导数，其中 u 是自变量 x 的函数，可以写为

$$\frac{d^n y}{dx^n}=A_1\phi'(u)+\frac{A_2}{1\cdot 2}\phi''(u)+\cdots+\frac{A_n}{1\cdot 2\cdots n}\phi^{(n)}(u), \tag{a}$$

其中

$$\begin{cases} A_k=\dfrac{d^n u^k}{dx^n}-\dfrac{k}{1}u\dfrac{d^n u^{k-1}}{dx^n}+\dfrac{k(k-1)}{1\cdot 2}u^2\dfrac{d^n u^{k-2}}{dx^n}+\cdots \\ \qquad +(-1)^{k-1}ku^{k-1}\dfrac{d^n u}{dx^n} \qquad (k=1,2,\ldots,n). \end{cases} \tag{b}$$

先注意 n 阶导数可以写成 (a) 的形式，其中系数 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 与函数 $\phi(u)$ 的形式无关。为了求出它们的值，依次令 $\phi(u)$ 等于 $u,u^2,\ldots,u^n$，并解所得方程以求 $A_1,A_2,\ldots,A_n$。结果就是形式 (b)。

7*. 证明 $\phi(x^2)$ 的 n 阶导数为

$$\begin{aligned}\frac{d^n\phi(x^2)}{dx^n}&=(2x)^n\phi^{(n)}(x^2)+n(n-1)(2x)^{n-2}\phi^{(n-1)}(x^2)+\cdots\\ &\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-2p+1)}{1\cdot 2\cdots p}(2x)^{n-2p}\phi^{(n-p)}(x^2)+\cdots,\end{aligned}$$

其中 $p=0,1,\ldots,\lfloor n/2\rfloor$；$\phi^{(i)}(x^2)$ 表示函数 ϕ 对其自变量的第 i 阶导数在 x^2 处的值。把这个结果应用于函数 e^{-x^2}, arcsin x, arctan x。

中译者校记（现代重排本误排）。现代 LaTeX 重排本把这里解释成“关于 x 的第 i 阶导数”，与公式本身不相容；正确含义是对 ϕ 的自变量求导后在 x^2 处取值。

8*. 若 $x=\cos u$，证明

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-1/2}}{dx^{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{m}\sin mu.$$

[Olinde Rodrigues]

9. 证明 Legendre 多项式

$$X_n=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

满足微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}+n(n+1)X_n=0.$$

由此推出该多项式的系数。

10. 证明四个函数

$$y_1 = \sin(n \arcsin x), \qquad y_3 = \sin(n \arccos x),$$

$$y_2 = \cos(n \arcsin x), \qquad y_4 = \cos(n \arccos x),$$

满足微分方程

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

由此推出当这些函数化为多项式时的展开式。

11*. 证明公式

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{1/x}\right) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}.$$

[Halphen]

12. 任一形如

$$z = x\phi(y/x) + \psi(y/x)$$

的函数都满足方程

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0,$$

不论函数 ϕ 与 ψ 是什么。

13. 函数

$$z = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$$

满足方程

$$r - 2s + t = 0,$$

不论函数 ϕ 与 ψ 是什么。

14. 函数

$$z = f[x + \phi(y)]$$

满足方程 $ps = qr$，不论函数 f 与 ϕ 是什么。

15. 函数

$$z = x^n\phi(y/x) + y^{-n}\psi(y/x)$$

满足方程

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 + px + qy = n^2 z,$$

不论函数 ϕ 与 ψ 是什么。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

16. 证明函数

$$y = |x - a_1|\phi_1(x) + |x - a_2|\phi_2(x) + \cdots + |x - a_n|\phi_n(x),$$

其中函数 $\phi_i(x)$ 及其导数 $\phi_i'(x)$，$i = 1, 2, \ldots, n$，都是 x 的连续函数，它有一个在

$$x = a_1, a_2, \ldots, a_n$$

处不连续的导数。

中译者校记 (底本原误)。按字面, 这一结论还须假定 $a_1, \ldots, a_n$ 两两不同, 并且 $\phi_i(a_i) \neq 0$；否则相应项的左右导数跳跃可能消失。例如 $\phi_i(a_i) = 0$ 时，$|x - a_i|\phi_i(x)$ 的导数可在 a_i 处连续。

17. 求函数

$$z = f(x_1, u), \qquad u = \phi(x_2, x_3)$$

的一阶与二阶导数之间的关系；这里 x_1, x_2, x_3 是三个自变量，f 与 ϕ 是两个任意函数。

18. 设 $f'(x)$ 是任意函数 $f(x)$ 的导数。证明

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2},$$

其中

$$u = [f'(x)]^{-1/2}, \qquad v = f(x)[f'(x)]^{-1/2}.$$

19*. 函数的函数 $u = \phi(y)$ 的 n 阶导数，其中 $y = \Psi(x)$，可以写为

$$D_x^n\phi = \sum \frac{n!}{i!j!\cdots k!} D_y^p\phi \left(\frac{\Psi'}{1}\right)^i \left(\frac{\Psi''}{1\cdot 2}\right)^j \left(\frac{\Psi'''}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^h \cdots \left(\frac{\Psi^{(\ell)}}{1\cdot 2\cdots \ell}\right)^k,$$

其中求和号遍及方程

$$i + 2j + 3h + \cdots + \ell k = n$$

的所有非负整数组解，并且 $p = i + j + \cdots + k$。[Faà di Bruno, *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. I, p. 359]

中译者校记（底本原误）。 1904 年英译本写作“正整数解”，但 Faà di Bruno 求和中各重数允许为零；故此处应为非负整数解。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 2 章

隐函数、函数行列式、变量变换

I. 隐函数

20. 一个特殊情形

我们常常必须研究这样一些函数：我们并不知道它们的显式表达式，而它们是用尚未解出的方程给出的。譬如，考虑三个变量 x, y, z 之间的一个方程

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

在我们即将考察的若干条件下，这个方程定义了两个自变量 x 与 y 的一个函数。我们将证明下面的定理：

> 设 $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ 是满足方程 (1) 的一组值，并且假定函数 F 连同它的一阶导数，在这组值的邻域中都是连续的。[1] 如果导数 F_z 在 $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ 时不为零，那么存在一个而且只有一个自变量 x 与 y 的连续函数，它满足方程 (1)，并且当 x 与 y 分别取值 x_0 与 y_0 时取值 z_0。

导数 F_z 在 $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ 时不为零；为明确起见，假定它是正的。既然假定 F, F_x, F_y, F_z 在邻域中连续，我们取一个正数 l，使它小到足以保证这

[1] 在最近的一篇论文（*Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. XXXI, 1903, pp. 184–192）中，Goursat 用逐次逼近法证明，对于 F_x 与 F_y 完全不必作任何假设，甚至不必假设它们存在。他的证明不使用 F_x 与 F_y 的存在性。他的一般定理以及其证明概要见 §25 的一个脚注。——英译者

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

四个函数对于满足关系

$$|x - x_0| \le l, \qquad |y - y_0| \le l, \qquad |z - z_0| \le l \tag{2}$$

的一切 x, y, z 的值都是连续的，并且对于这些 x, y, z 的值，有

$$F_z(x, y, z) > P,$$

其中 P 是某个正数。再令 Q 是另一个正数，大于同一区域中其余两个导数 F_x, F_y 的绝对值。

让 x, y, z 取满足关系 (2) 的值。于是我们可以写出恒等式

$$\begin{aligned} F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0) = F(x,y,z) - F(x_0,y,z) \\ + F(x_0,y,z) - F(x_0,y_0,z) \\ + F(x_0,y_0,z) - F(x_0,y_0,z_0). \end{aligned}$$

对这些差逐个应用中值定理，并注意到 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$，便得

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = (x-x_0)F_x[x_0+\theta(x-x_0), y, z] \\ + (y-y_0)F_y[x_0, y_0+\theta'(y-y_0), z] \\ + (z-z_0)F_z[x_0, y_0, z_0+\theta''(z-z_0)]. \end{aligned}$$

所以 $F(x, y, z)$ 具有形式

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = A(x,y,z)(x-x_0) \\ + B(x,y,z)(y-y_0) + C(x,y,z)(z-z_0), \end{aligned} \tag{3}$$

其中函数 $A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)$ 对于满足 (2) 的一切 x, y, z 值满足

$$|A| < Q, \qquad |B| < Q, \qquad C > P.$$

现在令 ϵ 是小于 l 的正数，并令 η 是 l 与 $P\epsilon/2Q$ 两数中较小的一个。假设在方程 (1) 中，x 与 y 已给定为满足条件

$$|x - x_0| < \eta, \qquad |y - y_0| < \eta$$

的确定值，并且把 z 看作未知量，要求这个方程在 $z_0 - \epsilon$ 与 $z_0 + \epsilon$ 之间有多少个根。在表达式 (3) 中，就 $F(x, y, z)$ 而言，前两项之和的绝对值总小于 $2Q\eta$；另一方面，当用 $z_0 \pm \epsilon$ 代替 z 时，第三项的绝对值大于 $P\epsilon$。由 η 的选取方式可

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

知，最后这一项决定 F 的符号。因此 $F(x,y,z_0-\epsilon)<0$ 且 $F(x,y,z_0+\epsilon)>0$；于是方程 (1) 在 $z_0-\epsilon$ 与 $z_0+\epsilon$ 之间至少有一个根。再者，这个根是唯一的，因为导数 F_z 对 $z_0-\epsilon$ 与 $z_0+\epsilon$ 之间的一切 z 值都是正的。因此很清楚，方程 (1) 有且只有一个根，并且当 x 与 y 分别趋近 x_0 与 y_0 时，这个根趋近于 z_0。

我们来考察刚才证明其存在的这个根，究竟对于变量 x 与 y 的哪些值是有定义的。令 h 是 l 与 $Pl/2Q$ 两数中较小的一个；前面的推理表明，如果变量 x 与 y 的值满足不等式 $|x-x_0|<h, |y-y_0|<h$，则方程 (1) 将有且只有一个位于 z_0-l 与 z_0+l 之间的根。令 R 是以点 $M_0(x_0,y_0)$ 为中心、边长为 $2h$、边平行于坐标轴的正方形。只要点 (x,y) 位于这个正方形内部，方程 (1) 就唯一地确定 x 与 y 的一个函数，而这个函数保持在 z_0-l 与 z_0+l 之间。由上可知，这个函数在点 M_0 连续；对于 R 中任意另一个点 M_1 亦同样如此。因为由关于函数 F 及其导数所作的假设，在点 M_1 处导数 $F_z(x_1,y_1,z_1)$ 仍是正的，这是由于 $|x_1-x_0|<l, |y_1-y_0|<l, |z_1-z_0|<l$。因此，$M_1$ 处的情形与 M_0 处完全相同；从而所考虑的这个根对 $x=x_1$, $y=y_1$ 连续。

由于所考虑的根只在区域 R 的内部定义，到目前为止，我们只有一个隐函数的元素。为了在 R 以外定义这个函数，我们按如下方式逐步进行。令 L 是一条连续道路，起自点 (x_0,y_0)，终于 R 以外的一个点 (X,Y)。假定变量 x 与 y 同时变化，使点 (x,y) 描出道路 L。

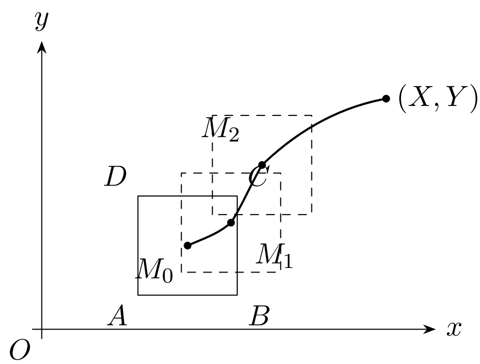


图 4

如果我们从 (x_0,y_0) 处 z 的值 z_0 出发，则只要仍在区域 R 内，这个根就有一个确定值。令 $M_1(x_1,y_1)$ 是道路上位于 R 内的一点，而 z_1 为 z 的对应值。由于定理的条件对 $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ 成立，所以在点 M_1 周围存在另一个区域 R_1，在其内部，那个当 $x=x_1$, $y=y_1$ 时化为 z_1 的根唯一确定。一般地，这个新区域 R_1 将有一些点位于 R 之外。于是取道路 L 上这样一个点 M_2，它在

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

R_1 内而在 R 外，我们便可重复同样的构造，并确定一个新的区域 R_2，在其内部方程 (1) 的解有定义；只要没有遇到一组 x, y, z 的值使 $F_z = 0$，这个过程就可以无限重复。眼下我们满足于这些陈述；在后面章节中我们会有机会详细处理某些类似问题。

21. 隐函数的导数

回到区域 R，以及方程 (1) 的解 $z = \phi(x, y)$；在这个区域中，它是两个变量 x 与 y 的连续函数。这个函数具有一阶导数。事实上，保持 y 固定，给 x 一个增量 Δx。于是 z 将有一个增量 Δz，并且由 §20 中得到的公式，有

$$\begin{aligned}&F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z)\\&\qquad = \Delta x\, F_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z) + \Delta z\, F_z(x, y, z+\theta'\Delta z) = 0.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)}{F_z(x, y, z+\theta'\Delta z)};$$

而当 Δx 趋近于零时，由于 z 是 x 的连续函数，Δz 也趋近于零。因此右端趋近于一个极限，z 关于 x 有导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

同样可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

注。若方程 $F = 0$ 对 z 是 m 次的，它就定义变量 x 与 y 的 m 个函数；而偏导数 $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$ 对变量 x, y 的每一组值也有 m 个值。若在右端把变量 z 换成所要求导的那个函数的值，则前面的公式就毫无歧义地给出这些导数。

例如，方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

对于满足不等式 $x^2 + y^2 < 1$ 的 x 与 y 值，定义了两个连续函数

$$+\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad 与 \qquad -\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

第一个函数的一阶偏导数是

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第二个函数的偏导数只需改变符号即可得到。若使用公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

并依次把 z 换成它的两个值，也会得到同样的结果。

22. 对曲面的应用

若把 x, y, z 解释为空间中一点的直角坐标，则任一形如

$$F(x, y, z)=0 \tag{4}$$

的方程表示一个曲面 S。令 (x_0, y_0, z_0) 是这个曲面上一点 A 的坐标。如果函数 F 连同它的一阶导数，在值 x_0, y_0, z_0 的邻域中连续，并且这三个导数在点 A 不同时为零，那么曲面 S 在 A 处有切平面。譬如，假设 F_z 在 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 时不为零。根据一般定理，可以认为在点 A 附近方程已对 z 解出，并把曲面的方程写为

$$z=\phi(x, y),$$

其中 $\phi(x, y)$ 是连续函数；于是 A 处切平面的方程是

$$Z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(Y-y_0).$$

把 $\partial z/\partial x$ 与 $\partial z/\partial y$ 换成上面求得的值，切平面的方程变为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0. \tag{5}$$

如果在 A 处 $F_z=0$，但 $F_x \neq 0$，我们就把 y 与 z 看作自变量，把 x 看作它们的函数。这样我们仍会得到同一个切平面方程 (5)；这一点从左端的对称性来看也是先验明显的。同样，平面曲线 $F(x, y)=0$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线是

$$(X-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+(Y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=0.$$

如果三个一阶导数在点 A 同时为零,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

前面的推理便不再适用。我们以后会看到（见 §54），在一般情形下，位于曲面上并通过 A 的各种曲线的切线形成一个锥面，而不是一个平面。

在隐函数一般定理的证明中，我们假定导数 F_z 不为零。几何直观解释了一般情况下这个条件的必要性。事实上，若 $F_z = 0$ 但 $F_x \neq 0$，切平面便平行于 z 轴；而一条平行于 z 轴、且靠近直线 $x = x_0, y = y_0$ 的直线，一般会在切点附近与曲面相交于两点。因此，一般说来，当 x 与 y 分别趋近于 x_0 与 y_0 时，方程 (4) 会有两个都趋近于 z_0 的根。

例如，用直线 $y = 0, x = 1 + \epsilon$ 去截球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$，我们得到 z 的两个值，它们都随 ϵ 趋近于零；当 ϵ 为负时它们为实数，当 ϵ 为正时它们为虚数。

23.　逐次导数

在一阶导数公式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

中，可把右端看作复合函数，其中 z 是辅助函数。这样就可以用复合函数的法则逐个计算逐次导数。当然，这些偏导数的存在性依赖于 $F(x, y, z)$ 的逐次偏导数的存在性。

下面的命题给出确定这些导数的一个较简单方法。

> 如果自变量的若干函数满足一个关系 $F = 0$，则它们的导数满足这样一个方程：按复合函数求导法则对左端求导，并令所得导数等于零。

这很清楚，因为如果当其中出现的变量换成自变量的函数后 F 恒等地为零，那么其导数也恒等地为零。即使满足关系 $F = 0$ 的函数依赖于若干自变量，同一定理仍然成立。

现在假设我们要计算由关系

$$F(x, y) = 0$$

定义的单个自变量 x 的隐函数 y 的逐次导数。我们依次得到

$$
\begin{aligned}
&F_x + F_y y' = 0,\\
&F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}y'^2 + F_y y'' = 0,\\
&F_{xxx} + 3F_{xxy}y' + 3F_{xyy}y'^2 + 3F_{xy}y'' + F_{yyy}y'^3 + 3F_{yy}y'y'' + F_y y''' = 0,\\
&\qquad\qquad\cdots,
\end{aligned}
$$

由此可以逐次算出 $y', y'', y''', \ldots$。

例。给定函数 $y = f(x)$，反过来可以把 y 看作自变量，并把 x 看作由方程 $y = f(x)$ 定义的 y 的隐函数。如果导数 $f'(x)$ 对值 x_0 不为零，其中 $y_0 = f(x_0)$，那么由上面证明的一般定理，存在一个而且只有一个 y 的函数，它满足关系 $y = f(x)$，并且当 $y = y_0$ 时取值 x_0。这个函数叫作函数 $f(x)$ 的反函数。为了计算这个函数的逐次导数 $x_y, x_y^2, x_y^3, \ldots$，只需把 y 看作自变量来求导，得到

$$
\begin{aligned}
&1 = f'(x)x_y,\\
&0 = f''(x)(x_y)^2 + f'(x)x_y^2,\\
&0 = f'''(x)(x_y)^3 + 3f''(x)x_y x_y^2 + f'(x)x_y^3,\\
&\qquad\qquad\cdots,
\end{aligned}
$$

于是

$$
x_y = \frac{1}{f'(x)}, \qquad x_y^2 = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},
$$

$$
x_y^3 = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}, \qquad \cdots .
$$

应当注意，如果把 x_y 与 $f'(x)$、x_y^2 与 $f''(x)$、x_y^3 与 $f'''(x)$ 等等相互交换，这些公式并不改变；因为两个函数 $y = f(x)$ 与 $x = \phi(y)$ 之间的关系显然是互反的。

作为这些公式的一个应用，我们来确定满足方程

$$
y'y''' - 3y''^2 = 0
$$

的一切函数 $y = f(x)$。把 y 作为自变量、x 作为函数，则这个方程变成

$$
x_y^3 = 0.
$$

而三阶导数为零的函数只能是至多二次的多项式。因此 x 必须具有形式

$$
x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3,
$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 C_1, C_2, C_3 是三个任意常数。解这个方程以求 y，便见满足给定方程的函数 $y = f(x)$ 只能具有形式

$$y = a \pm \sqrt{bx + c},$$

其中 a, b, c 是三个任意常数。这个方程表示一条轴平行于 x 轴的抛物线。

24.　偏导数

现在考虑由方程

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

定义的二元隐函数。一阶偏导数如前所见由方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

给出。为了确定二阶偏导数，只需把两个方程 (7) 再分别关于 x 和 y 求导。不过这样只得到三个新方程，因为第一个方程关于 y 的导数与第二个方程关于 x 的导数相同。新方程如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

三阶和更高阶导数可以用类似方式求出。

利用全微分，可以同时求出某一给定阶数的全部偏导数。这依赖于下述定理:

> 如果任意个自变量 $x, y, z, \ldots$ 的若干函数 $u, v, w, \ldots$ 满足一个关系 $F = 0$，则它们的全微分满足关系 $dF = 0$；这个关系是把 F 中出现的一切变量都仿佛看成自变量而形成 F 的全微分得到的。

为了证明这一点，设 $F(u, v, w) = 0$ 是自变量 x, y, z, t 的三个函数 u, v, w

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

之间的给定关系。u, v, w 的一阶偏导数满足四个方程

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=0.$$

将这些方程分别乘以 dx, dy, dz, dt 并相加，便得

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=dF=0.$$

这再一次显示出微分记号的优点，因为前一个方程不依赖于自变量的选择，也不依赖于自变量的个数。为了求二阶全微分之间的关系，只需把一般定理应用于方程 $dF=0$，把它看成 u, v, w, du, dv, dw 等之间的方程。那些被选作自变量的变量，其高于一阶的微分当然必须换成零。

把这个定理应用于计算方程 (6) 所定义的隐函数的逐次全微分，其中 x 与 y 看作自变量。我们得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0,$$
$$\cdots,$$

前两个方程可用来代替五个方程 (7) 与 (8)；从 dz 的表达式可以求两个一阶导数，从 d^2z 的表达式可以求三个二阶导数，等等。例如考虑方程

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=1.$$

两次求微分给出

$$Ax\,dx+A'y\,dy+A''z\,dz=0,$$

$$A\,dx^2+A'\,dy^2+A''\,dz^2+A''z\,d^2z=0,$$

因而

$$dz=-\frac{Ax\,dx+A'y\,dy}{A''z};$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

把这个 dz 的值代入第二个方程，得到

$$d^2z = -\frac{1}{A''^2z^3}\big[A(Ax^2 + A''z^2)\,dx^2 + 2AA'xy\,dx\,dy + A'(A'y^2 + A''z^2)\,dy^2\big].$$

使用 Monge 的记号，便有

$$p = -\frac{Ax}{A''z}, \qquad q = -\frac{A'y}{A''z},$$

$$r = -\frac{A(Ax^2 + A''z^2)}{A''^2z^3}, \qquad s = -\frac{AA'xy}{A''^2z^3}, \qquad t = -\frac{A'(A'y^2 + A''z^2)}{A''^2z^3}.$$

这种方法显然是一般的，不论自变量的个数是多少，也不论希望计算的偏导数的阶数是多少。

例。设 $z = f(x, y)$ 是 x 与 y 的函数。我们来计算一阶与二阶微分 dx 与 d^2x，其中把 y 与 z 看作自变量，把 x 看作它们的隐函数。首先有

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

既然现在 y 与 z 是自变量，就必须令

$$d^2y = d^2z = 0,$$

因而第二次求微分给出

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x.$$

用 Monge 记号，以 p, q, r, s, t 表示 $f(x, y)$ 的导数，这些方程可写作

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad 0 = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x.$$

由第一个方程得

$$dx = \frac{dz - q\,dy}{p},$$

把这个 dx 的值代入第二个方程，得到

$$d^2x = -\frac{1}{p^3}\big[r\,dz^2 + 2(ps - qr)\,dy\,dz + (q^2r - 2pqs + p^2t)\,dy^2\big].$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，把 x 看作 y 与 z 的函数时，它的一阶与二阶偏导数有如下值：

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{q}{p},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{r}{p^3}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \frac{qr - ps}{p^3}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2pqs - p^2 t - q^2 r}{p^3}.$$

作为这些公式的一个应用，求满足方程

$$q^2 r + p^2 t = 2pqs$$

的一切函数 $f(x, y)$。如果在方程 $z = f(x, y)$ 中，把 x 看作两个自变量 y 与 z 的函数，则给定方程化为 $x_y^2 = 0$。这意味着 x_y 与 y 无关；于是 $x_y = \phi(z)$，其中 $\phi(z)$ 是 z 的任意函数。这又可写成

$$\frac{\partial}{\partial y}[x - y\phi(z)] = 0,$$

这说明 $x - y\phi(z)$ 与 y 无关。因此可写为

$$x = y\phi(z) + \psi(z),$$

其中 $\psi(z)$ 是 z 的另一个任意函数。由此很清楚，除去那些 f_x 为零的函数外，所有满足给定方程的函数 $z = f(x, y)$ 都可由对 z 解出最后这个方程得到。这个方程表示由一条始终平行于 xy 平面的直线生成的曲面。

25. 一般定理

考虑 n 个方程所成的系统

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ \qquad \cdots, \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \end{cases} \tag{E}$$

它们联系着 $n + p$ 个变量 $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_p$。

假设这些方程在取值

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0, \qquad u_1 = u_1^0, \ldots, u_n = u_n^0$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

时成立；又假设函数 F_i 在这组值的邻域中连续，并且有连续的一阶偏导数；最后，假设行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

在

$$x_i = x_i^0, \qquad u_k = u_k^0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

时不为零。在这些条件下，存在一个而且只有一个连续函数系统

$$u_1 = \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad \ldots \qquad , u_n = \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

它满足方程 (E)，并且当 $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$ 时分别化为 $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$。[2]

行列式 Δ 叫作 n 个函数 $F_1, F_2, \ldots, F_n$ 关于 n 个变量 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 的雅可比行列式（Jacobian，亦称函数行列式）。[3]它用记号

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

[2]在上面引用过的论文中（见 §20 的脚注），Goursat 证明了，在完全不对函数 F_i 关于 x 的导数 $\partial F_i/\partial x_j$ 作任何假设时，也可得到同样结论。除此之外，假设与上面陈述完全相同。不过应当注意，如果不对 $\partial F_i/\partial x_j$ 作某些假设，那么后来关于函数 ϕ 的导数存在性的定理便不能推出。所给证明基于如下引理：令 $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ 为 $n+p$ 个变量 x_i 与 u_k 的 n 个函数；这些函数连同 n^2 个偏导数 $\partial f_i/\partial u_k$，在 $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_p = 0, u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$ 附近连续。若 n 个函数 f_i 以及 n^2 个导数 $\partial f_i/\partial u_k$ 在这一组值处全为零，则 n 个方程 $u_1 = f_1, u_2 = f_2, \ldots, u_n = f_n$ 有且只有一个形如 $u_1 = \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), u_2 = \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, u_n = \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ 的解系，其中 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 是 p 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ 的连续函数，并且当这些变量全趋于零时它们也全趋于零。这个引理通过函数序列 $u_i^{(m)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1^{(m-1)}, u_2^{(m-1)}, \ldots, u_n^{(m-1)})$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 来证明，其中 $u_i^{(0)} = 0$。证明显示，如此定义的函数序列 $u_i^{(m)}$ 趋于一个极限函数 U_i，它 (1) 满足给定方程，(2) 构成唯一解。从引理过渡到定理，只需把方程 (E) 容易地变换成与引理相似的形式。——英译者

[3]Jacobi, *Crelle's Journal*, Vol. XXII.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

表示。

我们先在一个特殊情形中证明这个定理，即三个自变量 x, y, z 与两个未知量 u, v 中的两个方程系统：

$$F_1(x, y, z, u, v) = 0, \tag{9}$$

$$F_2(x, y, z, u, v) = 0. \tag{10}$$

按假设，这些方程在 $x = x_0, y = y_0, z = z_0, u = u_0, v = v_0$ 时成立，并且行列式

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}$$

对于这组值不为零。因此，两个导数 $\partial F_1/\partial v, \partial F_2/\partial v$ 中至少有一个对这些值不为零。为明确起见，假设 $\partial F_1/\partial v$ 不为零。根据上面对单个方程已经证明的定理，关系 (9) 定义了变量 x, y, z, u 的一个函数 v，

$$v = f(x, y, z, u),$$

它在 $x = x_0, y = y_0, z = z_0, u = u_0$ 时化为 v_0。在方程 (10) 中用这个函数替换 v，得到 x, y, z, u 之间的一个方程

$$\Phi(x, y, z, u) = F_2[x, y, z, u, f(x, y, z, u)] = 0,$$

它在 $x = x_0, y = y_0, z = z_0, u = u_0$ 时成立。现在

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial F_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u};$$

而由方程 (9)，

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} = 0;$$

于是把 $\partial f/\partial u$ 的这个值代入 $\partial \Phi/\partial u$ 的表达式，得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial v}}.$$

显然，这个导数在值 x_0, y_0, z_0, u_0 时不为零。因此，方程 $\Phi = 0$ 在把 u 换成某个连续函数 $u = \phi(x, y, z)$ 时得到满足；并且当 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ 时，这个

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

函数等于 u_0。再在 $f(x,y,z,u)$ 中把 u 换成 $\phi(x,y,z)$，我们也得到 v 的某个连续函数。于是命题对两个方程的系统已经证明。

可以像在 §21 中一样证明，这些函数具有一阶偏导数。保持 y 与 z 不变，给 x 一个增量 Δx，并令 Δu 与 Δv 是函数 u 与 v 的对应增量。于是方程 (9) 与 (10) 给出方程

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)=0,$$

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)=0,$$

其中 $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'',\eta,\eta',\eta''$ 随 $\Delta x,\Delta u,\Delta v$ 趋于零而趋于零。因此

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=-\frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)}.$$

当 Δx 趋于零时，Δu 与 Δv 也趋于零；因此 $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'',\eta,\eta',\eta''$ 同时趋于零。于是比值 $\Delta u/\Delta x$ 趋于一个极限；也就是说，u 关于 x 有导数：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{\partial F_2}{\partial v}-\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial F_2}{\partial v}-\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial F_2}{\partial u}}.$$

同样可知，比值 $\Delta v/\Delta x$ 趋于一个有限极限 $\partial v/\partial x$，它由类似公式给出。在实际计算中，这些导数可由两个方程

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

算出；关于 y 与 z 的偏导数可用类似方式求出。

为了证明一般定理，只需说明：如果命题对 $(n-1)$ 个方程的系统成立，那么它也对 n 个方程的系统成立。由于按假设函数行列式 Δ 对变量的初始值不为零，所以与最后一行各元素相应的一级余子式（即 $(n-1)$ 阶子式）中至少有一个对这些值不为零。为明确起见，假设不为零的是对应于 $\partial F_n/\partial u_n$ 的余子式。这个余子式正是

$$\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_{n-1})}{D(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})};$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

既然假定定理对 $(n-1)$ 个方程的系统成立，显然可以把方程 (E) 的前 $(n-1)$ 个解成

$$u_1=\phi_1(x_1,x_2,\ldots,x_p;u_n),\quad \ldots,\quad u_{n-1}=\phi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_p;u_n),$$

其中函数 ϕ_i 是连续的。于是，在方程 (E) 的最后一个中，用函数 $\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}$ 代替 $u_1,\ldots,u_{n-1}$，便得到一个确定 u_n 的新方程

$$\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_p;u_n)=F_n(x_1,x_2,\ldots,x_p;\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n-1},u_n)=0.$$

我们只剩下说明，导数 $\partial\Phi/\partial u_n$ 对给定值 $x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0,u_n^0$ 不为零；若确是如此，就可把最后这个方程解成

$$u_n=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_p),$$

其中 ψ 连续。然后把这个 u_n 的值代入 $\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}$，也会得到 $u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}$ 的某些连续函数。

为了说明所说的导数不为零，考虑方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}=\frac{\partial F_n}{\partial u_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial u_n}+\cdots+\frac{\partial F_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial\phi_{n-1}}{\partial u_n}+\frac{\partial F_n}{\partial u_n}. \tag{11}$$

导数 $\partial\phi_1/\partial u_n,\partial\phi_2/\partial u_n,\ldots,\partial\phi_{n-1}/\partial u_n$ 由 $(n-1)$ 个方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial u_n}+\cdots+\dfrac{\partial F_1}{\partial u_{n-1}}\dfrac{\partial\phi_{n-1}}{\partial u_n}+\dfrac{\partial F_1}{\partial u_n}=0,\\ \qquad\qquad\cdots,\\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial u_n}+\cdots+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial u_{n-1}}\dfrac{\partial\phi_{n-1}}{\partial u_n}+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n}=0\end{cases} \tag{12}$$

给出；我们可把方程 (11) 与 (12) 看作关于 $\partial\phi_1/\partial u_n,\ldots,\partial\phi_{n-1}/\partial u_n,\partial\Phi/\partial u_n$ 的 n 个线性方程，由此得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_{n-1})}{D(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})}=\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{D(u_1,u_2,\ldots,u_n)}.$$

于是导数 $\partial\Phi/\partial u_n$ 对初始值不为零，从而一般定理得证。

由若干方程定义的隐函数，其逐次导数可用与单个方程情形类似的方法来计算。当有若干自变量时，形成全微分是有利的；从全微分可求出同阶的偏导

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

数。考虑两个函数 u 与 v 的情形，它们是三个变量 x, y, z 的函数，并由两个方程

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, u, v) = 0$$

定义。一阶全微分 du 与 dv 由两个方程给出：

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Phi}{\partial u}du + \frac{\partial \Phi}{\partial v}dv = 0.$$

同样，二阶全微分 d^2u 与 d^2v 由方程

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial F}{\partial v}dv\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u}d^2u + \frac{\partial F}{\partial v}d^2v = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial v}dv\right)^{(2)} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}d^2u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}d^2v = 0,$$

给出，如此等等。在给出 d^nu 与 d^nv 的方程中，这些微分的系数行列式，对所有 n 值都等于雅可比行列式 $D(F, \Phi)/D(u, v)$；按假设，它不为零。

26. 反演

设 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 是 n 个自变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的 n 个函数，使得雅可比行列式

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

不恒等于零。n 个方程

$$\begin{cases} u_1 = \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u_2 = \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \\ u_n = \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{13}$$

反过来把 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 定义为 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 的函数。事实上，任取一组使雅可比行列式不为零的值 $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$，并把 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 的对应值记为 $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$；根据一般定理，存在一个函数系统

$$x_1 = \psi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

$$x_2 = \psi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

$$\cdots,$$

$$x_n = \psi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

它满足 (13)，并且当 $u_1 = u_1^0, \ldots, u_n = u_n^0$ 时分别取值 $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$。这些函数叫作函数 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 的反函数，而实际确定它们的过程叫作反演。

为了计算这些反函数的导数，只需应用一般法则。例如，在两个函数

$$u = f(x, y), \qquad v = \phi(x, y)$$

的情形中，如果把 u 与 v 看作自变量，把 x 与 y 看作反函数，就有两个方程

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \qquad dv = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy,$$

因而

$$dx = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial y}du - \dfrac{\partial f}{\partial y}dv}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}, \qquad dy = \frac{-\dfrac{\partial \phi}{\partial x}du + \dfrac{\partial f}{\partial x}dv}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}.$$

于是最后得到公式

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}.$$

27.　空间曲线的切线

考虑由两个方程

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

表示的曲线 C；并令 x_0, y_0, z_0 为这条曲线上一点 M_0 的坐标。假设三个雅可比行列式

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

中至少有一个，当 x, y, z 分别换成 x_0, y_0, z_0 时不为零。为明确起见，假设 $D(F_1, F_2)/D(y, z)$ 在点 M_0 不为零。于是方程 (14) 可解成

$$y = \phi(x), \qquad z = \psi(x),$$

其中 ϕ 与 ψ 是 x 的连续函数，当 $x = x_0$ 时分别化为 y_0 与 z_0。因此曲线 C 在点 M_0 处的切线由两个方程表示为

$$\frac{X - x_0}{1} = \frac{Y - y_0}{\phi'(x_0)} = \frac{Z - z_0}{\psi'(x_0)},$$

其中导数 $\phi'(x)$ 与 $\psi'(x)$ 可由两个方程

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\phi'(x) + \frac{\partial F_1}{\partial z}\psi'(x) = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\phi'(x) + \frac{\partial F_2}{\partial z}\psi'(x) = 0$$

求得。

在这两个方程中令 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$，并分别用 $(Y - y_0)/(X - x_0)$ 与 $(Z - z_0)/(X - x_0)$ 代替 $\phi'(x_0)$ 与 $\psi'(x_0)$。于是切线方程变为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0 (Z - z_0) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) + \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0 (Z - z_0) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

或者

$$\frac{X - x_0}{\left[\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right]_0} = \frac{Y - y_0}{\left[\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}\right]_0} = \frac{Z - z_0}{\left[\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right]_0}.$$

这个结果的几何解释很简单。两个方程 (14) 分别表示两个曲面 S_1 与 S_2，而 C 是它们的交线。方程 (15) 表示这两个曲面在点 M_0 处的两个切平面；而 C 的切线就是这两个平面的交线。

当上面三个雅可比行列式在点 M_0 全都为零时，这些公式便成为虚设。在这种情形下，两个方程 (15) 化为一个方程，曲面 S_1 与 S_2 在点 M_0 相切。正如我们将要看到的，这两个曲面的交线一般会由通过点 M_0 的若干不同分支组成。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

II. 函数行列式

28. 基本性质

我们刚才已经看到，函数行列式在隐函数理论中起着多么重要的作用。前面所有证明都明白地预设：对于所假定的初始值系统，某个雅可比行列式不为零。略去雅可比行列式只在变量的某些特殊值处为零的情形，我们现在来考察另一个非常重要的情形，即雅可比行列式恒等地为零的情形。下面的定理是基本的。

设 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 是 n 个自变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的 n 个函数。为了使这 n 个函数之间存在一个关系

$$\Pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

其中不显含任何变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，其充要条件是函数行列式

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

恒等地为零。

首先，这个条件是必要的。事实上，如果在 n 个函数 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 之间存在这样一个关系

$$\Pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

那么按次序对各个 x 求导，就必须有下列 n 个方程：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0.$$

而且，由于我们不可能同时有

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \cdots = \frac{\partial \Pi}{\partial u_n} = 0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

否则所考察的关系就会化为一个平凡恒等式，所以显然这些系数的行列式必须为零；而这个行列式正是定理中的雅可比行列式。[4]

这个条件也是充分的。为证明这一点，我们将用到若干从一般定理立即推出的事实。

1) 设 u, v, w 是三个自变量 x, y, z 的三个函数，并且函数行列式 $D(u, v, w)/D(x, y, z)$ 不为零。那么在全微分 du, dv, dw 之间，除非 $\lambda = \mu = \nu = 0$，不可能存在形如

$$\lambda\, du + \mu\, dv + \nu\, dw = 0$$

的关系。事实上，将上式中 dx, dy, dz 的系数分别等于零，得到关于 λ, μ, ν 的三个方程；这些方程除 $\lambda = \mu = \nu = 0$ 外没有其他解。

2) 设 ω, u, v, w 是三个自变量 x, y, z 的四个函数，并且行列式 $D(u, v, w)/D(x, y, z)$ 不为零。于是我们可以反过来把 x, y, z 表示为 u, v, w 的函数；把这些 x, y, z 的值代入 ω，便得到三个变量 u, v, w 的一个函数

$$\omega = \Phi(u, v, w).$$

如果我们用任何方法得到一个形如

$$d\omega = P\, du + Q\, dv + R\, dw \tag{16}$$

的关系，它联系的是相对于自变量 x, y, z 所取的全微分 $d\omega, du, dv, dw$，那么系数 P, Q, R 分别等于 $\Phi(u, v, w)$ 的三个一阶偏导数：

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \qquad R = \frac{\partial \Phi}{\partial w}.$$

因为，按复合函数全微分的法则（§16），我们有

$$d\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \Phi}{\partial w}\, dw;$$

并且在 $d\omega, du, dv, dw$ 之间不可能存在另一个形如 (16) 的关系，因为那会导出一个形如

$$\lambda\, du + \mu\, dv + \nu\, dw = 0$$

[4] 正如 Osgood 教授指出的，这里的推理假定了偏导数 $\partial\Pi/\partial u_1, \partial\Pi/\partial u_2, \ldots, \partial\Pi/\partial u_n$ 对任何使 $\Pi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ 为零的值系统，都不同时为零。当关系 $\Pi = 0$ 可解出变量 u 中的一个时，这个假定当然是正当的。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的关系，其中 λ, μ, ν 不全为零。我们刚才已经看到，这是不可能的。

显然，这些说明适用于任意个自变量的一般情形。

为了明确起见，现在考虑四个自变量的四个函数所组成的系统

$$\begin{cases} X = F_1(x, y, z, t), \\ Y = F_2(x, y, z, t), \\ Z = F_3(x, y, z, t), \\ T = F_4(x, y, z, t), \end{cases} \tag{17}$$

其中雅可比行列式 $D(F_1, F_2, F_3, F_4)/D(x, y, z, t)$ 按假设恒等地为零；并先假设它的某一个一级余子式 (这里即三阶子式), 例如 $D(F_1, F_2, F_3)/D(x, y, z)$, 不为零。于是可以把方程 (17) 中前三个看作已解出 x, y, z，把它们表示为 X, Y, Z, t 的函数；把这些 x, y, z 的值代入方程 (17) 中最后一个，就得到 T 作为 X, Y, Z, t 的函数：

$$T = \Phi(X, Y, Z, t). \tag{18}$$

我们要证明这个函数 Φ 不含变量 t，也就是说 $\partial\Phi/\partial t$ 恒等地为零。为此，考虑行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} & dX \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & dY \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} & dZ \\ \dfrac{\partial F_4}{\partial x} & \dfrac{\partial F_4}{\partial y} & \dfrac{\partial F_4}{\partial z} & dT \end{vmatrix}.$$

如果在这个行列式中，用

$$dX = \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,dt$$

以及类似的 dY, dZ, dT 的值来代换，并把行列式按 dx, dy, dz, dt 展开，则这四个微分的系数全都为零；前三个是具有两列相同的行列式，而最后一个正是函数行列式。因此 $\Delta = 0$。另一方面，如果按最后一列的元素展开这个行列式，则 dT 的系数不为零，于是得到一个形如

$$dT = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的关系。由上面的说明，右端中 dt 的系数等于 $\partial\Phi/\partial t$。但是这个右端不含 dt，所以 $\partial\Phi/\partial t = 0$。因此关系 (18) 具有形式

$$T = \Phi(X, Y, Z),$$

这就证明了所陈述的定理。

还可以证明，在四个函数 X, Y, Z, T 之间，不存在另一个与刚才所得关系不同并且不含 x, y, z, t 的关系。事实上，如果存在这样的关系，并且在其中用 $\Phi(X, Y, Z)$ 代替 T，就会得到一个形如 $\Pi(X, Y, Z) = 0$ 的 X, Y, Z 之间的关系；这与 $D(X, Y, Z)/D(x, y, z)$ 不为零的假设矛盾。

现在转到雅可比行列式的所有一级余子式（三阶子式）全都恒等为零，但至少有一个二级余子式（二阶子式），例如 $D(F_1, F_2)/D(x, y)$，不为零的情形。于是方程 (17) 的前两个可以解出 x 与 y，把它们表示为 X, Y, z, t 的函数；而后两个方程变为

$$Z = \Phi_1(X, Y, z, t), \qquad T = \Phi_2(X, Y, z, t).$$

另一方面，和前面一样可以证明行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & dX \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & dY \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & dZ \end{vmatrix}$$

恒等地消失；按最后一列的元素展开它，得到一个形如

$$dZ = P\,dX + Q\,dY$$

的关系。由此推出

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0.$$

同样可证

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = 0;$$

所以在这种情形下，四个函数 X, Y, Z, T 之间存在两个不同的关系，形式为

$$Z = \Phi_1(X, Y), \qquad T = \Phi_2(X, Y).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

不过，不存在不同于这两个的第三个关系；因为如果有，就可以得到 X 与 Y 之间的一个关系，而这与 $D(X,Y)/D(x,y)$ 不为零的假设相矛盾。

最后，如果雅可比行列式的所有二级余子式（二阶子式）都是零，但四个函数 X,Y,Z,T 并非全为常数，那么其中三个是第四个的函数。以上推理显然是一般的。若 n 个自变量 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的 n 个函数 $F_1,F_2,\ldots,F_n$ 的雅可比行列式，连同它的所有 $(n-r+1)$ 阶子式，都恒等地为零，但至少有一个 $(n-r)$ 阶子式不为零，那么在这 n 个函数之间恰有 r 个不同的关系；并且其中某 r 个可以用余下的 $(n-r)$ 个表示出来，而在后者之间不存在任何关系。

下面命题的证明与上面的证明类似，留给读者。

> n 个 $n+p$ 个自变量的函数之间存在一个不含这些自变量的关系, 其充要条件是: 这 n 个函数关于任意 n 个自变量的每一个雅可比行列式都恒等地为零。

特别地，两个函数

$$F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

互为函数的充要条件是，对应的偏导数 $\partial F_1/\partial x_i$ 与 $\partial F_2/\partial x_i$ 成比例。

注。前述定理中的函数 $F_1,F_2,\ldots,F_n$ 除了 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 之外，还可以含有某些其他变量 $y_1,y_2,\ldots,y_m$。如果雅可比行列式 $D(F_1,F_2,\ldots,F_n)/D(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 为零，则函数 $F_1,F_2,\ldots,F_n$ 由一个或多个关系相联系；这些关系不显含变量 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，但可以含有其他变量 $y_1,y_2,\ldots,y_m$。

应用。前述定理十分重要。例如，对数的基本性质可由它证明，而不必使用对数的算术定义。事实上，在积分学开头证明了这样一个函数存在：它对变量的一切正值都有定义，当 $x=1$ 时为零，并且其导数为 $1/x$。设这个函数为 $f(x)$，并令

$$u=f(x)+f(y), \qquad v=xy.$$

于是

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix}=0.$$

因此存在一个形如

$$f(x)+f(y)=\phi(xy)$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的关系；为了确定 ϕ，只需令 $y=1$，这给出 $f(x)=\phi(x)$。于是，由于 x 是任意的，

$$f(x)+f(y)=f(xy).$$

显然，如果对数的基本性质不是在积分学以前已经为人所知，上述定义本来也可能导致这些性质的发现。

作为另一个应用，考虑 n 个未知量 $u_1,u_2,\dots,u_n$ 的 n 个方程组成的系统

$$\begin{cases} F_1(u_1,u_2,\dots,u_n)=H_1, \\ F_2(u_1,u_2,\dots,u_n)=H_2, \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots, \\ F_n(u_1,u_2,\dots,u_n)=H_n, \end{cases} \tag{19}$$

其中 $H_1,H_2,\dots,H_n$ 是常数，或者是某些其他变量 $x_1,x_2,\dots,x_m$ 的函数；这些变量也可以出现在函数 F_i 中。如果雅可比行列式

$$\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_n)}{D(u_1,u_2,\dots,u_n)}$$

恒等地为零，则在 n 个函数 F_i 之间存在若干个，例如 $n-k$ 个，不同的关系，形式为

$$F_{k+1}=\Pi_1(F_1,\dots,F_k),\dots,F_n=\Pi_{n-k}(F_1,\dots,F_k).$$

为了使方程 (19) 相容，显然必须有

$$H_{k+1}=\Pi_1(H_1,\dots,H_k),\dots,H_n=\Pi_{n-k}(H_1,\dots,H_k),$$

并且，如果这确实成立，则 n 个方程 (19) 化为 k 个不同的方程。于是我们得到的情形与线性方程组的讨论相同。

29. 雅可比行列式的另一性质

n 个变量的 n 个函数所成系统的雅可比行列式，具有与一元函数导数相类似的性质。因此，前一节的定理可以看作 §8 定理的一个推广。

函数的函数的求导公式可以推广到雅可比行列式。设 $F_1,F_2,\dots,F_n$ 是变量 $u_1,u_2,\dots,u_n$ 的 n 个函数，并假设 $u_1,u_2,\dots,u_n$ 本身又是 n 个自变量 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的函数。那么公式

$$\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_n)}{D(u_1,u_2,\dots,u_n)}\cdot\frac{D(u_1,u_2,\dots,u_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

立即由行列式乘法法则和复合函数求导公式推出。事实上，写下两个函数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

其中第二个行列式中行与列已经互换。乘积的第一个元素等于

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1};$$

也就是说，等于 $\partial F_1/\partial x_1$；其他元素也类似。

30. 黑塞行列式

设 $f(x, y, z)$ 是三个变量 x, y, z 的函数。于是三个一阶偏导数 $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$ 的函数行列式

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

叫作 $f(x, y, z)$ 的*黑塞行列式（Hessian）*。n 个变量的函数的黑塞行列式也用同样的方式定义，并且起着类似于一元函数二阶导数的作用。我们将证明这个行列式的一个显著的不变性质。假设自变量经过线性代换

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{cases} \tag{19'}$$

其中 X, Y, Z 是变换后的变量，$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma''$ 是常数，并且代换的行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

不为零。这个代换把函数 $f(x,y,z)$ 变为三个变量 X,Y,Z 的一个新函数 $F(X,Y,Z)$。设 $H(X,Y,Z)$ 是这个新函数的黑塞行列式。我们要证明恒等式

$$H(X,Y,Z)=\Delta^2 h(x,y,z),$$

其中 $h(x,y,z)$ 中的 x,y,z 应用 (19′) 的表达式代换。事实上，我们有

$$H=\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X},\frac{\partial F}{\partial Y},\frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(X,Y,Z)}=\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X},\frac{\partial F}{\partial Y},\frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(x,y,z)}\cdot\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)};$$

并且，如果我们暂时把 $\partial f/\partial x,\partial f/\partial y,\partial f/\partial z$ 看作辅助变量，就可以写成

$$H=\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X},\frac{\partial F}{\partial Y},\frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)}\cdot\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{D(x,y,z)}\cdot\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}.$$

但是由关系 $F(X,Y,Z)=f(x,y,z)$，我们得到

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y}=\beta\frac{\partial f}{\partial x}+\beta'\frac{\partial f}{\partial y}+\beta''\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z}=\gamma\frac{\partial f}{\partial x}+\gamma'\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma''\frac{\partial f}{\partial z},$$

由此

$$\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X},\frac{\partial F}{\partial Y},\frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' & \alpha''\\ \beta & \beta' & \beta''\\ \gamma & \gamma' & \gamma''\end{vmatrix}=\Delta;$$

所以最终有

$$H=\Delta h\,\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}=\Delta^2 h.$$

显然，这个定理是一般的。

现在考虑黑塞行列式这一性质的一个应用。设

$$f(x,y)=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$$

是一个给定的二元三次型，其系数 a, b, c, d 是任意常数。于是，略去一个数值因子，有

$$\begin{aligned} h &= \begin{vmatrix} ax+by & bx+cy \\ bx+cy & cx+dy \end{vmatrix} \\ &= (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2, \end{aligned}$$

可见黑塞行列式是一个二元二次型。首先，排除黑塞行列式是一个完全平方的情形后，可以把它写成两个线性因子的乘积:

$$h = (mx+ny)(px+qy).$$

如果现在施行线性代换

$$mx+ny = X, \qquad px+qy = Y,$$

那么型 $f(x,y)$ 变成一个新型

$$F(X,Y) = AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3,$$

它的黑塞行列式为

$$H(X,Y) = (AC-B^2)X^2 + (AD-BC)XY + (BD-C^2)Y^2.$$

按前面证明的不变性质，这个黑塞行列式必须化为形如 KXY 的乘积。因此系数 A, B, C, D 必须满足关系

$$B^2 - AC = 0, \qquad BD - C^2 = 0.$$

如果两个系数 B, C 中有一个不为零，那么另一个也必不为零，并且有

$$A = \frac{B^2}{C}, \qquad D = \frac{C^2}{B},$$

$$\begin{aligned} F(X,Y) &= \frac{1}{BC}\left(B^3X^3 + 3B^2CX^2Y + 3BC^2XY^2 + C^3Y^3\right) \\ &= \frac{(BX+CY)^3}{BC}. \end{aligned}$$

于是 $F(X,Y)$，从而 $f(x,y)$，将是一个完全立方。排除这个特殊情形后，显然必有 $B = C = 0$；而多项式 $F(X,Y)$ 将具有典范形式

$$AX^3 + DY^3.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，把型 $f(x,y)$ 化为典范形式，只涉及一个二次方程的求解；这个二次方程由令给定型的黑塞行列式等于零得到。典范变量 X, Y 正是黑塞行列式的两个因子。

同样不难看出，当黑塞行列式是一个完全平方时，型 $f(x,y)$ 可化为形式 AX^3+BX^2Y。当黑塞行列式恒等地为零时，$f(x,y)$ 是一个完全立方：

$$f(x,y)=(\alpha x+\beta y)^3.$$

III. 变换

在数学分析中出现的许多问题里，常常需要改变自变量。因此必须能够把关于旧变量的导数用关于新变量的导数表示出来。在反演问题中，我们已经考虑过这种问题的一个情形。现在从一般观点来考察这个问题，并处理最常遇到的若干问题。

31. 问题 I

设 y 是自变量 x 的函数，又设 t 是一个新的自变量，与 x 由关系 $x=\phi(t)$ 联系起来。要求把 y 对 x 的逐次导数用 t 以及 y 对 t 的逐次导数表示出来。

设 $y=f(x)$ 是给定函数，并设 $F(t)=f[\phi(t)]$ 是把给定函数中的 x 代以 $\phi(t)$ 后所得的函数。由复合函数求导法则得到

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\phi'(t),$$

从而

$$y_x=\frac{dy/dt}{\phi'(t)}=\frac{y_t}{\phi'(t)}.$$

这个结果可表述如下：要求 y 对 x 的导数，先求该函数对 t 的导数，再除以 x 对 t 的导数。

二阶导数 d^2y/dx^2 可由把这一法则应用于刚求出的一级导数来得到。由此得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}(y_x)}{\phi'(t)}=\frac{y_{tt}\phi'(t)-y_t\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3};$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

再应用一次同一法则，即得三阶导数

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}(y_{xx})}{\phi'(t)},$$

或者，作出所指明的运算后，

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y_{ttt}[\phi'(t)]^2 - 3y_{tt}\phi'(t)\phi''(t) + 3y_t[\phi''(t)]^2 - y_t\phi'(t)\phi'''(t)}{[\phi'(t)]^5}.$$

其余各阶导数可由反复应用同一法则逐次算出。一般地，y 对 x 的 n 阶导数可以用 $\phi'(t), \phi''(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)$ 以及 y 对 t 的前 n 个逐次导数来表示。这些公式也可排列成更对称的形式。把 x 与 y 对 t 的逐次微分记为

$$dx, \quad dy, \quad d^2x, \quad d^2y, \quad \ldots, \quad d^nx, \quad d^ny,$$

并把 y 对 x 的逐次导数记为 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$，则前面的公式可写为

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx}, \\ y'' = \dfrac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \\ y''' = \dfrac{d^3y\,dx^2 - 3d^2y\,dx\,d^2x + 3dy\,(d^2x)^2 - dy\,d^3x\,dx}{dx^5}, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\,. \end{cases} \tag{20}$$

右端各微分是关于哪个自变量形成的，这个自变量 t 完全任意；而由一个导数过渡到下一个导数，是通过递推公式

$$y^{(n)} = \frac{d[y^{(n-1)}]}{dx},$$

其中右端看作两个微分的商。

32. 应用

这些公式用于平面曲线的研究，特别是当曲线上一点的坐标用辅助变量 t 表示为

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t)$$

时。为了在某一点邻近研究这条曲线，必须计算在该点处 y 对 x 的逐次导数 $y', y'', \ldots$。而前面的公式正好给出这些导数，用函数 $f(t)$ 与 $\phi(t)$ 的逐次导数表

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

示，不必求助于把 y 显式表示为 x 的函数；在实际中，这样的显式表示可能很难得到。于是第一个公式

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)}$$

给出切线的斜率。y'' 的值出现于一个重要的几何概念，即曲率半径；它由公式

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

给出；我们以后会推导这个公式。当坐标 x, y 以参数 t 的函数给出时，要得到 R 的值，只需把 y' 与 y'' 代以前面的表达式，于是得到

$$R = \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{|dx\,d^2y - dy\,d^2x|},$$

这里右端只含 x 与 y 关于 t 的一阶和二阶导数。

下面这个有趣的评注取自 Bertrand 先生的 *Traité de Calcul différentiel et intégral*（第一卷，第 170 页）。设在计算与某条给定平面曲线有关的某个几何概念时，曲线的坐标 x, y 被假定用参数 t 给出，而我们得到了表达式

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots, d^nx, d^ny),$$

其中所有微分均关于 t 取。按假设,这个概念具有几何意义,所以它的值不应依赖于自变量 t 的选择。但是,如果取 $x = t$,则有 $dx = dt$,$d^2x = d^3x = \cdots = d^nx = 0$,前一表达式化为

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

这正是如果一开始就假定给定曲线的方程已对 y 解出，写成 $y = \Phi(x)$，我们会得到的表达式。要由这个特殊情形回到自变量任意的情形，只需把 $y', y'', \ldots$ 代以公式 (20) 中的值。若在

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

中作这个代换，就应当回到出发时的表达式 $F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots)$。如果没有回到这个表达式，我们就可以断言所得结果是不正确的。例如，表达式

$$\frac{dx\,d^2y + dy\,d^2x}{(dx^2+dy^2)^{3/2}}$$

不可能具有与自变量选择无关的平面曲线的几何意义。因为若置 $x = t$，这个表达式化为 $y''/(1+y'^2)^{3/2}$；再把 y' 与 y'' 代以 (20) 中的值，并不能回到前面的表达式。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

33. 公式 (20)

公式 (20) 也常用于微分方程的研究。例如，设我们要求确定所有满足方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \tag{21}$$

的 x 的函数 y，其中 n 是常数。引入新自变量 t，令

$$x=\cos t.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{-\sin t},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t\,d^2y/dt^2-\cos t\,dy/dt}{\sin^3 t};$$

代入后，方程 (21) 化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0. \tag{22}$$

容易求出满足这个方程的所有 t 的函数，因为把它乘以 $2dy/dt$ 后可写作

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2n^2y\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2\right]=0,$$

从而

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2=n^2a^2,$$

其中 a 是任意常数。因此

$$\frac{dy}{dt}=n\sqrt{a^2-y^2},$$

或者

$$\frac{dy/dt}{\sqrt{a^2-y^2}}-n=0.$$

左端是 $\arcsin(y/a)-nt$ 的导数。于是这个差必为另一个任意常数 b，从而

$$y=a\sin(nt+b),$$

也可写作

$$y=A\sin nt+B\cos nt.$$

回到原变量 x，可见满足给定方程 (21) 的所有 x 的函数由公式

$$y=A\sin(n\arccos x)+B\cos(n\arccos x)$$

给出，其中 A,B 是两个任意常数。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

34. 问题 II

> 每一个 x 与 y 之间的关系，经由变换 $x=f(t,u)$, $y=\phi(t,u)$，对应于一个 t 与 u 之间的关系。要求把 y 对 x 的导数用 t,u 以及 u 对 t 的导数表示出来。

注意到变换公式

$$x=f(t,u),\qquad y=\phi(t,u)$$

在把 u 想象为由它关于 t 的值代入之后，就给出了原变量 x,y 作为变量 t 的函数的表达式，于是这个问题就归结为前一个问题。因此只需应用一般方法，并始终把 x,y 看作 t 的复合函数，把 u 看作 t 的辅助函数。于是首先得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}},$$

其次

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right):\frac{dx}{dt},$$

或者，作出所指明的运算后，

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)^3}\Bigg\{&\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)\\&\times\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial t}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2}\right]\\&-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\cdots\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

一般地，n 阶导数 $y^{(n)}$ 可以用 t,u 以及导数 $du/dt, d^2u/dt^2,\dots,d^nu/dt^n$ 表示。

例如，设一条曲线在极坐标中的方程为 $\rho=f(\omega)$。平面上一点的直角坐标公式为

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega.$$

令 $\rho',\rho'',\dots$ 表示 ρ 对被看作自变量的 ω 的逐次导数。由前面的公式得到

$$dx=\cos\omega\,d\rho-\rho\sin\omega\,d\omega,\qquad dy=\sin\omega\,d\rho+\rho\cos\omega\,d\omega,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$$d^2x = \cos\omega\, d^2\rho - 2\sin\omega\, d\omega\, d\rho - \rho\cos\omega\, d\omega^2,$$

$$d^2y = \sin\omega\, d^2\rho + 2\cos\omega\, d\omega\, d\rho - \rho\sin\omega\, d\omega^2,$$

从而

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = 2d\omega\, d\rho^2 - \rho\, d\omega\, d^2\rho + \rho^2 d\omega^3.$$

于是上面求出的曲率半径表达式变为

$$R = \pm\frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

35. 平面曲线的变换

设通过某种已知构造，使平面上每一点 m 对应于同一平面上的另一个点 M。如果用 (x, y) 表示点 m 的坐标，用 (X, Y) 表示 M 的坐标，则在一般情形中，这些坐标之间存在两个形如

$$X = f(x, y), \qquad Y = \phi(x, y) \tag{23}$$

的关系。这些公式定义一个点变换；几何中出现许多例子，例如射影变换、反演（反半径变换）等等。当点 m 描述一条曲线 c 时，相应的点 M 描述另一条曲线 C；C 的性质可由曲线 c 的性质以及所用变换的性质推出。令 $y', y'', \ldots$ 为 y 对 x 的逐次导数，令 $Y', Y'', \ldots$ 为 Y 对 X 的逐次导数。为了研究曲线 C，必须能够把 $Y', Y'', \ldots$ 用 $x, y, y', y'', \ldots$ 表示出来。这正是刚讨论过的问题；于是得到

$$Y' = \frac{dY/dx}{dX/dx} = \frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'},$$

$$Y'' = \frac{dY'/dx}{dX/dx} = \frac{(f_x + f_y y')D^2\phi - (\phi_x + \phi_y y')D^2 f}{(f_x + f_y y')^3},$$

其中

$$D^2\phi = \phi_{xx} + 2\phi_{xy}y' + \phi_{yy}y'^2 + \phi_y y'',$$

$$D^2 f = f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2 + f_y y''.$$

可以看出，Y' 只依赖于 x, y, y'。因此，如果把变换 (23) 应用于在点 (x, y) 相切的两条曲线 c, c'，则变换后的曲线 C, C' 在相应点 (X, Y) 处也相切。这个评注

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

使我们在只涉及变换后曲线 C 的切线的问题中，可以把曲线 c 替换为任何与它相切的其他曲线。

例如，考虑由公式

$$X = \frac{h^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = \frac{h^2 y}{x^2 + y^2}$$

定义的变换；这就是以原点为极点的反演（反半径变换）。设 m 是曲线 c 上一点，M 是曲线 C 上的相应点。为了求曲线 C 的切线，只需应用普通几何中的结果：反演把一条直线变为一条过极点的圆。

用曲线 c 在 m 处的切线 mt 代替曲线 c。mt 的反象是一条过两点 M 与 O 的圆，其圆心位于从原点向 mt 作的垂线 Ot 上。设 A 为这个圆的圆心，则圆在 M 处的切线 MT 垂直于 AM；而角 Mmt 与 mMT 相等，因为二者都是角 mOt 的余角。因此，切线 mt 与 MT 关于半径向量是反平行的。

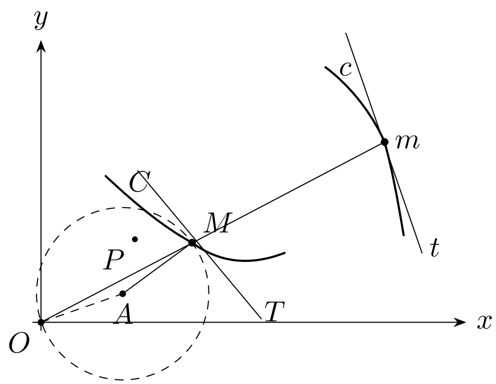


图 5

36.　接触变换

前面的变换并不是把两条相切曲线变成另外两条相切曲线的最一般变换。设一条曲线 c 的每一点 m 都确定一个点 M，而这个构造不仅依赖于点 m，也依赖于曲线 c 在该点的切线。定义该变换的公式于是具有形式

$$X = f(x, y, y'), \qquad Y = \phi(x, y, y'); \tag{24}$$

而变换后曲线的切线斜率 Y' 由公式

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}y' + \dfrac{\partial \phi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'}y''}$$

给出。一般地，Y' 依赖于四个变量 x, y, y', y''；如果把变换 (24) 应用于在一点 (x, y) 相切的两条曲线 c, c'，则变换后的曲线 C, C' 有一个公共点 (X, Y)，但一般并不相切，除非 y'' 偶然对两条曲线 c, c' 取相同的值。为了使曲线 C 与 C' 总是相切，充要条件是 Y' 不依赖于 y''；也就是说，两个函数 $f(x, y, y')$ 与 $\phi(x, y, y')$ 必须满足条件

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}y'\right) = \frac{\partial \phi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right).$$

当这一条件满足时，该变换叫作*接触变换*。显然，点变换是接触变换的一个特殊情形。[5]

例如，考虑 Legendre 变换；其中与曲线 c 上一点 (x, y) 对应的点 M 由方程

$$X = y', \qquad Y = xy' - y$$

给出。由此得

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{xy''}{y''} = x,$$

这表明该变换是一个接触变换。同样可得

$$Y'' = \frac{dY'}{dX} = \frac{dx}{y''dx} = \frac{1}{y''}, \qquad Y''' = \frac{dY''}{dX} = -\frac{y'''}{(y'')^3},$$

如此等等。由前面的公式可知

$$x = Y', \qquad y = XY' - Y, \qquad y' = X,$$

这说明该变换是对合的。[6] 如果注意到坐标为 $X = y'$, $Y = xy' - y$ 的点，是关于抛物线 $x^2 - 2y = 0$ 的、曲线 c 在点 (x, y) 处切线的极点，那么所有这些性质都可以解释清楚。更一般地，如果 M 表示曲线 c 在 m 处切线关于某条基准二

[5]Legendre 与 Ampère 给出了许多接触变换的例子。Sophus Lie 在多部著作中发展了一般理论；特别参看他的 *Geometrie der Berührungstransformationen*。亦见 Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*。

[6]即连续应用两次该变换会回到原来的坐标。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

次曲线 Σ 的极点，那么点 M 的轨迹是一条曲线 C，而 C 在 M 处的切线正是点 m 关于 Σ 的极线。因此，两条曲线 c 与 C 之间的关系是极性互反的；并且，如果把曲线 c 替换为另一条在点 m 与 c 相切的曲线 c'，则其互反曲线 C' 将在点 M 处与曲线 C 相切。

垂足曲线。如果从曲线 c 所在平面内的一个固定点 O，向曲线在点 m 处的切线作垂线 OM，则垂足 M 的轨迹是一条曲线 C，叫作给定曲线的*垂足曲线*（pedal curve）。直接计算点 M 的坐标，并说明由此定义的变换是接触变换并不困难；但如下推理更为简单。考虑以点 O 为圆心、半径为 R 的圆 γ；并在 OM 上取点 m_1，使

$$Om_1 \cdot OM = R^2.$$

点 m_1 是切线 mt 关于该圆的极点；因此把 c 化为 C 的变换，是先作一次极点与极线的互反变换，再作一次反演的结果。当点 m 描述曲线 c 时，点 m_1，即 mt 的极点，描述一条曲线 c_1，它切于点 m 关于圆 γ 的极线，也就是从 m_1 向 Om 作垂线所得的直线 m_1t_1。曲线 C 的切线 MT 与曲线 c_1 的切线 m_1t_1 和半径向量 Om_1M 所成的角相等。因此，如果作法线 MA，则角 AMO 与 AOM 相等，因为它们是相等角的余角；于是点 A 是线段 Om 的中点。由此可知，垂足曲线的法线可通过连接点 M 与线段 Om 的中点来作出。

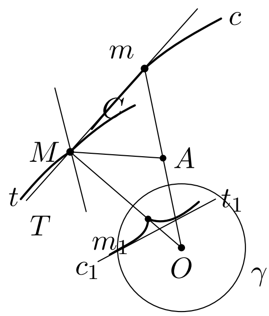


图 6

37. 射影变换

满足方程 $y''=0$ 的每一个函数 y 都是 x 的仿射线性函数，反之亦然。但是，如果对 x 与 y 施行射影变换

$$x=\frac{aX+bY+c}{a''X+b''Y+c''}, \qquad y=\frac{a'X+b'Y+c'}{a''X+b''Y+c''},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

则直线化为直线。因此方程 $y''=0$ 应当变为 $d^2Y/dX^2=0$。为了验证这一点，先注意一般射影变换可分解为一串简单形式的特殊变换。如果两个系数 a'' 与 b'' 不同时为零，令

$$X_1 = a''X + b''Y + c'';$$

又因为不可能同时有 $ab''-ba''=0$ 与 $a'b''-b'a''=0$，在假设 $a'b''-b'a''\neq 0$ 下令

$$Y_1 = a'X + b'Y + c'.$$

把 X,Y 用 X_1,Y_1 表出后，前面的公式可写为

$$y = \frac{Y_1}{X_1}, \qquad x = \frac{\alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma}{X_1} = \alpha + \beta\frac{Y_1}{X_1} + \frac{\gamma}{X_1}.$$

由此可知，一般射影变换可化为若干仿射变换

$$x = aX + bY + c, \qquad y = a'X + b'Y + c'$$

与特殊变换

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}$$

的复合。对后一个变换作计算，得

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{XY' - Y}{X^2} : -\frac{1}{X^2} = Y - XY',$$

并且

$$\frac{dy'}{dX} = -XY'', \qquad \frac{dx}{dX} = -\frac{1}{X^2},$$

所以

$$y'' = \frac{dy'/dX}{dx/dX} = \frac{-XY''}{-1/X^2} = X^3Y''.$$

同样，对一个仿射变换作计算，有

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a' + b'Y'}{a + bY'}, \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{(ab' - ba')Y''}{(a + bY')^3}.$$

在两种情形下，方程 $y''=0$ 都化为 $Y''=0$。

现在转向若干自变量的函数；为明确起见，我们将对二元函数给出论述。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

38. 问题 III

设 $w = f(x, y)$ 是两个自变量 x, y 的函数，并设 u, v 是由关系

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

同旧变量相联系的两个新变量。要求把 w 对变量 x, y 的偏导数用 u, v 以及 w 对 u, v 的偏导数表示出来。

设 $w = F(u, v)$ 是由 $f(x, y)$ 作上述代换所得的函数。则复合函数求导法则给出

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

从中可以求出 $\partial w/\partial x$ 与 $\partial w/\partial y$；因为如果行列式 $D(\phi, \psi)/D(u, v)$ 为零，则所作变量变换就没有意义。因此得到方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = A\dfrac{\partial w}{\partial u} + B\dfrac{\partial w}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = C\dfrac{\partial w}{\partial u} + D\dfrac{\partial w}{\partial v}, \end{cases} \tag{25}$$

其中 A, B, C, D 是 u, v 的确定函数；这些公式解决了一阶导数的问题。它们表明，函数关于 x 的导数等于两个乘积之和，这两个乘积分别由关于 u 与 v 的两个导数乘以 A 与 B 形成。关于 y 的导数同样得到，只须分别用 C 与 D 代替 A 与 B。为了计算二阶导数，只需把前述公式所表达的法则应用于一阶导数；这样得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial w}{\partial u} + B\frac{\partial w}{\partial v}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial w}{\partial u} + B\frac{\partial w}{\partial v}\right) \\ &= A\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial u} + A\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + B\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right) \\ &\quad + B\left(\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial u} + A\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial v} + B\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right), \end{aligned}$$

而 $\partial^2 w/\partial x \partial y$, $\partial^2 w/\partial y^2$ 以及以后各阶导数可用同样方法求得。在一切要实行的微分中，只需把运算 $\partial/\partial x$ 与 $\partial/\partial y$ 分别代以运算

$$A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}, \qquad C\frac{\partial}{\partial u} + D\frac{\partial}{\partial v}.$$

因此一切都归结为系数 A, B, C, D 的计算。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

例 I。考虑方程

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \tag{26}$$

其中系数 a,b,c 为常数；试把它化为尽可能简单的形式。首先观察到，如果 $a=c=0$，则再去简化方程就是多余的。因此可假定例如 c 不为零。取两个新自变量 u,v，由方程

$$u=x+\alpha y,\qquad v=x+\beta y$$

定义，其中 α,β 是常数。于是有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\alpha\frac{\partial w}{\partial u}+\beta\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

给定方程化为

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$$
$$+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

接下来要分几种情形。

第一种情形。设 $b^2-ac>0$。取 α 与 β 为方程

$$a+2br+cr^2=0$$

的两个根，则给定方程化为简单形式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0.$$

因为这可写成

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=0,$$

所以 $\partial w/\partial u$ 必为单变量 u 的函数，记作 $f(u)$。令 $F(u)$ 为 u 的一个函数，使 $F'(u) = f(u)$。于是，由于 $w - F(u)$ 关于 u 的导数为零，这个差必与 u 无关，因而 $w = F(u) + \Phi(v)$。反过来显然成立。回到变量 x, y，可知满足方程 (26) 的所有函数 w 都具有形式

$$w = F(x + \alpha y) + \Phi(x + \beta y),$$

其中 F 与 Φ 是任意函数。例如，出现在张弦理论中的方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

的一般积分是

$$w = f(x + ay) + \phi(x - ay).$$

第二种情形。设 $b^2 - ac = 0$。取 α 等于方程 $a + 2br + cr^2 = 0$ 的二重根，而 β 为另一个数，则 $\partial^2 w/\partial u \partial v$ 的系数为零，因为它等于 $a + b\alpha + (b + c\alpha)\beta$。于是给定方程化为 $\partial^2 w/\partial v^2 = 0$。显然，$w$ 对 v 必为仿射线性函数，

$$w = v f(u) + \phi(u),$$

其中 $f(u), \phi(u)$ 是任意函数。回到变量 x, y，w 的表达式成为

$$w = (x + \beta y) f(x + \alpha y) + \phi(x + \alpha y),$$

也可写成

$$w = [x + \alpha y + (\beta - \alpha) y] f(x + \alpha y) + \phi(x + \alpha y),$$

最后为

$$w = y F(x + \alpha y) + \Phi(x + \alpha y).$$

第三种情形。若 $b^2 - ac < 0$，则不引入虚变量时不能应用前面的变换。于是可由方程

$$a + 2b\alpha + c\alpha^2 = a + 2b\beta + c\beta^2, \qquad a + b(\alpha + \beta) + c\alpha\beta = 0$$

确定 α 与 β，它们给出

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{c}, \qquad \alpha\beta = \frac{2b^2 - ac}{c^2}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

二次方程

$$r^2+\frac{2b}{c}r+\frac{2b^2-ac}{c^2}=0$$

的根为 α 与 β；事实上它有实根。于是给定方程化为

$$\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

这个方程 $\Delta w=0$ 称为 Laplace 方程，在数学和数学物理的许多分支中具有根本重要性。

例 II。试看在作代换 $x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi$ 后，前一方程具有什么形式。一阶导数给出

$$\frac{\partial w}{\partial \rho}=\frac{\partial w}{\partial x}\cos\phi+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\phi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \phi}=-\frac{\partial w}{\partial x}\rho\sin\phi+\frac{\partial w}{\partial y}\rho\cos\phi,$$

或者，解出 $\partial w/\partial x$ 与 $\partial w/\partial y$，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\cos\phi\frac{\partial w}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \phi},\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\sin\phi\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \phi}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\cos\phi\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\phi\frac{\partial w}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right)-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\frac{\partial w}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right)\\&=\cos^2\phi\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{\sin^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}-\frac{2\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho\partial \phi}\\&\quad+\frac{2\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \phi}+\frac{\sin^2\phi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho};\end{aligned}$$

而 $\partial^2 w/\partial y^2$ 的表达式与此类似。把二者相加，得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}.$$

39. 另一种方法

当要求偏导数的函数是未知函数时，前一种方法最为实用。但在某些情形中，采用下面的方法更有利。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

设 $z=f(x,y)$ 是两个自变量 x,y 的函数。如果假定 x,y,z 都用两个辅助变量 u,v 表示，则全微分 dx,dy,dz 满足关系

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

这等价于两个不同的方程

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

由此可如同前法那样，把 $\partial f/\partial x$ 与 $\partial f/\partial y$ 求成 $u,v,\partial z/\partial u,\partial z/\partial v$ 的函数。但为了求后续导数，我们继续应用同一法则。例如，为求 $\partial^2 f/\partial x^2$ 与 $\partial^2 f/\partial x\partial y$，从恒等式

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy$$

出发；它等价于两个方程

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

这里假定 $\partial f/\partial x$ 已代以其在上面算出的值。同样，为求 $\partial^2 f/\partial x\partial y$ 与 $\partial^2 f/\partial y^2$，应从恒等式

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

出发。所得的 $\partial^2 f/\partial x\partial y$ 的两个值必须相合，这可用来检验计算。高阶导数也可用同样方法求出。

曲面的应用。前一方法常用于曲面的研究。设曲面 S 上一点的坐标由两个可变参数 u,v 的函数给出：

$$x=f(u,v),\qquad y=\phi(u,v),\qquad z=\psi(u,v).\tag{27}$$

曲面的方程可通过从三个方程 (27) 中消去变量 u,v 得到；但也可以直接由这些方程本身研究曲面 S 的性质，而不必实行这种在实际中可能不可能完成的消去。应注意，三个雅可比行列式

$$\frac{D(f,\phi)}{D(u,v)},\qquad \frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)},\qquad \frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

不能全都恒等为零；否则消去 u, v 将导致 x, y, z 之间的两个不同关系，而坐标为 (x, y, z) 的点将描出一条曲线，而不是一个曲面。为明确起见，假设第一个不为零：$D(f, \phi)/D(u, v) \neq 0$。于是方程 (27) 的前两个可解出 u, v，再把这些值代入第三个方程，就给出曲面的方程，形式为 $z = F(x, y)$。为了在一点邻近研究这个曲面，需要把函数 $F(x, y)$ 的偏导数 $p, q, r, s, t, \ldots$ 用参数 u, v 表示出来。一阶导数 p, q 由方程

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

给出；它等价于两个方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial u} = p\dfrac{\partial f}{\partial u} + q\dfrac{\partial \phi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial v} = p\dfrac{\partial f}{\partial v} + q\dfrac{\partial \phi}{\partial v}, \end{cases} \tag{28}$$

由此可求出 p, q。把这些值代入方程

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

便得到切平面方程；如此作后，得到

$$(X - x)\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + (Y - y)\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + (Z - z)\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0. \tag{29}$$

方程 (28) 有一个容易记住的几何意义。它们表示曲面的切平面包含曲面上的两条曲线的切线，这两条曲线分别由保持 v 常数而让 u 变化、以及保持 u 常数而让 v 变化得到。[7]

求得 p, q，即 $p = f_1(u, v)$，$q = f_2(u, v)$ 后，可由方程

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy$$

继续求 r, s, t；每个方程都等价于两个方程；如此等等。

[7] 切平面方程也可直接求出。曲面上每一条曲线由 u 与 v 之间的一个关系给出，比如 $v = \Pi(u)$；而这条曲线的切线方程为

$$\frac{X - x}{\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\Pi'(u)} = \frac{Y - y}{\dfrac{\partial \phi}{\partial u} + \dfrac{\partial \phi}{\partial v}\Pi'(u)} = \frac{Z - z}{\dfrac{\partial \psi}{\partial u} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Pi'(u)}.$$

消去 $\Pi'(u)$ 即得切平面方程 (29)。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

40. 问题 IV

每一个 x, y, z 之间的关系，经由方程

$$x = f(u, v, w), \qquad y = \phi(u, v, w), \qquad z = \psi(u, v, w), \tag{30}$$

对应于 u, v, w 之间的一个新关系。要求把 z 对变量 x, y 的偏导数用 u, v, w 以及 w 对变量 u, v 的偏导数表示出来。

这个问题可归结为前一个问题。因为如果假定在公式 (30) 中 w 已代以 u, v 的一个函数，则我们把 x, y, z 表为两个参数 u, v 的函数；于是只需遵循前一方法，把 f, ϕ, ψ 看作 u, v 的复合函数，把 w 看作 u, v 的辅助函数。例如，为计算一阶导数 p, q，有两个方程

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} &= p\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) + q\left(\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right), \\
\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} &= p\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + q\left(\frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial \phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right).
\end{aligned}$$

后续导数可用类似方法计算。

用几何语言说,上述问题可表述如下:对空间的每一点 m,其坐标为 (x, y, z),由一个给定构造对应另一个点 M，其坐标为 X, Y, Z。当点 m 描述曲面 S 时，点 M 描述另一个曲面 Σ；要求从给定曲面 S 的性质推出 Σ 的性质。

定义变换的公式形如

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \phi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z).$$

令

$$z = F(x, y), \qquad Z = \Phi(X, Y)$$

为两个曲面 S 与 Σ 的方程。问题是把函数 $\Phi(X, Y)$ 的偏导数 $P, Q, R, S, T, \ldots$ 用 x, y, z 以及函数 $F(x, y)$ 的偏导数 $p, q, r, s, t, \ldots$ 表示出来。这正是上面的问题，只是记号不同。

一阶导数 P, Q 只依赖于 x, y, z, p, q；所以该变换把相切曲面变为相切曲面。不过，正如下面例子将表明的，这并不是具有这一性质的最一般变换。

41. Legendre 变换

设 $z = f(x, y)$ 是曲面 S 的方程，并把这个曲面上任意点 $m(x, y, z)$ 由变换

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

带到点 M，其坐标为 X, Y, Z。设 $Z = \Phi(X, Y)$ 为点 M 所描述的曲面 Σ 的方程。如果把 z, p, q 分别代以 $f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y$，便得到点 M 的三个坐标作为两个自变量 x, y 的函数。

令 P, Q, R, S, T 表示函数 $\Phi(X, Y)$ 的偏导数。关系

$$dZ = P\,dX + Q\,dY$$

变为

$$p\,dx + q\,dy + x\,dp + y\,dq - dz = P\,dp + Q\,dq,$$

或者

$$x\,dp + y\,dq = P\,dp + Q\,dq.$$

假定对曲面 S 而言，p 与 q 不是彼此的函数；这时除非 $\lambda = \mu = 0$，否则不存在形如 $\lambda dp + \mu dq = 0$ 的恒等式。于是由前一方程可得

$$P = x, \qquad Q = y.$$

为了求 R, S, T，可从类似关系

$$dP = R\,dX + S\,dY, \qquad dQ = S\,dX + T\,dY$$

出发。把 X, Y, P, Q 代以它们的值后，这些关系变成

$$dx = R(r\,dx + s\,dy) + S(s\,dx + t\,dy),$$

$$dy = S(r\,dx + s\,dy) + T(s\,dx + t\,dy);$$

从而

$$Rr + Ss = 1, \qquad Rs + St = 0, \qquad Sr + Ts = 0, \qquad Ss + Tt = 1,$$

于是

$$R = \frac{t}{rt - s^2}, \qquad S = -\frac{s}{rt - s^2}, \qquad T = \frac{r}{rt - s^2}.$$

由前面的公式反过来可得

$$x = P, \quad y = Q, \quad z = PX + QY - Z, \quad p = X, \quad q = Y,$$

$$r = \frac{T}{RT - S^2}, \qquad s = -\frac{S}{RT - S^2}, \qquad t = \frac{R}{RT - S^2},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这证明该变换是对合的。此外，它是一个接触变换，因为 X, Y, Z, P, Q 只依赖于 x, y, z, p, q。如果注意到这些公式定义的是关于抛物面

$$x^2 + y^2 - 2z = 0$$

的极性互反变换（点与极平面的互反），这些性质便一目了然。

注。如果关系 $rt - s^2 = 0$ 在曲面 S 的每一点都成立，则 R, S, T 的表达式变为无穷大。在这种情形下，点 M 描述一条曲线，而不是一个曲面；因为

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2 = 0,$$

同样

$$\frac{D(X, Z)}{D(x, y)} = \frac{D(p, px + qy - z)}{D(x, y)} = y(rt - s^2) = 0.$$

这正是我们没有考虑的情形。

42. Ampère 变换

保留前一条中的记号，考虑变换

$$X = x, \qquad Y = q, \qquad Z = qy - z.$$

关系

$$dZ = P\,dX + Q\,dY$$

变为

$$q\,dy + y\,dq - dz = P\,dx + Q\,dq,$$

或者

$$y\,dq - p\,dx = P\,dx + Q\,dq.$$

因此

$$P = -p, \qquad Q = y;$$

反过来可得

$$x = X, \quad y = Q, \quad z = QY - Z, \quad p = -P, \quad q = Y.$$

由此可知，这个变换也是一个对合接触变换。接着，关系

$$dP = R\,dX + S\,dY$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

变为

$$-r\,dx - s\,dy = R\,dx + S(s\,dx + t\,dy);$$

也就是

$$R + Ss = -r, \qquad St = -s,$$

从而

$$R = \frac{s^2 - rt}{t}, \qquad S = -\frac{s}{t}.$$

从关系 $dQ = S\,dX + T\,dY$ 出发，同样得到

$$T = \frac{1}{t}.$$

作为这些公式的一个应用，试求所有满足方程 $rt - s^2 = 0$ 的函数 $f(x, y)$。令 S 为方程 $z = f(x, y)$ 所表示的曲面，Σ 为变换后的曲面，$Z = \Phi(X, Y)$ 为 Σ 的方程。从 R 的公式可以看出，必有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = 0,$$

所以 Φ 对 X 必为仿射线性函数:

$$Z = X\phi(Y) + \psi(Y),$$

其中 ϕ 与 ψ 是 Y 的任意函数。由此

$$P = \phi(Y), \qquad Q = X\phi'(Y) + \psi'(Y);$$

反过来，曲面 S 上一点的坐标 (x, y, z) 作为两个变量 X, Y 的函数，由公式

$$x = X, \qquad y = X\phi'(Y) + \psi'(Y),$$

$$z = Y[X\phi'(Y) + \psi'(Y)] - X\phi(Y) - \psi(Y)$$

给出。曲面的方程可通过消去 X, Y 得到；或者，等价地，通过从方程

$$z = \alpha y - x\phi(\alpha) - \psi(\alpha), \qquad 0 = y - x\phi'(\alpha) - \psi'(\alpha)$$

中消去 α 得到。第一个方程表示一个依赖于参数 α 的动平面，而第二个方程由对第一个方程关于这个参数求导得到。由这两个方程定义的曲面就是所谓可展曲面，我们以后将研究它们。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

43. 曲线坐标中的势方程

变量变换所导致的计算，在许多情形中可由各种技巧加以简化。作为例子，我们取正交曲线坐标中的势方程。[8] 设

$$F(x,y,z)=\rho, \qquad F_1(x,y,z)=\rho_1, \qquad F_2(x,y,z)=\rho_2$$

是三族曲面的方程，它们构成一个三重正交系，即属于不同两族的任意两个曲面相交成直角。把这些方程对 x,y,z 解出，作为参数 ρ,ρ_1,ρ_2 的函数，得形式为

$$\begin{cases} x=\phi(\rho,\rho_1,\rho_2), \\ y=\phi_1(\rho,\rho_1,\rho_2), \\ z=\phi_2(\rho,\rho_1,\rho_2), \end{cases} \tag{31}$$

的方程；于是可取 ρ,ρ_1,ρ_2 为一个正交曲线坐标系。由于三个给定曲面正交，它们交线的切线必构成一个三直角三面角。因此方程

$$S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho_1}=0, \qquad S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho_2}=0, \qquad S\frac{\partial\phi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\phi}{\partial\rho_2}=0 \tag{32}$$

必须满足；其中符号 S 表示应把 ϕ 依次换为 ϕ_1、再换为 ϕ_2，然后相加。这些正交条件也可写成下列与之等价的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial y}+\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x}+\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial y}+\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x}+\dfrac{\partial\rho_1}{\partial y}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial y}+\dfrac{\partial\rho_1}{\partial z}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial z}=0. \end{cases} \tag{33}$$

现在来看势方程

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

在变量 ρ,ρ_1,ρ_2 中化为什么形式。首先有

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\frac{\partial\rho_2}{\partial x},$$

[8] Lamé, *Traité des coordonnées curvilignes*. 亦见 Bertrand, *Traité de Calcul différentiel*, Vol. I, p. 181.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

继而

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \rho_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\cdots$$
$$+\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2}.$$

把三个类似方程相加，由于关系 (33)，含有 $\partial^2 V/\partial\rho\partial\rho_1$ 这类二阶导数的项消去，得到

$$\begin{aligned}\Delta_2 V=\Delta_1(\rho)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\Delta_1(\rho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}+\Delta_1(\rho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}\\+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial \rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial \rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial \rho_2},\end{aligned}\tag{34}$$

其中 Δ_1 与 Δ_2 表示 Lamé 的微分参数:

$$\Delta_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,\qquad \Delta_2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

一阶微分参数 $\Delta_1(\rho),\Delta_1(\rho_1),\Delta_1(\rho_2)$ 容易计算。由方程 (31) 可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=1,$$
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=0;$$

分别乘以 $\partial\phi/\partial\rho,\partial\phi_1/\partial\rho,\partial\phi_2/\partial\rho$ 并相加，得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho}\right)^2\right]=\frac{\partial \phi}{\partial \rho}.$$

同样算出 $\partial\rho/\partial y$ 与 $\partial\rho/\partial z$ 后，容易看出

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho}\right)^2}.$$

现在令

$$H=S\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2,\qquad H_1=S\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho_1}\right)^2,\qquad H_2=S\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho_2}\right)^2,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中符号 S 仍表示应把 ϕ 换为 ϕ_1、再换为 ϕ_2，然后相加。于是前一方程及其两个类似方程可写为

$$\Delta_1(\rho)=\frac{1}{H},\qquad \Delta_1(\rho_1)=\frac{1}{H_1},\qquad \Delta_1(\rho_2)=\frac{1}{H_2}.$$

Lamé 通过一个相当长的计算，得到 $\Delta_2(\rho),\Delta_2(\rho_1),\Delta_2(\rho_2)$ 作为 ρ,ρ_1,ρ_2 的函数的表达式。我们可将这个计算压缩如下。在恒等式 (34) 的右端，即

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial\rho_2},$$

中，依次令 $V=x,V=y,V=z$。这给出三个方程

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H}\frac{\partial^2 \phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \phi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial \phi}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial \phi}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial \phi}{\partial\rho_2}=0,\\
&\frac{1}{H}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial \phi_1}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial \phi_1}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial \phi_1}{\partial\rho_2}=0,\\
&\frac{1}{H}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial \phi_2}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial \phi_2}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial \phi_2}{\partial\rho_2}=0,
\end{aligned}$$

只需由它们解出 $\Delta_2(\rho),\Delta_2(\rho_1),\Delta_2(\rho_2)$。例如，分别乘以 $\partial\phi/\partial\rho,\partial\phi_1/\partial\rho,\partial\phi_2/\partial\rho$ 并相加，得

$$\Delta_2(\rho)+\frac{1}{H^2}S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{HH_1}S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{HH_2}S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho_2^2}=0.$$

中译者校记（现代重排本误排）。分别相乘并相加后，尚须把原式除以 H。现代 LaTeX 重排本在这一行漏掉了由此产生的三个因子；1904 年英译本及紧接着的推导表明，三个分母应依次为 H^2,HH_1,HH_2。又有

$$S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\rho},$$

对方程 (32) 中的第一个方程关于 ρ_1 微分，得

$$S\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho\partial\rho_1}\frac{\partial\phi}{\partial\rho_1}=-S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho_1^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}.$$

同样地,

$$S\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho_2^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此

$$\Delta_2(\rho) = -\frac{1}{2H^2}\frac{\partial H}{\partial \rho} + \frac{1}{2HH_1}\frac{\partial H_1}{\partial \rho} + \frac{1}{2HH_2}\frac{\partial H_2}{\partial \rho} = \frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{H_1 H_2}{H}.$$

令

$$H = \frac{1}{h^2}, \qquad H_1 = \frac{1}{h_1^2}, \qquad H_2 = \frac{1}{h_2^2},$$

这个公式化为

$$\Delta_2(\rho) = h^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{h}{h_1 h_2};$$

同理

$$\Delta_2(\rho_1) = h_1^2 \frac{\partial}{\partial \rho_1}\log\frac{h_1}{h h_2}, \qquad \Delta_2(\rho_2) = h_2^2 \frac{\partial}{\partial \rho_2}\log\frac{h_2}{h h_1}.$$

于是公式 (34) 最终成为

$$\begin{aligned}\Delta_2 V = h^2 &\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\log\frac{h}{h_1 h_2}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho}\right] \\ &+ h_1^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\log\frac{h_1}{h h_2}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right] \\ &+ h_2^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\log\frac{h_2}{h h_1}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right],\end{aligned} \tag{35}$$

或者，以紧凑形式写为

$$\Delta_2 V = h h_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{h}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_1}{h h_2}\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{h_2}{h h_1}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right)\right].$$

把这个公式应用于极坐标。变换公式为

$$x = \rho\sin\theta\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\phi, \qquad z = \rho\cos\theta,$$

其中 θ 与 ϕ 代替 ρ_1 与 ρ_2，而系数 h, h_1, h_2 具有下列值:

$$h = 1, \qquad h_1 = \frac{1}{\rho}, \qquad h_2 = \frac{1}{\rho\sin\theta}.$$

于是一般公式变为

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\right],$$

或者展开为

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

这可以直接检验。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

习题

1. 令

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad v = x + y + z, \qquad w = xy + yz + zx.$$

函数行列式 $D(u, v, w)/D(x, y, z)$ 恒等地为零。求 u, v, w 之间存在的关系。推广这个问题。

2. 令

$$u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}}.$$

推出方程

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^{1+n/2}}.$$

3. 采用记号

$$x_1 = \cos\phi_1,$$

$$x_2 = \sin\phi_1 \cos\phi_2,$$

$$x_3 = \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos\phi_3,$$

$$\cdots,$$

$$x_n = \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-1} \cos\phi_n,$$

证明

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)} = (-1)^n \sin^n\phi_1 \sin^{n-1}\phi_2 \sin^{n-2}\phi_3 \cdots \sin^2\phi_{n-1} \sin\phi_n.$$

4. 直接证明由两个方程

$$z = \alpha x + y f(\alpha) + \phi(\alpha), \qquad 0 = x + y f'(\alpha) + \phi'(\alpha)$$

定义的函数 $z = F(x, y)$ 满足方程 $rt - s^2 = 0$；这里 α 是辅助变量，而 $f(\alpha)$ 与 $\phi(\alpha)$ 是任意函数。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

5. 同样证明，由形如

$$y = x\phi(z) + \psi(z)$$

的方程定义的任意隐函数 $z = F(x, y)$，其中 $\phi(z)$ 与 $\psi(z)$ 为任意函数，满足方程

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0.$$

6. 证明由两个方程

$$z\phi'(\alpha) = [y - \phi(\alpha)]^2, \qquad (x + \alpha)\phi'(\alpha) = y - \phi(\alpha)$$

定义的函数 $z = F(x, y)$，其中 α 为辅助变量而 $\phi(\alpha)$ 为任意函数，满足方程 $pq = z$。

7. 同样证明由两个方程

$$[z - \phi(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2), \qquad [z - \phi(\alpha)]\phi'(\alpha) = \alpha x^2$$

定义的函数满足方程 $pq = xy$。

8*. Lagrange 公式。设 y 是两个变量 x 与 α 的隐函数，由关系

$$y = \alpha + x\phi(y)$$

定义；又设 $u = f(y)$ 是 y 的任意函数。一般地证明

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[\phi(y)^n \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right].$$

[Laplace.]

注。证明基于两个公式

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right], \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \phi(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

其中 u 为 y 的任意函数，而 $F(u)$ 是 u 的任意函数。先证明如果公式对某个 n 成立，则它对 $n+1$ 成立。

令 $x = 0$ 时，y 化为 α，u 化为 $f(\alpha)$；而 u 对 x 的 n 阶导数化为

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}[\phi(\alpha)^n f'(\alpha)].$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

9. 若 $x=f(u,v)$, $y=\phi(u,v)$ 是满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial \phi}{\partial v},\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial \phi}{\partial u}$$

的两个函数；又设 $V=V(x,y)$ 为任意二元函数。证明下列方程恒等成立：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

10. 如果函数 $V(x,y,z)$ 满足方程

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

证明函数

$$\frac{1}{r}V\left(\frac{k^2x}{r^2},\frac{k^2y}{r^2},\frac{k^2z}{r^2}\right)$$

也满足同一方程，其中 k 是常数，$r^2=x^2+y^2+z^2$。[Lord Kelvin.]

11. 如果 $V(x,y,z)$ 与 $V_1(x,y,z)$ 是方程 $\Delta_2 V=0$ 的两个解，证明函数

$$U=V(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)V_1(x,y,z)$$

满足方程

$$\Delta_2\Delta_2 U=0.$$

12. 作变换 $x=\sqrt{1-t^2}$ 时，方程

$$(x-x^3)y''+(1-3x^2)y'-xy=0$$

化为什么形式?

13. 作变换 $x=uv$, $y=1/v$ 时，方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$$

化为什么形式?

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

14*. 设 $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ 是 $2n$ 个自变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n$ 的函数，并且关于变量 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 为齐次二次函数。如果令

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_1} = p_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial u_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \phi}{\partial u_n} = p_n,$$

然后取 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 作为自变量以代替 $u_1, u_2, \ldots, u_n$，则函数 ϕ 变为形如

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

的函数。推出公式

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_k} = u_k, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k}.$$

15. 设 N 为固定平面 P 与给定曲面 S 上任一点 M 处所作法线 MN 的交点。在平面 P 于点 N 的垂线上截取长度 $Nm = NM$。求点 m 描述的曲面的切平面。

前述变换是一个接触变换。研究其逆变换。

16. 从给定曲面 S 的每一点出发，在曲面的法线上截取一个常长 l。求由端点组成的曲面 Σ（平行曲面）的切平面。求平面曲线的类似问题。

17*. 给定一个曲面 S 与一个固定点 O；把点 O 与曲面 S 的任一点 M 连接，并过 OM 以及曲面 S 在点 M 处的法线 MN 作平面 OMN。在这个平面内，过点 O 作一条垂直于 OM 的直线，并在其上截取长度 $OP = OM$。点 P 描述一个曲面 Σ，它叫作给定曲面 S 的拱点曲面（apsidal surface）。求这个曲面的切平面。

这个变换是接触变换，曲面 S 与 Σ 之间的关系是互反的。当给定曲面 S 是椭球，而点 O 是它的中心时，曲面 Σ 是 Fresnel 波面。

18*. Halphen 的微分不变量。证明微分方程

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{d^5y}{dx^5} - 45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0$$

在变量 x, y 经任意射影变换（§37）后保持不变。

19. 如果在表达式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 中，其中 P, Q, R 为 x, y, z 的任意函数，作代换

$$x = f(u, v, w), \qquad y = \phi(u, v, w), \qquad z = \psi(u, v, w),$$

其中 u, v, w 为新变量，则它化为形如 $P_1du + Q_1dv + R_1dw$ 的表达式，其中 P_1, Q_1, R_1 为 u, v, w 的函数。证明下列方程恒等成立：

$$H_1 = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} H,$$

其中

$$H = P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$H_1 = P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w} - \frac{\partial R_1}{\partial v}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u} - \frac{\partial P_1}{\partial w}\right) + R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v} - \frac{\partial Q_1}{\partial u}\right).$$

20*. 双线性协变式。令 Θ_d 为线性微分形式

$$\Theta_d = X_1dx_1 + X_2dx_2 + \cdots + X_ndx_n,$$

其中 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 n 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的函数。考虑表达式

$$H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k,$$

其中

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

并且这里有两套微分 d 与 δ。如果作任意变换

$$x_i = \phi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

则表达式 Θ_d 化为同一形式的表达式

$$\Theta'_d = Y_1dy_1 + \cdots + Y_ndy_n,$$

其中 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的函数。再令

$$a'_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}, \qquad H' = \sum_i\sum_k a'_{ik}\, dy_i\, \delta y_k.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

证明，如果把 dx_i 与 δx_k 分别代以表达式

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\phi_i}{\partial y_2}dy_2+\cdots+\frac{\partial\phi_i}{\partial y_n}dy_n,$$

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2}\delta y_2+\cdots+\frac{\partial\phi_k}{\partial y_n}\delta y_n,$$

则恒等地有 $H=H'$。表达式 H 叫作 Θ_d 的一个双线性协变式。

21*. Beltrami 的微分参数。若在给定表达式

$$Edx^2+2Fdx\,dy+Gdy^2$$

中，其中 E,F,G 为变量 x,y 的函数，作变换 $x=f(u,v)$，$y=\phi(u,v)$，则得到同一形式的表达式

$$E_1du^2+2F_1du\,dv+G_1dv^2,$$

其中 E_1,F_1,G_1 为 u,v 的函数。令 $\theta(x,y)$ 为变量 x,y 的任意函数，$\theta_1(u,v)$ 为变换后的函数。于是恒等地有

$$\frac{G\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2-2F\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+E\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2}{EG-F^2}
=\frac{G_1\left(\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)^2-2F_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}+E_1\left(\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)^2}{E_1G_1-F_1^2},$$

并且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-F\dfrac{\partial\theta}{\partial y}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E\dfrac{\partial\theta}{\partial y}-F\dfrac{\partial\theta}{\partial x}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}-F_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}-F_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\right).\end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

22. Schwarzian（施瓦茨导数）。令 $y=(ax+b)/(cx+d)$，其中 x 为 t 的函数，而 a,b,c,d 为任意常数。证明关系

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

恒等成立，其中 x',x'',x''',y',y'',y''' 表示对变量 t 的导数。

23*. 设 u 与 v 是两个自变量 x,y 的任意两个函数，并令

$$U=\frac{au+bv+c}{a''u+b''v+c''},\qquad V=\frac{a'u+b'v+c'}{a''u+b''v+c''},$$

其中 $a,b,c,\ldots,c''$ 为常数。证明公式

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{(u,v)}=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial x}}{(U,V)},$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)}{(u,v)}$$
$$=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial y}+2\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)}{(U,V)},$$

以及由互换 x 与 y 得到的类似公式；其中

$$(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad (U,V)=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}.$$

[Goursat and Painlevé, *Comptes rendus*, 1887.]

第3章

Taylor 级数、初等应用、极大与极小

I. 带余项的 Taylor 公式；Taylor 级数

44. 带余项的 Taylor 公式

在初等微积分教科书中证明：如果 $f(x)$ 是 n 次多项式，那么对 a 与 h 的一切值都有公式

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a). \tag{3.1}$$

这个展开自行终止，因为从第 $n+1$ 阶起，所有导数都为零。如果我们试图把这个公式用于一个不是多项式的函数 $f(x)$，则右端含有无限多个项。为了找到应赋予这个展开的适当意义，我们先要对差

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)-\cdots-\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a)$$

寻求一个表达式；这里假设函数 $f(x)$ 连同它的前 n 个导数 $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$，在 x 属于区间 $(a, a+h)$ 时连续，并且 $f^{(n)}(x)$ 本身在同一区间中有导数 $f^{(n+1)}(x)$。给定数 a 与 $a+h$ 后，令

$$\begin{aligned}f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots\\ +\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^p}{1\cdot 2\cdots n\cdot p}P,\end{aligned} \tag{3.2}$$

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 p 为任意正整数，而 P 是由这个方程本身定义的数。再考虑辅助函数

$$\phi(x)=f(a+h)-f(x)-\frac{a+h-x}{1}f'(x)-\frac{(a+h-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)-\cdots$$
$$-\frac{(a+h-x)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x)-\frac{(a+h-x)^p}{1\cdot 2\cdots n\cdot p}P.$$

由定义数 P 的方程 (3.2) 可知

$$\phi(a)=0,\qquad \phi(a+h)=0.$$

并且由关于 $f(x)$ 的假设可知，函数 $\phi(x)$ 在整个区间 $(a,a+h)$ 中有导数。因此，由 Rolle 定理，方程 $\phi'(x)=0$ 必有一个位于该区间中的根 $a+\theta h$，其中 θ 是介于零与一之间的正数。经过一些容易的化简，$\phi'(x)$ 的值为

$$\phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{p-1}}{1\cdot 2\cdots n}\left[P-(a+h-x)^{n-p+1}f^{(n+1)}(x)\right].$$

第一因子 $(a+h-x)^{p-1}$ 除 $x=a+h$ 外不可能为零。因此必有

$$P=h^{n-p+1}(1-\theta)^{n-p+1}f^{(n+1)}(a+\theta h),\qquad 0<\theta<1;$$

于是把这个 P 值代入方程 (3.2)，得到

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a)+R_n,\quad (3.3)$$

其中

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1\cdot 2\cdots n\cdot p}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

我们称这个公式为带余项的 Taylor 公式，而最后一项，也就是 R_n，称为余项。这个余项依赖于我们尚未确定的正整数 p。在实际使用中，给 p 取的值几乎只有 $p=n+1$ 与 $p=1$ 两种。令 $p=n+1$，就得到下列余项表达式，这是 Lagrange 的形式:

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n(n+1)}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

令 $p=1$，则得到

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

这是 Cauchy 给出的余项表达式。并且显然，在这两个特殊公式中，数 θ 一般并不相同。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果再假设 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $x=a$ 时连续，则余项可写成

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\left[f^{(n+1)}(a)+\epsilon\right],$$

其中 ϵ 随 h 而趋近于零。

为明确起见，我们考察 Lagrange 形式。若在一般公式 (3.3) 中依次取 $n=1,2,3,4,\ldots$，就得到一列不同的公式；当 h 很小时，它们给出 $f(a+h)$ 的越来越精确的近似。例如，当 $n=1$ 时，有

中译者校记（底本原误）。 1904 年英译本与现代重排本在此均从 $n=2$ 写起，却紧接着讨论 $n=1$；依公式本身，序列应从 $n=1$ 开始。

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a+\theta h),$$

这说明差

$$f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1}f'(a)$$

只要 f'' 在 $x=a$ 附近有限，就是关于 h 的至少二阶无穷小。同样，差

$$f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1}f'(a) - \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)$$

是三阶无穷小；一般地，表达式

$$f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1}f'(a) - \cdots - \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

至少是 $n+1$ 阶无穷小。但是，为了对略去 R_n 所得近似有精确的认识，还需要知道这个余项的一个上界。设 M [1] 表示 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在 $x=a$ 的邻域中的一个上界，比如在区间 $(a-\eta, a+\eta)$ 中的一个上界。于是显然，只要 $|h|<\eta$，就有

$$|R_n| < \frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}M.$$

[1] 也就是说，当 $|x-a|<\eta$ 时，$M \geq |f^{(n+1)}(x)|$。在 §68 中定义的“the upper limit”（上极限）这一说法，应当同这里所用的“an upper limit”严格区分；后者是指一个大于或等于函数在某一区间中任一点处的绝对值的数。本段和下一段中假定 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $x=a$ 附近有一个上界。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

45. 曲线的应用

这个结果可以作几何解释。设我们要研究方程为 $y = f(x)$ 的曲线 C 在点 A 的邻域中的情形，点 A 的横坐标为 a。同时考虑一条辅助曲线 C'，其方程为

$$Y = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a).$$

一条平行于 y 轴的直线 $x = a + h$，在靠近 A 的地方分别与这两条曲线交于两点 M 与 M'。由一般公式可知，它们纵坐标之差等于

$$y - Y = \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdots (n+1)}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

这个差是至少 $n+1$ 阶的无穷小；因此，如果限制在一个小区间 $(a-\eta, a+\eta)$ 内，曲线 C 在可感知的程度上与曲线 C' 重合。通过取越来越大的 n 值，我们可以用这种方式得到与给定曲线 C 相差越来越小的曲线；这就使我们对曲线在点 A 附近的形状有越来越精确的认识。

先令 $n = 1$。这时曲线 C' 就是曲线 C 在点 A 处的切线：

$$Y = f(a) + (x-a)f'(a);$$

而曲线与其切线上的两点 M 与 M' 具有相同横坐标 $a+h$，它们纵坐标之差为

$$y - Y = \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a+\theta h).$$

设 $f''(a) \neq 0$，这通常就是一般情形。前一公式可写成

$$y - Y = \frac{h^2}{1\cdot 2}\left[f''(a) + \epsilon\right],$$

其中 ϵ 随 h 而趋近于零。由于 $f''(a) \neq 0$，可以找到一个正数 η，使得当 h 介于 $-\eta$ 与 $+\eta$ 之间时，$|\epsilon| < |f''(a)|$。对这样的 h 值，量 $f''(a)+\epsilon$ 与 $f''(a)$ 同号，因而 $y - Y$ 也与 $f''(a)$ 同号。如果 $f''(a)$ 为正，曲线的纵坐标 y 大于切线的纵坐标 Y，无论 h 取何符号都是如此；于是曲线 C 在点 A 附近完全位于切线之上。另一方面，如果 $f''(a)$ 为负，则 y 小于 Y，曲线在切点附近完全位于切线之下。

如果 $f''(a) = 0$，设 $f^{(p)}(a)$ 是在 $x = a$ 处第一个不为零的后续导数。如果 $f^{(p)}(x)$ 在 $x = a$ 时连续，则和上面一样有

$$y - Y = \frac{h^p}{1\cdot 2\cdots p}\left[f^{(p)}(a) + \epsilon\right];$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

并且可以如上证明，在一个足够小的区间 $(a-\eta, a+\eta)$ 内，差 $y-Y$ 与乘积 $h^p f^{(p)}(a)$ 同号。当 p 为偶数时，这个差不随 h 改变符号，曲线在切点附近完全位于切线同一侧。但是，如果 p 为奇数，差 $y-Y$ 随 h 改变符号，曲线 C 在切点处穿过它的切线。在后一情形中，点 A 称为一个拐点；例如当 $f'''(a) \neq 0$ 时就出现这种情形。

现在令 $n=2$。这时曲线 C' 是一条抛物线：

$$Y = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a),$$

其轴平行于 y 轴；而纵坐标之差为

$$y - Y = \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left[f'''(a) + \epsilon \right].$$

如果 $f'''(a)$ 不为零，则当 h 足够小时，$y-Y$ 与 $h^3 f'''(a)$ 同号，曲线 C 在点 A 处穿过抛物线 C'。这条抛物线称为曲线 C 的密切抛物线；因为在抛物线族

$$Y = mx^2 + nx + p$$

中，它在点 A 附近最接近于与曲线 C 重合（见 §213）。

46. 展开的一般方法

公式 (3.3) 给出一种方法，按 h 的升幂来展开无穷小 $f(a+h)-f(a)$。但更一般地，设 x 是一个主无穷小；为避免歧义，假定它为正；又设 y 是另一个无穷小，形如

$$y = A_1 x^{n_1} + A_2 x^{n_2} + \cdots + x^{n_p}(A_p + \epsilon), \tag{3.4}$$

其中 $n_1, n_2, \ldots, n_p$ 是递增的正数，不必是整数；$A_1, A_2, \ldots, A_p$ 是不等于零的常数；而 ϵ 是另一个无穷小。数 $n_1, A_1, n_2, A_2, \ldots$ 可由下面的过程逐次计算。首先，显然 n_1 等于无穷小 y 相对于 x 的阶，而 A_1 等于当 x 趋近于零时比值 y/x^{n_1} 的极限。其次有

$$y - A_1 x^{n_1} = u_1 = A_2 x^{n_2} + \cdots + (A_p + \epsilon) x^{n_p},$$

这说明 n_2 等于无穷小 u_1 的阶，而 A_2 等于比值 u_1/x^{n_2} 的极限。继续这个过程便得到后续各项。于是很清楚，一个无穷小 y 不能有两个本质上不同的形如 (3.4) 的展开。如果两个展开有同样多的项，它们就一致；而如果一个有 p

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

项，另一个有 $p+q$ 项，则前一个展开的各项也出现在后一个展开中。这个方法特别适用于按 h 的幂来展开 $f(a+h)-f(a)$；并且不必预先得到函数 $f(x)$ 的逐次导数的一般表达式。相反，这个方法给出一种实际手段，用来计算导数 $f'(a), f''(a), \ldots$ 的值。

例。考虑方程

$$F(x,y) = Ax^m + By + xy\Phi(x,y) + Cx^{m+1} + \cdots + Dy^2 + \cdots = 0, \tag{3.5}$$

其中 $\Phi(x,y)$ 是 x,y 的多项式，而没有写出的项由两个多项式 $P(x)$ 与 $Q(y)$ 组成，它们分别可被 x^{m+1} 与 y^2 整除。假设系数 A 与 B 都不为零。当 x 趋近于零时，方程 (3.5) 有且只有一个趋近于零的根（§20）。为了把带余项的 Taylor 公式用于这个根，我们本来必须知道逐次导数，而这些导数可由一般规则计算出来。但我们可以用前面的方法更直接地进行。为此，先注意到这个无穷小根的主部等于 $-(A/B)x^m$。事实上，如果在方程 (3.5) 中作代换

$$y = x^m\left(-\frac{A}{B} + y_1\right),$$

再除以 x^m，就得到一个同样形式的方程：

$$F_1(x,y_1) = A_1x^{m_1} + By_1 + xy_1\Phi_1(x,y_1) + C_1x^{m_1+1} + \cdots + D_1y_1^2 + \cdots = 0, \tag{3.6}$$

其中关于 y_1 的线性项中，唯一不带额外 x 因子的主项是 By_1。当 x 趋近于零时，方程 (3.6) 在 y_1 中有一个无穷小根；因此，方程 (3.5) 的无穷小根具有如上所说的主部 $-(A/B)x^m$。同样，y_1 的主部为 $-(A_1/B)x^{m_1}$；于是可令

$$y = -\frac{A}{B}x^m + \left(-\frac{A_1}{B} + y_2\right)x^{m+m_1},$$

其中 y_2 是另一个无穷小；它的主部可以通过在方程 (3.6) 中作代换

$$y_1 = x^{m_1}\left(-\frac{A_1}{B} + y_2\right)$$

而求得。

如此继续，可把这个根 y 写成

$$y = \alpha x^m + \alpha_1 x^{m+n_1} + \alpha_2 x^{m+n_1+n_2} + \cdots + (\alpha_p + \epsilon)x^{m+n_1+\cdots+n_p},$$

并且可以推到任意远。所有数 $n_1, n_2, \ldots, n_p$ 的确都是正整数，这也是它们应当具有的性质，因为我们是在一般公式 (3.3) 适用的条件下进行。事实上，这样得到的展开，正是应用带余项的 Taylor 公式并令 $a=0, h=x$ 时所会得到的展开。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

再考虑第二个例子，其中指数不一定是正整数。令

$$y = \frac{Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \cdots}{1 + B_1 x^{\beta_1} + C_1 x^{\gamma_1} + \cdots},$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ 与 $\beta_1, \gamma_1, \ldots$ 是两列递增的正数，而系数 A 不为零。显然 y 的主部为 Ax^{α}，并且

$$y - Ax^{\alpha} = \frac{Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \cdots - Ax^{\alpha}(B_1 x^{\beta_1} + C_1 x^{\gamma_1} + \cdots)}{1 + B_1 x^{\beta_1} + C_1 x^{\gamma_1} + \cdots}.$$

这是一个与原式同样形式的表达式，其主部就是分子中次数最低的项。显然，我们可以用同一过程继续下去，求出展开中任意多个项。

设 $f(x)$ 是一个有 $n+1$ 个逐次导数的函数。在公式 (3.3) 中把 a 换成 x，得到

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \left[f^{(n)}(x) + \epsilon \right],$$

其中 ϵ 随 h 而趋近于零。另一方面，假设我们用任意方法得到了 $f(x+h)$ 的另一个同样形式的表达式:

$$f(x+h) = f(x) + h\phi_1(x) + h^2 \phi_2(x) + \cdots + h^n [\phi_n(x) + \epsilon'].$$

这两个展开必须逐项一致，因此系数 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 除某些数值因子外就等于 $f(x)$ 的逐次导数:

$$\phi_1(x) = f'(x), \qquad \phi_2(x) = \frac{f''(x)}{1 \cdot 2}, \qquad \ldots, \qquad \phi_n(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

这个说明有时可用于计算某些函数的导数。例如，假设要计算一个复合函数

$$y = f(u), \qquad u = \phi(x)$$

的 n 阶导数。略去关于 h 的高于 n 阶的项，有

$$k = \phi(x+h) - \phi(x) = \frac{h}{1} \phi'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \phi''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \phi^{(n)}(x);$$

同样，略去关于 k 的高于 n 阶的项，有

$$f(u+k) - f(u) = kf'(u) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} f''(u) + \cdots + \frac{k^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(u).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果在右端中把 k 代以表达式

$$\frac{h}{1}\phi'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\phi''(x)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}\phi^{(n)}(x),$$

并按 h 的升幂排列所得表达式，显然，被略去的项不会影响 $h, h^2, \ldots, h^n$ 中的各项。例如，h^n 的系数等于 $f[\phi(x)]$ 的 n 阶导数除以 $1\cdot 2\cdots n$；因此可写

$$D^n\{f[\phi(x)]\}=1\cdot 2\cdots n\left[A_1 f'(u)+A_2\frac{f''(u)}{1\cdot 2}+\cdots+A_n\frac{f^{(n)}(u)}{1\cdot 2\cdots n}\right],$$

其中 A_i 表示下列展开式中 h^n 的系数：

$$\left[\frac{h}{1}\phi'(x)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}\phi^{(n)}(x)\right]^i.$$

关于这个方法的更多细节，读者可参看 Hermite 的 *Cours d'Analyse*（第 59 页）。

47.　不定式

设 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是两个函数，它们对变量同一值 $x=a$ 都为零。我们来求当 h 趋近于零时比值

$$\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)}$$

所趋近的极限。这只是求两个无穷小之比的极限这一问题的一个特例。如果每个无穷小的主部已知，就可立即确定所求极限；当公式 (3.3) 对函数 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 在点 a 的邻域中都适用时，正是这种情形。设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处第一个不消失的导数是 p 阶导数 $f^{(p)}(a)$；同样，设 $\phi(x)$ 在 $x=a$ 处第一个不消失的导数是 q 阶导数 $\phi^{(q)}(a)$。对函数 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 分别应用公式 (3.3) 并相除，得到

$$\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)}=h^{p-q}\frac{1\cdot 2\cdots q\, f^{(p)}(a)+\epsilon}{1\cdot 2\cdots p\,\phi^{(q)}(a)+\epsilon'},$$

其中 ϵ 与 ϵ' 是两个无穷小。由此结果可知：如果 q 大于 p，给定比值在 h 趋近于零时绝对值无界（趋于无穷）；如果 q 小于 p，则趋近于零。但如果 $q=p$，给定比值趋近于 $f^{(p)}(a)/\phi^{(q)}(a)$，这个极限不等于零。

在求曲线切线时，有时会遇到这类不定式。设

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t),\qquad z=\psi(t)$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

是曲线 C 关于参数 t 的方程。我们在 §5 中已经看到，这条曲线在对应于参数值 t_0 的点 M 处的切线方程为

$$\frac{X-f(t_0)}{f'(t_0)}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi'(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

如果三个导数 $f'(t_0),\phi'(t_0),\psi'(t_0)$ 在 $t=t_0$ 时全为零，这些方程就化为恒等式。为了避免这个困难，我们回顾一下求切线方程时所用的推理。令 M' 为曲线 C 上靠近 M 的一点，并令 t_0+h 为对应的参数值。于是割线 MM' 的方程为

$$\frac{X-f(t_0)}{f(t_0+h)-f(t_0)}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi(t_0+h)-\phi(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}.$$

为保持一般性，设函数 $f(t),\phi(t),\psi(t)$ 的所有低于 p 阶（$p>1$）的导数在 $t=t_0$ 时都为零，但至少一个 p 阶导数不为零，例如 $f^{(p)}(t_0)$ 不为零。把前面各方程中的每个分母除以 h^p，并应用一般公式 (3.3)，便可把这些方程写成

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)+\epsilon}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi^{(p)}(t_0)+\epsilon'}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)+\epsilon''},$$

其中 $\epsilon,\epsilon',\epsilon''$ 是三个无穷小。现在令 h 趋近于零，这些方程的极限形式为

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi^{(p)}(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)},$$

在这种形式中，一切不定性都消失了。

曲线 C 上发生这种情形的点，一般是奇点，即曲线在形状上具有某种特殊性的点。例如，平面曲线

$$x=t^2,\qquad y=t^3$$

通过原点，并且在该点有 $dx/dt=dy/dt=0$。切线是 x 轴，而原点是第一类尖点。

48. Taylor 级数

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,a+h)$ 中具有任意阶导数，则公式 (3.3) 中的数 n 可以任意取大。如果当 n 无限增大时余项 R_n 趋近于零，我们便得到下列公式:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a)+\cdots, \quad (3.7)$$

它表示级数

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a)+\cdots$$

是收敛的，并且它的“和”[2]就是量 $f(a+h)$。这个公式 (3.7) 才是严格意义上的 Taylor 级数。但是，只有在能够证明当 n 为无穷大时余项 R_n 趋近于零时，它才是正当的；而一般公式 (3.3) 只假设前 $n+1$ 个导数的存在。把 a 换成 x，方程 (3.7) 可写成

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x) + \cdots .$$

或者，把 h 换成 x 并令 $a=0$，得到公式

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(0) + \cdots . \tag{3.8}$$

后一形式常称为 Maclaurin 级数；但应注意，所有这些不同形式本质上是等价的。方程 (3.8) 给出一个 x 的函数按 x 的幂展开；公式 (3.7) 给出一个 x 的函数按 h 的幂展开；要从这些形式之一过渡到另一个形式，只需作一个简单的记号改变。

只有在相当特殊的情形下，我们才能证明当 n 无限增大时余项 R_n 趋近于零。例如，如果当 x 介于 a 与 $a+h$ 之间时，任何阶导数的绝对值都小于一个固定数 M，则由 Lagrange 形式的余项可得

$$|R_n| < M\frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2\cdots (n+1)},$$

右端正是一个收敛级数的一般项。[3]例如函数 $e^x, \sin x, \cos x$ 就是如此。e^x 的所有导数都等于它自身，因此在所考察区间中有同一个最大值。在 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的情形下，绝对值从不超过一。所以公式 (3.7) 对这三个函数以及 a, h 的一切值都适用。我们只限于形式 (3.8)，先把它用于函数 $f(x)=e^x$。得到

$$f(0)=1, \qquad f'(0)=1, \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(0)=1, \qquad \ldots;$$

因而有公式

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n} + \cdots , \tag{3.9}$$

它适用于 x 的所有正值和负值。如果 a 是任一正数，则 $a^x = e^{x\log a}$，前一公式化为

$$a^x = 1 + \frac{x\log a}{1} + \frac{(x\log a)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{(x\log a)^n}{1\cdot 2\cdots n} + \cdots . \tag{3.10}$$

[2]也就是说，当 n 变为无限大时，前 n 项和的极限。关于技术性短语“级数的和”的意义，见 §157。——英译者

[3]选择的次序是 a, h, M, n，而不是 a, h, n, M。这一点对于所论级数的收敛性是本质的。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

现在取 $f(x) = \sin x$。逐次导数形成四项循环序列 $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$；它们在 $x = 0$ 时的值形成另一循环序列 $1, 0, -1, 0$。因此，对 x 的任意正值或负值，都有

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)} + \cdots ; \quad (3.11)$$

类似地,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} + \cdots . \quad (3.12)$$

现在回到一般情形。对余项 R_n 的讨论很少像前面的例子那样容易；不过，若余项趋近于零，则级数

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(a) + \cdots$$

必然收敛，这一说明使问题略为简化。一般说来，在考察 R_n 之前，最好先看这个级数是否收敛。若对给定的 a, h 值该级数发散，就无须继续讨论；可以立即说，R_n 在 n 无限增大时并不趋近于零。

49. $\log(1 + x)$ 的展开

函数 $\log(1 + x)$ 连同它的所有导数，只要 x 大于 -1 就是连续的。逐次导数如下:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(1+x)^{n+1}}.$$

我们看 Maclaurin 公式 (3.8) 对这个函数可用于哪些 x 值。先写出带余项的级数，在任何情形下都有

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n.$$

余项 R_n 只有在级数

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

收敛时才可能趋近于零；这个级数在且仅在 $-1 < x \le 1$ 时收敛。当 x 位于这个区间中时，余项可写成 Cauchy 形式:

$$R_n = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n .$$

先考虑 $|x| < 1$ 的情形。第一因子 x^{n+1} 在 n 无限增大时趋近于零；并且 $0 \le 1-\theta < 1+\theta x$，因为 $(1+\theta x)-(1-\theta) = \theta(1+x) > 0$。因此

$$0 \le \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1,$$

而 $1/(1+\theta x)$ 也有固定上界 $1/(1-|x|)$。所以余项 R_n 的确在 n 无限增大时趋近于零。当 $x = -1$ 时这不成立，因为该值下级数发散。但当 $x = 1$ 时，可使用 Lagrange 形式的余项:

$$R_n = (-1)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^{n+1},$$

它显然趋近于零。于是，当 $-1 < x \le 1$ 时，有公式

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots . \tag{3.13}$$

这个公式在 $x = 1$ 时仍成立，从而给出有趣的关系

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots . \tag{3.14}$$

公式 (3.13) 只在 $-1 < x \le 1$ 时成立，因此不能直接用来计算任意整数的对数。把 x 换成 $-x$。所得新公式

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \tag{3.15}$$

在 $-1 \le x < 1$ 时成立；把对应两边相减（此时 $|x| < 1$），得到公式

$$\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right). \tag{3.16}$$

当 x 从 0 变到 1 时，有理分式 $(1+x)/(1-x)$ 从 1 稳定增大到 $+\infty$，因此现在可以容易地计算所有整数的对数。不过，还可通过求相邻两个整数的对数之差，得到一个收敛更快的级数。为此令

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}, \qquad \text{即} \qquad x = \frac{1}{2N+1}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

前一公式就成为

$$\log(N+1)-\log N=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\cdots\right],$$

其右端是一个收敛很快的级数，特别是在 N 很大时更是如此。

注。把一般公式 (3.3) 用于函数 $\log(1+x)$，令 $a=0, h=x, n=1$，并取 Lagrange 形式的余项。这样得到

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}.$$

如果现在把 x 换成整数 n 的倒数，就可写成

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{2n^2},$$

其中 θ_n 是一个小于一的正数。由这个方程可以推出一些有趣的结果。

1) 由于调和级数发散，和

$$\Sigma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

随 n 而无限增大。但是差

$$\Sigma_n-\log n$$

趋近于一个有限极限。事实上，把这个差写成

$$\left(1-\log\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{p}-\log\frac{p+1}{p}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)+\log\frac{n+1}{n}.$$

现在 $1/p-\log(1+1/p)$ 是一个收敛级数的一般项；因为由上面的方程,

$$\frac{1}{p}-\log\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{\theta_p}{2p^2},$$

这说明这一项小于收敛级数 $\sum 1/p^2$ 的一般项。当 n 无限增大时, 表达式

$$\log\frac{n+1}{n}=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

趋近于零。因此所考察的差趋近于一个有限极限，这个极限称为 Euler 常数。它精确到二十位小数的值是

$$C = 0.57721566490153286060.$$

2) 考虑表达式

$$\Sigma = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p},$$

其中 n 与 p 是两个将要无限增大的正整数。于是可以写

$$\Sigma = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+p} = \log(n+p)+\rho_{n+p}, \qquad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \log n+\rho_n,$$

其中 ρ_{n+p} 与 ρ_n 在 n 与 p 无限增大时趋近于同一个值 C。因而也有

$$\Sigma = \log\left(1 + \frac{p}{n}\right) + \rho_{n+p} - \rho_n.$$

现在差 $\rho_{n+p} - \rho_n$ 趋近于零。因此和 Σ 没有极限，除非比值 p/n 趋近于一个极限。如果这个比值的确趋近于极限 α，则和 Σ 趋近于极限 $\log(1+\alpha)$。例如，令 $p = n$，便可看出和

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

趋近于极限 $\log 2$。

50.　函数 (1+x) 的 m 次幂的展开

对任意 m 值，只要 $1+x$ 为正，函数 $(1+x)^m$ 就有定义且连续，并且它的所有导数都存在而且是 x 的连续函数；因为这些导数与给定函数具有同样的形式：

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n)(1+x)^{m-n-1}.$$

应用一般公式 (3.3)，得到

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + R_n;$$

而为了使余项 R_n 趋近于零，首先必须使一般项为

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n$$

的级数收敛。但任一项与前一项之比为

$$\frac{m-n+1}{n}x,$$

当 n 无限增大时趋近于 $-x$。因此，排除 m 为正整数并由此导出初等二项式定理的情形后，所论级数只有在 $|x| < 1$ 时才可能收敛。我们只限于 $|x| < 1$ 的情形。

为证明余项趋近于零，把它写成 Cauchy 形式：

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots n}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}.$$

第一因子

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots n}x^{n+1}$$

趋近于零,因为它是一个收敛级数的一般项。第二因子满足 $0 \le (1-\theta)/(1+\theta x) < 1$；这仍由 $(1+\theta x)-(1-\theta) = \theta(1+x) > 0$ 得到。最后一个因子 $(1+\theta x)^{m-1}$ 小于一个固定界。事实上，如果 $m-1>0$，则 $(1+\theta x)^{m-1} < 2^{m-1}$；而如果 $m-1<0$，则 $(1+\theta x)^{m-1} < (1-|x|)^{m-1}$。于是对每一个满足 $|x|<1$ 的值，都有展开

$$\begin{aligned}(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + \cdots .\end{aligned} \tag{3.17}$$

我们暂且推迟讨论 $x=\pm 1$ 的情形。

用同样的方法，可以建立下列公式：

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots ,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

我们以后将用一种更简单的过程证明这些公式；它们对 x 介于 -1 与 $+1$ 之间的一切值成立。

除这些例子和少数其他例子外，余项的讨论由于逐次导数越来越复杂而显得非常困难。因此，从这初次考察来看，似乎 Taylor 级数在把函数展开成无穷级数方面的应用相当有限。然而这样的印象是完全错误的；恰恰相反，这些展开在现代数学分析中起着根本作用。为了了解它们的重要性，必须换一个观点，独立于它们的来源而研究幂级数本身的性质。我们将在以后几章中进行这一研究。

眼下我们只指出，级数

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(0) + \cdots$$

完全可能收敛，却并不表示产生它的函数 $f(x)$。下面的例子出自 Cauchy。设 $f(x) = e^{-1/x^2}$。则 $f'(x) = (2/x^3)e^{-1/x^2}$；一般地，$n$ 阶导数形如

$$f^{(n)}(x) = \frac{P}{x^m} e^{-1/x^2},$$

其中 P 是一个多项式。所有这些导数在 $x = 0$ 时都消失，因为 e^{-1/x^2} 除以 x 的任何正幂所得商，都随 x 而趋近于零。[4]事实上，令 $x = 1/z$，可写成

$$\frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} = \frac{z^m}{e^{z^2}};$$

而众所周知，不论 m 多大，e^{z^2}/z^m 都随 z 而无限增大。再设 $\phi(x)$ 是一个公式 (3.8) 适用的函数：

$$\phi(x) = \phi(0) + \frac{x}{1} \phi'(0) + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \phi^{(n)}(0) + \cdots.$$

令 $F(x) = \phi(x) + e^{-1/x^2}$，则

$$F(0) = \phi(0), \qquad F'(0) = \phi'(0), \qquad \ldots, \qquad F^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(0), \qquad \ldots,$$

[4]这里默认为 $f(0) = 0$，这是唯一能使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续的赋值。但应注意，对于 $x = 0$ 处的 $f'(x)$ 等，并不需要再作赋值。因为

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

这就定义了 $x = 0$ 处的 $f'(x)$，并使 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；等等。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，按 Maclaurin 级数展开 $F(x)$ 所得展开将与前一个展开一致。这样得到的级数的和所表示的函数，与产生这个级数的函数完全不同。

一般地, 如果两个不同的函数 $f(x)$ 与 $\phi(x)$, 连同它们所有的导数, 在 $x=0$ 时都相等，那么显然，这两个函数的 Maclaurin 级数展开不可能同时有效，因为这两个展开的系数一致。

51. 推广到多元函数

为明确起见，考虑三个自变量 x, y, z 的函数 $w = f(x, y, z)$，并尝试把 $f(x+h, y+k, z+l)$ 按 h, k, l 的幂展开，同时把同次项合并在一起。Cauchy 用如下方法把这个问题化归为前一个问题。给 x, y, z, h, k, l 以确定的值，并令

$$\phi(t) = f(x+ht, y+kt, z+lt),$$

其中 t 为辅助变量。函数 $\phi(t)$ 只依赖于 t；若对它应用带余项的 Taylor 公式，就得到

$$\begin{aligned}\phi(t) = \phi(0) + \frac{t}{1}\phi'(0) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\phi''(0) + \cdots + \frac{t^n}{1\cdot 2\cdots n}\phi^{(n)}(0) \\ + \frac{t^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\phi^{(n+1)}(\theta t),\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $\phi(0), \phi'(0), \ldots, \phi^{(n)}(0)$ 是函数 $\phi(t)$ 及其各导数在 $t = 0$ 时的值；而 $\phi^{(n+1)}(\theta t)$ 是 $n+1$ 阶导数在值 θt 处的值，θ 介于零与一之间。但可把 $\phi(t)$ 看作 t 的复合函数,

$$\phi(t) = f(u, v, w),$$

其中辅助函数

$$u = x + ht, \qquad v = y + kt, \qquad w = z + lt$$

都是 t 的线性函数。由前面的一个说明，m 阶微分 $d^m\phi$ 的表达式，与把 u, v, w 看作自变量时的表达式相同。因此有符号方程

$$d^m\phi = \left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw\right)^m = dt^m\left(h\frac{\partial f}{\partial u} + k\frac{\partial f}{\partial v} + l\frac{\partial f}{\partial w}\right)^m,$$

除以 dt^m 后可写成

$$\phi^{(m)}(t) = \left(h\frac{\partial f}{\partial u} + k\frac{\partial f}{\partial v} + l\frac{\partial f}{\partial w}\right)^m.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这里的幂号应按 §15 的符号约定展开：它表示相应方向微分算子的反复作用，而不是普通代数乘方。当 $t=0$ 时，u,v,w 分别化为 x,y,z；于是上式用同样的符号写法化为

$$\phi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{m}.$$

类似地，

$$\phi^{(n+1)}(\theta t)=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{n+1},$$

这里在表达式展开之后，要把 x,y,z 分别换成 $x+\theta ht, y+\theta kt, z+\theta lt$。现在在 (3.18) 中令 $t=1$，便得到

$$\begin{aligned}
&f(x+h,y+k,z+l)\\
&=f(x,y,z)+\frac{1}{1}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{n}+R_n.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

余项 R_n 可写成

$$R_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{n+1},$$

其中表达式展开之后，要把 x,y,z 换成 $x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$。[5]

公式 (3.19) 与一般公式 (3.3) 完全类似。如果对给定的 x,y,z,h,k,l 值，余项 R_n 在 n 无限增大时趋近于零，那么我们就得到 $f(x+h,y+k,z+l)$ 的一个级数展开；其中每一项都是 h,k,l 的齐次多项式。不过，一般很难从 R_n 的表达式看出这个余项是否趋近于零。

52. 应用

由公式 (3.19)，容易推出一些类似于一元自变量情形下由一般公式 (3.3) 所得的结论。例如，设 $z=f(x,y)$ 是曲面 S 的方程。如果函数 $f(x,y)$ 连同它直到某一阶 n 的所有偏导数，在点 (x_0,y_0) 的邻域中连续，则公式 (3.19) 给出

$$\begin{aligned}
f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0,y_0}+\cdots\\
+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{n}_{x_0,y_0}+R_n.
\end{aligned}$$

[5]这里假定所用的一切导数都存在且连续。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在右端中，若只取前两项，再取前三项，如此等等，就分别得到一个平面方程、一个抛物面方程，等等；它们在点 (x_0, y_0) 附近与给定曲面相差很小。所说的平面正是切平面；而这个抛物面是族

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

中通过点 (x_0, y_0) 并且与曲面有二阶接触的那一个。

公式 (3.19) 也用于确定以不定形式给出的函数的极限值。设 $f(x, y)$ 与 $\phi(x, y)$ 是两个函数，它们在 $x = a, y = b$ 时都为零，而且它们连同直到某一阶的偏导数，在点 (a, b) 附近连续。试求当 x 与 y 分别趋近于 a 与 b 时比值

$$\frac{f(x, y)}{\phi(x, y)}$$

所趋近的极限。先假设四个一阶导数 $f_x(a, b), f_y(a, b), \phi_x(a, b), \phi_y(a, b)$ 不全同时为零，则可写

$$\frac{f(a+h, b+k)}{\phi(a+h, b+k)} = \frac{h\left(f_x(a, b) + \epsilon\right) + k\left(f_y(a, b) + \epsilon'\right)}{h\left(\phi_x(a, b) + \epsilon_1\right) + k\left(\phi_y(a, b) + \epsilon'_1\right)},$$

其中 $\epsilon, \epsilon', \epsilon_1, \epsilon'_1$ 都随 h, k 而趋近于零。当点 (x, y) 趋近于 (a, b) 时，h 与 k 趋近于零；并假设比值 k/h 趋近于某一极限 α，也就是说，点 (x, y) 描述一条在点 (a, b) 有切线的曲线。把前一比值的各项都除以 h，可以看出分式 $f(x, y)/\phi(x, y)$ 趋近于极限

$$\frac{f_x(a, b) + \alpha f_y(a, b)}{\phi_x(a, b) + \alpha \phi_y(a, b)}.$$

这个极限一般依赖于 α，也就是说，依赖于 x 与 y 分别趋近其极限 a 与 b 的方式。为了使这个极限与 α 无关，必须有关系

$$f_x(a, b)\,\phi_y(a, b) - f_y(a, b)\,\phi_x(a, b) = 0$$

成立；一般说来并非如此。

如果四个一阶导数 $f_x(a, b), f_y(a, b), \phi_x(a, b), \phi_y(a, b)$ 同时为零，则应取公式 (3.19) 中的二阶项，并写成

$$\frac{f(a+h, b+k)}{\phi(a+h, b+k)} = \frac{\begin{array}{c}\left(f_{xx}(a, b) + \epsilon\right) h^2 + 2\left(f_{xy}(a, b) + \epsilon'\right) hk \\ + \left(f_{yy}(a, b) + \epsilon''\right) k^2\end{array}}{\begin{array}{c}\left(\phi_{xx}(a, b) + \epsilon_1\right) h^2 + 2\left(\phi_{xy}(a, b) + \epsilon'_1\right) hk \\ + \left(\phi_{yy}(a, b) + \epsilon''_1\right) k^2\end{array}},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon_1, \epsilon_1', \epsilon_1''$ 是无穷小。于是，如果 α 仍具有上面的意义，就可看出左端的极限为

$$\frac{f_{xx}(a,b) + 2\alpha f_{xy}(a,b) + \alpha^2 f_{yy}(a,b)}{\phi_{xx}(a,b) + 2\alpha\phi_{xy}(a,b) + \alpha^2\phi_{yy}(a,b)},$$

这个极限一般也依赖于 α。

II. 奇点、极大与极小

53. 奇点

设 (x_0, y_0) 是方程

$$F(x,y) = 0$$

所表示的曲线 C 上一点 M_0 的坐标。如果两个一阶偏导数 F_x, F_y 在这一点不同时为零，我们已经见过（§22），曲线 C 只有一个分支通过该点，并且该点处切线方程为

$$(X - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + (Y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

这里下标 0 表示导数要在 (x_0, y_0) 处取值。如果 F_x 与 F_y 在这一点都为零，则点 (x_0, y_0) 一般是一个奇点。[6]设三个二阶导数在 $x = x_0, y = y_0$ 时不全同时为零，并且这些导数连同三阶导数在该点附近连续。于是曲线方程可以写成

$$\begin{aligned} 0 = F(x,y) = \frac{1}{2}\big[F_{xx}^0(x-x_0)^2 + 2F_{xy}^0(x-x_0)(y-y_0) + F_{yy}^0(y-y_0)^2\big] \\ + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 F(x_\theta, y_\theta), \end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$x_\theta = x_0 + \theta(x - x_0), \qquad y_\theta = y_0 + \theta(y - y_0), \qquad 0 < \theta < 1.$$

我们可以假定导数 F_{yy}^0 不为零；因为无论如何，总可以通过坐标轴变换使这一点成立。于是令

$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

并除以 $(x - x_0)^2$，方程 (19) 成为

$$F_{xx}^0 + 2tF_{xy}^0 + t^2F_{yy}^0 + (x - x_0)P(x - x_0, t) = 0, \tag{20}$$

[6]也就是说，曲线在这一点的形状一般有特殊性。关于奇点的精确分析定义，见 §192。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这里 $P(x-x_0,t)$ 是当 x 趋近 x_0 时保持有限的函数。现在令 t_1,t_2 为方程

$$F_{xx}^0+2tF_{xy}^0+t^2F_{yy}^0=0$$

的两个根。如果这两个根实而不等，也就是说，如果

$$(F_{xy}^0)^2>F_{xx}^0F_{yy}^0,$$

则方程 (20) 可以写成

$$F_{yy}^0(t-t_1)(t-t_2)+(x-x_0)P=0.$$

当 $x=x_0$ 时，上面的二次方程有两个相异根 $t=t_1,t=t_2$。当 x 趋近 x_0 时，这个方程有两个根分别趋近于 t_1 与 t_2。这只需重复隐函数存在性的论证即可证明。比如令 $t=t_1+u$，写出联结 x 与 u 的方程:

$$u(t_1-t_2+u)+(x-x_0)Q(x,u)=0,$$

其中当 x 趋近 x_0 且 u 趋近零时，$Q(x,u)$ 保持有限。为确定起见，设 $t_1-t_2>0$；当 x 位于 x_0-h 与 x_0+h 之间、u 位于 $-h$ 与 $+h$ 之间时，其中 h 是一个小于 t_1-t_2 的正数，令 M 表示 $|Q(x,u)|$ 的一个上界，m 表示 t_1-t_2+u 的一个下界。现在令 ε 是小于 h 的正数，并令 η 是满足两个不等式

$$\eta<h,\qquad \eta<\frac{m}{M}\varepsilon$$

的另一个正数。如果给 x 一个使 $|x-x_0|<\eta$ 的值，那么在上述方程左端分别用 $-\varepsilon$ 与 $+\varepsilon$ 代替 u，所得符号相反。因此该方程有一个随 x 趋近 x_0 而趋近零的根；方程 (19) 有一个形如

$$y=y_0+(x-x_0)(t_1+\alpha)$$

的根，其中 α 随 $x-x_0$ 而趋近于零。由此可知，曲线 C 有一个分支在点 (x_0,y_0) 处与直线

$$y-y_0=t_1(x-x_0)$$

相切。用同样方法容易看出，曲线另有一个分支通过同一点，并与直线

$$y-y_0=t_2(x-x_0)$$

相切。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

点 M_0 叫作*双重点*;该点处切线组的方程可由令 (19) 中关于 $(x-x_0), (y-y_0)$ 的二次项等于零得到。

如果

$$(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 < 0,$$

点 (x_0, y_0) 叫作*孤立双重点*。以 M_0 为中心的一个足够小的圆内部，方程 (19) 的左端 $F(x,y)$ 除在点 M_0 本身外不为零。事实上，取

$$x = x_0 + \rho\cos\phi, \qquad y = y_0 + \rho\sin\phi$$

作为 M_0 附近一点的坐标。于是

$$F(x,y) = \frac{\rho^2}{2}\left(F_{xx}^0\cos^2\phi + 2F_{xy}^0\cos\phi\sin\phi + F_{yy}^0\sin^2\phi + \rho L\right),$$

其中当 ρ 趋近零时 L 保持有限。令 H 为 ρ 小于某个正数 r 时 $|L|$ 的一个上界。对于 ϕ 在 0 与 2π 之间的所有值，表达式

$$F_{xx}^0\cos^2\phi + 2F_{xy}^0\cos\phi\sin\phi + F_{yy}^0\sin^2\phi$$

符号相同，因为它的根是虚的。令 m 是其绝对值的一个下界。于是显然，只要点位于半径 $\rho < m/H$ 的圆内，ρ^2 的系数就不会为零。因此在这个圆内，方程 $F(x,y) = 0$ 除 $\rho = 0$ 即 $x = x_0, y = y_0$ 外没有根。

在

$$(F_{xy}^0)^2 = F_{xx}^0 F_{yy}^0$$

的情形，双重点处的两条切线重合；一般说来，给定曲线有两个分支与同一条直线相切，从而形成一个尖点。对这种情形作穷尽研究相当细致，将留到以后再讨论。现在我们只指出，可能出现的情形比刚才讨论的两种要多得多；下面的例子即可说明。

曲线 $y^2 = x^3$ 在原点有第一类尖点；曲线的两个分支都切于 x 轴，并位于这条切线的两侧，且在 y 轴的右方。曲线

$$y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0$$

有第二类尖点；曲线的两个分支都切于 x 轴，并位于这条切线的同侧。因为方程可写作

$$y = x^2 \pm x^{5/2},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 x 很小时，y 的两个值具有相同符号，而且只有当 x 为正时它们才是实的。曲线

$$x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=0$$

有两个分支在原点切于 x 轴，但除此之外没有任何其他特殊性；因为解出 y 得

$$y=\frac{3x^2\pm x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2},$$

根号前对应于两个符号的两个分支，在原点都没有任何奇性。

还有可能发生曲线由两个重合分支组成的情形。方程

$$F(x,y)=y^2-2x^2y+x^4=0$$

表示的曲线就是这样。当点 (x,y) 穿过这条曲线时，左端 $F(x,y)$ 为零但不改变符号。最后，点 (x_0,y_0) 也可能是孤立双重点。曲线

$$y^2+x^4+y^4=0$$

就是这种情形；在这条曲线上，原点是一个孤立双重点。

54. 曲面的奇点

类似地，方程

$$F(x,y,z)=0$$

所表示的曲面 S 上一点 M_0，如果三个一阶偏导数在该点坐标 x_0,y_0,z_0 处为零，即

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=0,\qquad\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=0,\qquad\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0,$$

则一般为该曲面的一个奇点。前面得到的切平面方程（§22）于是化为恒等式；如果六个二阶偏导数在同一点不全为零，则一般说来，曲面 S 上通过点 M_0 的所有曲线的切线轨迹是一个二阶锥面。事实上，令

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t),\qquad z=\psi(t)$$

为曲面 S 上一条曲线 C 的方程。于是三个函数 $f(t),\phi(t),\psi(t)$ 满足方程 $F(x,y,z)=0$，其一阶与二阶微分满足两个关系

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0.$$

当 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 时，第一个方程化为恒等式，第二个方程成为

$$F_{xx}^0dx^2+F_{yy}^0dy^2+F_{zz}^0dz^2+2F_{xy}^0dx\,dy+2F_{yz}^0dy\,dz+2F_{xz}^0dx\,dz=0.$$

把这个后一方程与切线方程

$$\frac{X-x_0}{dx}=\frac{Y-y_0}{dy}=\frac{Z-z_0}{dz}$$

中的 dx, dy, dz 消去，便得到切线轨迹的方程，即二阶锥面 T 的方程:

$$\begin{aligned}&F_{xx}^0(X-x_0)^2+F_{yy}^0(Y-y_0)^2+F_{zz}^0(Z-z_0)^2\\&\quad+2F_{xy}^0(X-x_0)(Y-y_0)+2F_{yz}^0(Y-y_0)(Z-z_0)\\&\quad+2F_{xz}^0(X-x_0)(Z-z_0)=0.\end{aligned}\tag{21}$$

另一方面，应用带余项的 Taylor 公式并展开到三次项，曲面方程成为

$$\begin{aligned}0=F(x,y,z)=&\frac{1}{1\cdot 2}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]^2F\Big|_0\\&+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]^3F_\theta,\end{aligned}\tag{22}$$

其中 $|_0$ 表示在 (x_0, y_0, z_0) 处取值，而在三阶项中，x, y, z 分别要换成 $x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0), z_0+\theta(z-z_0)$。锥面 T 的方程可由令方程 (22) 中关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的二次项等于零得到。

先设方程 (21) 表示一个实的非退化锥面。用一平面 P 截曲面 S 与锥面 T，该平面通过锥面的两条不同母线 G 与 G'。为了求曲面 S 被这个平面截得的截线方程，想象施行一个坐标变换，使平面 P 变为平行于 xy 平面的平面。于是只需在方程 (22) 中代入 $z=z_0$。显然，对于这条曲线，点 M_0 是一个具有实切线的双重点；由刚才所见，这个截线由两个分支组成，它们分别切于两条母线 G, G'。因此，曲面 S 在点 M_0 附近类似于一个二阶锥面在顶点附近的两个锥叶。点 M_0 因而叫作*锥点*。

当方程 (21) 表示一个虚的非退化锥面时，点 M_0 是曲面 S 的孤立奇点。以这样一点为中心的一个足够小的球内，方程 $F(x,y,z)=0$ 除 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 以外没有任何其他解。事实上，令 M 是空间中靠近 M_0 的一点，ρ 是距离 MM_0，α, β, γ 是直线 M_0M 的方向余弦。若代入

$$x=x_0+\rho\alpha,\qquad y=y_0+\rho\beta,\qquad z=z_0+\rho\gamma,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

则函数 $F(x,y,z)$ 成为

$$F(x,y,z)=\frac{\rho^2}{2}\left(F_{xx}^0\alpha^2+F_{yy}^0\beta^2+\cdots+2F_{xz}^0\alpha\gamma+\rho L\right),$$

其中当 ρ 趋近零时 L 保持有限。既然方程 (21) 表示虚锥面，表达式

$$F_{xx}^0\alpha^2+\cdots+2F_{xz}^0\alpha\gamma$$

在点 (α,β,γ) 描述球面

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

时不可能为零。令 m 是该多项式绝对值的一个下界，H 是 M_0 附近 $|L|$ 的一个上界。以 M_0 为中心作半径 m/H 的球，显然在此球内，$F(x,y,z)$ 表达式中 ρ^2 的系数不能为零。因此方程

$$F(x,y,z)=0$$

除 $\rho=0$ 外没有根。

当方程 (21) 表示两个不同实平面时，给定曲面有两个叶片通过点 M_0，其中每一个都切于这两个平面之一。某些曲面具有一条双重点线；在这条线的每一点，切锥退化成两个平面。这条线就是曲面上的一条二重曲线，沿此线两个不同叶片彼此交叉。例如，由方程 $z=0, x^2+y^2=1$ 表示的圆，是方程

$$z^4+2z^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2-1)^2=0$$

所表示曲面上的一条二重点线。当方程 (21) 表示一对共轭虚平面或一个二重实平面时，必须在每个具体情形中作专门研究，才能确定曲面在点 M_0 附近的形状。上面的讨论将在关于极值的段落中重新出现。

55. 一元函数的极值

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中连续，并设 c 是该区间中的一点。如果能找到一个正数 η，使得差 $f(c+h)-f(c)$ 在 $h=0$ 时为零，并且对 $-\eta$ 与 $+\eta$ 之间一切其他的 h 值都保持同一符号，则称函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 时有一个*极值*（即极大或极小）。如果这个差为正，则函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 时的值小于在 c 附近任一点的值；称函数在该点有一个*极小*。相反，如果差 $f(c+h)-f(c)$ 为负，就称函数有一个*极大*。

如果函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处有导数，则这个导数必须为零。因为两个商

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h},\qquad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在 h 趋近零时都趋近于极限 $f'(c)$, 但二者符号相反; 因此它们的共同极限 $f'(c)$ 必须为零。反过来，设 c 是方程 $f'(x)=0$ 的一个根，位于 a 与 b 之间；为了一般性起见，再设在 $x=c$ 处第一个不为零的导数是 n 阶导数，并且这个导数在 $x=c$ 处连续。于是带余项的 Taylor 公式，若停在 n 项，给出

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(c+\theta h),$$

这可写成

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}\big[f^{(n)}(c)+\epsilon\big],$$

其中 ϵ 随 h 而趋近于零。令 η 是一个正数，使得当 $|h|<\eta$ 时，$|\epsilon|<|f^{(n)}(c)|$。对于这样的 x 值，$f^{(n)}(c)+\epsilon$ 与 $f^{(n)}(c)$ 符号相同; 从而 $f(c+h)-f(c)$ 与 $h^n f^{(n)}(c)$ 符号相同。如果 n 是奇数，显然这个差随 h 改变符号，于是在 $x=c$ 处既无极大也无极小。如果 n 是偶数，则无论 h 为正还是为负，$f(c+h)-f(c)$ 都与 $f^{(n)}(c)$ 符号相同；因此若 $f^{(n)}(c)$ 为负，函数有极大；若 $f^{(n)}(c)$ 为正，函数有极小。由此可得，在上述假设下，函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处有极大或极小的充要条件，是在 $x=c$ 处第一个不为零的导数具有偶数阶。

几何上，前面的条件意味着曲线 $y=f(x)$ 在横坐标为 c 的点 A 处的切线必须平行于 x 轴；并且点 A 还不能是拐点。

注。当我们所作的假设不满足时，函数 $f(x)$ 也可能有极大或极小，虽然导数 $f'(x)$ 并不为零。例如，如果导数在 $x=c$ 时为无穷大，那么只要导数改变符号，函数就有极大或极小。因此函数 $y=x^{2/3}$ 在 $x=0$ 时有极小；相应曲线在原点有尖点，切线为 y 轴。

当如题设那样，变量 x 限制在两个界限 a 与 b 之间时，函数的绝对极大值与极小值可能恰好在这些界点取得，尽管导数 $f'(x)$ 在那里并不为零。例如，设要求坐标为 $(a,0)$ 的一点 P 到方程为 $x^2+y^2-R^2=0$ 的圆 C 的最短距离。若选圆 C 上一点 M 的横坐标为自变量，则

$$d^2=PM^2=(x-a)^2+y^2=x^2+y^2-2ax+a^2,$$

或者利用圆方程，得

$$d^2=R^2+a^2-2ax.$$

一般规则会使我们去寻找导出方程 $2a=0$ 的根，这是荒谬的。不过，如果注意到由题目本身的性质，变量 x 必须位于 $-R$ 与 $+R$ 之间，矛盾便得到解释。如果 a 为正，d^2 在 $x=R$ 时有极小，在 $x=-R$ 时有极大。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

56. 二元函数的极值

设 $f(x, y)$ 是 x, y 的连续函数，当坐标为 x, y 的点 M 位于由轮廓 C 围成的区域 Ω 内时定义。若能找到一个正数 η，使得差

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

在 $h = k = 0$ 时为零，并且对于增量 h, k 的所有其他值组，只要二者绝对值均小于 η，该差保持同一符号，则称函数 $f(x, y)$ 在区域 Ω 的点 $M_0(x_0, y_0)$ 处有极值。暂时把 y 看作常量并等于 y_0，则 z 成为单变量 x 的函数；由上面的结果可知，差

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

若要在小的 h 值下保持同一符号，必须使导数 $\partial f/\partial x$ 在点 M_0 处为零。同样，导数 $\partial f/\partial y$ 也必须在 M_0 处为零；显然，能使函数 $f(x, y)$ 取极值的可能的 x, y 值组，只能在联立方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

的解中寻找。

设 $x = x_0, y = y_0$ 是这两个方程的一组解。我们假定 $f(x, y)$ 的二阶偏导数在坐标为 (x_0, y_0) 的点 M_0 处不全同时为零，并且它们连同三阶导数在 M_0 附近都连续。于是由 Taylor 展开得

$$\begin{aligned}\Delta &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2}\left(h^2 f_{xx}^0 + 2hk f_{xy}^0 + k^2 f_{yy}^0\right) + \frac{1}{6}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}_{x_0+\theta h,\, y_0+\theta k}.\end{aligned} \tag{23}$$

可以预见，表达式

$$h^2 f_{xx}^0 + 2hk f_{xy}^0 + k^2 f_{yy}^0$$

一般将支配整个讨论。

为了在 M_0 处有极值，充要条件是：当点 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 位于一个以 M_0 为中心的足够小的正方形内部任意位置时，除中心点处 $\Delta = 0$ 外，差 Δ 具有同一符号。因此，当点 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 位于一个以 M_0 为中心、足够小的圆内部任意位置时，Δ 也必须具有同一符号；因为这样的正方形总可以换成其内切圆，反过来也一样。令 C 是以 M_0 为中心、半径为 r 的圆。圆内所有点由

$$h = \rho\cos\phi, \qquad k = \rho\sin\phi$$

给出，其中 ϕ 从 0 到 2π 变化，而 ρ 从 $-r$ 到 $+r$ 变化。实际上本可限制 ρ 为正，但在下面最好不加此限制。作此代换后，Δ 的表达式成为

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\left(A\cos^2\phi + 2B\sin\phi\cos\phi + C\sin^2\phi\right) + \frac{\rho^3}{6}L,$$

其中

$$A = f_{xx}^0, \qquad B = f_{xy}^0, \qquad C = f_{yy}^0,$$

而 L 是一个函数；写出它的展开式没有用处，但它在点 (x_0, y_0) 附近保持有限。现在必须按照 $B^2 - AC$ 的符号分几种情形讨论。

第一种情形：设 $B^2 - AC > 0$。则方程

$$A\cos^2\phi + 2B\sin\phi\cos\phi + C\sin^2\phi = 0$$

作为关于 $\tan\phi$ 的方程有两个实根，并且左端是两个平方之差。因此可写成

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\left[\alpha(a\cos\phi + b\sin\phi)^2 - \beta(a'\cos\phi + b'\sin\phi)^2\right] + \frac{\rho^3}{6}L,$$

其中

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0, \qquad ab' - ba' \neq 0.$$

如果给 ϕ 一个满足方程

$$a\cos\phi + b\sin\phi = 0$$

的值，则对于足够小的 ρ，Δ 为负；而如果 ϕ 使 $a'\cos\phi + b'\sin\phi = 0$，则对于无穷小的 ρ，Δ 为正。因此找不到一个数 r，使得当 $\rho < r$ 时，差 Δ 对任意 ϕ 值都具有同一符号。由此可知，函数 $f(x, y)$ 在 $x = x_0, y = y_0$ 处既无极大也无极小。

第二种情形：设 $B^2 - AC < 0$。表达式

$$A\cos^2\phi + 2B\cos\phi\sin\phi + C\sin^2\phi$$

对任何 ϕ 值都不可能为零。令 m 是其绝对值的一个下界；再令 H 是以 (x_0, y_0) 为中心、半径为 R 的圆内函数 L 绝对值的一个上界。最后令 r 是一个小于 R 且小于 $3m/H$ 的正数。那么在半径为 r 的圆内，差 Δ 与 ρ^2 的系数符号相同，也就是与 A 或 C 的符号相同。因此函数 $f(x, y)$ 在 $x = x_0, y = y_0$ 处有极大或极小。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

综上，如果在点 (x_0, y_0) 有

$$(f_{xy}^0)^2 - f_{xx}^0 f_{yy}^0 > 0,$$

则既无极大也无极小。但如果

$$(f_{xy}^0)^2 - f_{xx}^0 f_{yy}^0 < 0,$$

则有极大或极小，取决于两个导数 f_{xx}^0, f_{yy}^0 的符号。当这些导数为负时有极大；为正时有极小。

57. 未定情形

前面的讨论没有涵盖 $B^2 - AC = 0$ 的情形。几何解释说明了为什么在这种情形中会有困难。令 S 为方程 $z = f(x, y)$ 所表示的曲面。如果函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极大或极小，并且在该点附近函数及其导数连续，那么必须有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

这表明曲面 S 在坐标为 (x_0, y_0, z_0) 的点 M_0 处的切平面必须平行于 xy 平面。为了有极大或极小，还必须使曲面 S 在点 M_0 附近全位于其切平面的一侧；于是我们被引向研究曲面在切点附近相对于其切平面的行为。

设切点已移至原点，并且切平面为 xy 平面。于是曲面方程具有形式

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3, \tag{24}$$

其中 a, b, c 是常数，而 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是 x, y 的函数，当 x, y 趋近零时保持有限。这个方程本质上与方程 (19) 相同，只是把 x_0, y_0 换成零，把 h, k 分别换成 x, y。

为了判断曲面 S 在原点附近是否完全位于 xy 平面的一侧，只需研究曲面被该平面所截的截线。这个截线由方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x^3 + \cdots = 0 \tag{25}$$

给出；因此它在坐标原点有一个双重点。如果 $b^2 - ac$ 为负，则原点是孤立双重点（§53），当点 (x, y) 位于以原点为中心、半径足够小的圆 C 内时，方程 (25) 除 $x = y = 0$ 外没有解。方程 (25) 的左端，只要点 (x, y) 留在这个圆内，就保持同一符号；曲面 S 上投影到圆 C 内部的所有点，除原点本身外，均在 xy 平

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

面的同一侧。在这种情形有极值，且曲面 S 在原点附近的部分类似于球面或椭球面的一部分。

如果 $b^2-ac>0$，则曲面 S 与其切平面的交线有两个不同分支 C_1, C_2 通过原点，并且这两个分支的切线由方程

$$ax^2+2bxy+cy^2=0$$

给出。令点 (x,y) 在原点附近移动。当它穿过两个分支 C_1, C_2 中的任何一个时，方程 (25) 的左端为零并改变符号。因此，把方程 (25) 左端的符号赋给原点附近平面中的每个区域，便得到类似 图 7 的构形。

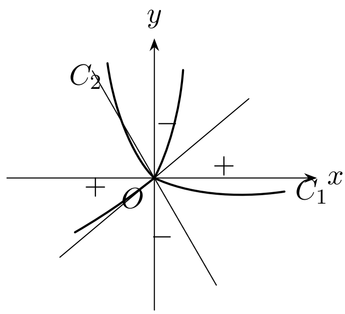


图 7

在曲面上投影到 xy 平面内以原点为中心的圆内部的点中，无论圆取得多小，总有一些点位于 xy 平面下方，也有一些点位于其上方。曲面在此点相对于其切平面的一般形状，类似于单叶双曲面或双曲抛物面。函数 $f(x,y)$ 在原点既无极大也无极小。

$b^2-ac=0$ 的情形，就是曲面与其切平面的交线在原点有尖点的情形。我们暂缓对这种情形作详细讨论。如果交线由通过原点的两个不同分支组成，则不可能有极值，因为曲面仍然穿过其切平面。如果原点是孤立双重点，则函数 $f(x,y)$ 在 $x=y=0$ 时有极值。也可能发生曲面与其切平面的交线由两个重合分支组成的情形。例如，曲面

$$z=y^2-2x^2y+x^4$$

沿着抛物线 $y=x^2$ 处处切于平面 $z=0$。函数 $y^2-2x^2y+x^4$ 在这条抛物线的每一点为零，但在原点附近不在这条抛物线上的所有点为正。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

58.　未定情形中的高阶项

为了看出给定例子属于上述哪一种情形，必须考虑三阶和四阶导数，有时还要考虑更高阶导数。下面的讨论在实践中通常已经足够，但只适用于最一般的情形。当 $b^2 - ac = 0$ 时，用 Taylor 展开到四次项，曲面方程可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &= A(x\sin\omega - y\cos\omega)^2 + \theta_3(x,y) \\ &\quad + \frac{1}{24}\left(x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}\right)^4 f(u,v)\bigg|_{(u,v)=(\theta x,\theta y)}, \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\theta_3(x,y)$ 表示三次齐次项，而 $0 < \theta < 1$；末项是在点 $(\theta x, \theta y)$ 处取值的四阶方向导数余项。为确定起见，设 A 为正。为了使曲面 S 在原点附近完全位于 xy 平面的一侧，必要条件是曲面被所有过 z 轴的平面所截得的截线，在原点附近都位于 xy 平面的同一侧。但如果曲面被割平面

$$y = x\tan\phi$$

所截，则截线方程可由在 (26) 中作代换

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi$$

得到；此时新坐标轴是旧的 z 轴以及割平面在 xy 平面上的迹线。施行此运算，得

$$z = A\rho^2(\cos\phi\sin\omega - \cos\omega\sin\phi)^2 + K\rho^3 + L\rho^4,$$

其中 K 与 ρ 无关，而 L 在 ρ 趋近零时保持有限。如果 $\tan\omega \neq \tan\phi$，则对于足够小的 ρ，z 为正；因此所有相应截线在原点附近都位于 xy 平面上方。现在用平面

$$y = x\tan\omega$$

截曲面。如果相应的 K 值不为零，则 z 的展开具有形式

$$z = \rho^3(K + \epsilon)$$

并随 ρ 改变符号。因此曲面被此平面所截得的截线在原点有一个拐点，并穿过 xy 平面。由此可知，函数 $f(x,y)$ 在原点既无极大也无极小。曲面与其切平面的交线有第一类尖点时就是这种情形；例如曲面

$$z = y^2 - x^3.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果在后一代换下 $K=0$，则应把展开进行到四次项，并得到形如

$$z=\rho^4(K_1+\epsilon)$$

的表达式，其中 K_1 是可由四阶导数容易算出的常数。我们将假设 K_1 不为零。对于无穷小的 ρ，z 与 K_1 符号相同；如果 K_1 为负，所讨论的截线在原点附近位于 xy 平面下方，于是仍然既无极大也无极小。例如，曲面 $z=y^2-x^4$ 就是这种情形；它与 xy 平面的交线由两条抛物线 $y=\pm x^2$ 组成。因此，除非同时有 $K=0$ 且 $K_1>0$，显然无需再继续研究；因为可以立即断定曲面在原点附近穿过其切平面。

但是，如果同时有 $K=0$ 且 $K_1>0$，所有过 z 轴的平面所作截线在原点附近都位于 xy 平面上方。不过，这还不能确证曲面不穿过其切平面；考虑特殊曲面

$$z=(y-x^2)(y-2x^2)$$

即可看出，它在其切平面上截出两条抛物线，其中一条位于另一条内部。为了使曲面不穿过其切平面，还必须使通过 z 轴的任意柱面截曲面所得的截线，都完全位于 xy 平面上方。设 $y=\phi(x)$ 是这个柱面在 xy 平面上的迹线方程，其中 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 时为零。无论函数 $\phi(x)$ 怎样，函数 $F(x)=f[x,\phi(x)]$ 都必须在 $x=0$ 处有极小。为了简化计算，我们假定坐标轴已选择得使曲面方程具有形式

$$z=Ay^2+\theta_3(x,y)+\cdots,$$

其中 A 为正。对于这组坐标轴，在原点有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0>0.$$

函数 $F(x)$ 的导数由公式

$$F'(x)=f_x+f_y\phi'(x),$$

$$F''(x)=f_{xx}+2f_{xy}\phi'(x)+f_{yy}[\phi'(x)]^2+f_y\phi''(x),$$
$$F'''(x)=f_{xxx}+3f_{xxy}\phi'+3f_{xyy}(\phi')^2+f_{yyy}(\phi')^3$$
$$+3f_{xy}\phi''+3f_{yy}\phi'\phi''+f_y\phi'''$$

给出，其中 f 的偏导数取在点 $(x,\phi(x))$。由这些公式，当 $x=y=0$ 时得到

$$F'(0)=0,\qquad F''(0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0[\phi'(0)]^2.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果 $\phi'(0)$ 不为零,函数 $F(x)$ 有极小;这也可由前面的讨论看出。但若 $\phi'(0)=0$,则得到公式

$$F'(0)=0, \qquad F''(0)=0, \qquad F'''(0)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0,$$

$$F^{IV}(0)=\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0+6\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \phi''(0)+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 [\phi''(0)]^2.$$

因此,为使 $F(x)$ 有极小,必须有 $\partial^3 f/\partial x^3$ 在原点为零,并且下面关于 $\phi''(0)$ 的二次型

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0+6\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \phi''(0)+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 [\phi''(0)]^2$$

对 $\phi''(0)$ 的所有值都为正。

容易看出,上述条件对函数

$$z=y^2-3x^2y+2x^4$$

不满足,而对函数 $z=y^2+x^4$ 满足。事实上,后一曲面显然完全位于 xy 平面上方。

我们不再试图把讨论继续下去,因为要使它完全严格,需要极其精细的推理。希望更详细考察这一题目的读者,可参看 Ludwig Scheffer 发表在 *Mathematische Annalen* 第 XXXV 卷上的重要论文。

59. 三元函数

设 $u=f(x,y,z)$ 是三个变量 x,y,z 的连续函数。与前面一样,如果能够找到一个足够小的正数 η,使得差

$$\Delta=f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)-f(x_0,y_0,z_0)$$

在 $h=k=l=0$ 时为零,并且对于 h,k,l 的所有其他值组,只要它们各自的绝对值都小于 η,该差具有同一符号,就说这个函数在值组 x_0,y_0,z_0 处有一个极值(极大或极小)。如果只给变量 x,y,z 中的一个以增量,而把另外两个看作常量,则同前面一样可知,只要这些导数在点 (x_0,y_0,z_0) 附近连续,u 要有极值就必须满足方程

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0=0.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

现在设 x_0, y_0, z_0 是这些方程的一组解，设 M_0 是坐标为 x_0, y_0, z_0 的点。若能以 M_0 为中心作一个足够小的球，使得对球内除 M_0 外的所有点 (x, y, z)，$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ 具有同一符号，则有极值。令邻近点的坐标由方程

$$x = x_0 + \rho\alpha, \qquad y = y_0 + \rho\beta, \qquad z = z_0 + \rho\gamma$$

表示，其中 α, β, γ 满足关系 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$；并在 $f(x, y, z)$ 的 Taylor 展开中用 $\rho\alpha, \rho\beta, \rho\gamma$ 分别代替 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$。这样得到 Δ 的表达式

$$\Delta = \rho^2[\Phi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho L],$$

其中 $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ 表示 α, β, γ 的一个二次型，其系数是 $f(x, y, z)$ 的二阶导数；L 是一个在点 M_0 附近保持有限的函数。除该型的判别式为零这一特殊情形外，这个二次型可表示为 α, β, γ 的三个不同线性函数，比如 P, P', P'' 的平方之和，各自乘以某些常数因子 a, a', a''。因此一般可写

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = aP^2 + a'P'^2 + a''P''^2,$$

其中 a, a', a'' 都不为零。如果系数 a, a', a'' 具有同一符号，则当点 α, β, γ 描述球面

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

时, 二次型 Φ 的绝对值保持大于某个下界; 从而当 ρ 小于某个数时, Δ 与 a, a', a'' 具有同一符号。因此函数 $f(x, y, z)$ 有极值。

如果三个系数 a, a', a'' 不全具有同一符号，则既无极大也无极小。例如，设 $a > 0, a' < 0$，并取满足方程 $P' = 0, P'' = 0$ 的 α, β, γ 值。这些值不能使 P 为零，因此对于小的 ρ，Δ 为正。但另一方面，如果取满足方程 $P = 0, P'' = 0$ 的 α, β, γ 值，则对于小的 ρ，Δ 为负。

对任意个自变量，方法都是相同的：一个二次型的讨论总是起主要作用。对于只有三个自变量的函数 $u = f(x, y, z)$，可以注意到，这个讨论等同于讨论一个曲面在奇点附近的性质。事实上，考虑方程为

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

的曲面 Σ; 这个曲面显然通过坐标为 (x_0, y_0, z_0) 的点 M_0, 而如果函数 $f(x, y, z)$ 在那里有极值，则点 M_0 是 Σ 的一个奇点。因此，若在 M_0 处的切锥为虚锥面，显然 $F(x, y, z)$ 在以 M_0 为中心的一个足够小的球内保持同一符号，$f(x, y, z)$ 必定有极大或极小。但如果切锥为实锥面，或由两个不同实平面组成，则曲面的若干叶片通过 M_0，并且当点 (x, y, z) 穿过这些叶片之一时，$F(x, y, z)$ 改变符号。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

60. 点到曲面的距离

我们来求一个定点 (a,b,c) 到方程为 $F(x,y,z)=0$ 的曲面 S 的距离的极大值与极小值。这个距离的平方

$$u=d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

如果把 z 看作由方程 $F=0$ 定义的 x,y 的函数，就只是两个自变量的函数。为了使 u 在曲面上一点 (x,y,z) 处有极值，该点坐标必须满足

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=(x-a)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=(y-b)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

由方程 $F=0$ 又得关系

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

于是前面的方程化为

$$\frac{x-a}{\partial F/\partial x}=\frac{y-b}{\partial F/\partial y}=\frac{z-c}{\partial F/\partial z}.$$

这表明曲面 S 在点 (x,y,z) 处的法线通过点 (a,b,c)。因此，略去曲面 S 的奇点，所求点就是从点 (a,b,c) 向曲面 S 所作法线的垂足。为了看出这样的点是否真正对应于极大或极小，取该点为原点，取切平面为 xy 平面，使给定点位于 z 轴上。于是要研究的函数具有形式

$$u=x^2+y^2+(z-c)^2,$$

其中 z 是 x,y 的函数，并且 z 连同它的两个一阶导数在 $x=y=0$ 时为零。把 z 的二阶偏导数记为 r,s,t，在原点有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2(1-cr),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2cs,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2(1-ct),$$

于是只剩下研究多项式

$$\Delta(c)=c^2s^2-(1-cr)(1-ct)=c^2(s^2-rt)+(r+t)c-1.$$

方程 $\Delta(c)=0$ 的根总是实的，这是由恒等式

$$(r+t)^2+4(s^2-rt)=4s^2+(r-t)^2$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

保证的。现在必须按照 s^2-rt 的符号分几种情形。

第一种情形：设 $s^2-rt<0$。方程 $\Delta(c)=0$ 的两个根 c_1,c_2 具有相同符号，并可写

$$\Delta(c)=(s^2-rt)(c-c_1)(c-c_2).$$

现在在 z 轴上标出坐标为 c_1,c_2 的两点 A_1,A_2。这两点位于原点的同侧；如果像总可做到的那样，假定 r,t 为正，它们就在 z 轴的正半轴上。如果给定点 $A(0,0,c)$ 位于线段 A_1A_2 之外，则 $\Delta(c)$ 为负，距离 OA 有极大或极小。为了判断是哪一种，需要考虑 $1-cr$ 的符号。这个系数只在 $c=1/r$ 时为零；而这个 c 值位于 c_1 与 c_2 之间，因为 $\Delta(1/r)=s^2/r^2$。但是当 $c=0$ 时，$1-cr$ 为正；因此，如果点 A 与原点位于线段 A_1A_2 的同侧，则 $1-cr$ 为正，距离 OA 为极小。另一方面，如果点 A 与原点位于该线段的两侧，则距离 OA 为极大。当点 A 位于 A_1 与 A_2 之间时，距离既非极小也非极大。A 位于点 A_1,A_2 之一的情形仍不能判定。

第二种情形：设 $s^2-rt>0$。$\Delta(c)=0$ 的两个根 c_1,c_2 中一个为正，另一个为负，原点位于两点 A_1,A_2 之间。如果点 A 不位于 A_1,A_2 之间，则 $\Delta(c)$ 为正，既无极大也无极小。如果 A 位于 A_1,A_2 之间，则 $\Delta(c)$ 为负，$1-cr$ 为正，因此距离 OA 为极小。

第三种情形：设 $s^2-rt=0$。这时 $\Delta(c)=(r+t)(c-c_1)$；同上容易看出，如果点 A 与原点位于坐标为 $(0,0,c_1)$ 的点 A_1 的同侧，则距离 OA 为极小；如果点 A_1 位于点 A 与原点之间，则既无极大也无极小。

点 A_1,A_2 在曲率研究中具有基本重要性；它们是曲面 S 在点 O 处的*主曲率中心*。

61.　隐函数的极大与极小

我们常常需要求若干变量函数的极大与极小，而这些变量又由一个或多个关系联系起来。例如，考虑四个变量 x,y,z,u 的函数 $\omega=f(x,y,z,u)$，它们本身满足两个方程

$$f_1(x,y,z,u)=0,\qquad f_2(x,y,z,u)=0.$$

为确定起见，把 x,y 看作自变量，而把 z,u 看作由这两个方程定义的 x,y 的函数。那么 ω 有极值的必要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

而偏导数 $\partial z/\partial x, \partial u/\partial x, \partial z/\partial y, \partial u/\partial y$ 由关系

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

给出。消去 $\partial z/\partial x, \partial u/\partial x, \partial z/\partial y, \partial u/\partial y$，得到新的条件方程

$$\frac{D(f, f_1, f_2)}{D(x, z, u)}=0, \qquad \frac{D(f, f_1, f_2)}{D(y, z, u)}=0, \tag{27}$$

它们连同关系 $f_1=0, f_2=0$，决定可能对应于极值的 x, y, z, u 的值。但是方程 (27) 表示可以找到 λ, μ 的值，使它们满足方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial y}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial z}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial u}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial u}=0.
\end{aligned} \tag{28}$$

因此两个方程 (27) 可由四个方程 (28) 代替，其中 λ, μ 是辅助未知量，也就是 Lagrange 乘子。

一般定理的证明是不言自明的；我们可以陈述如下实用规则：

> 给定 n 个变量的函数
>
> $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
>
> 而这些变量由 h 个不同关系
>
> $$\phi_1=0, \qquad \phi_2=0, \qquad \ldots, \qquad \phi_h=0$$
>
> 联系起来。为了求可能使这个函数取极值的 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的值，应把辅助函数
>
> $$f+\lambda_1\phi_1+\cdots+\lambda_h\phi_h$$
>
> 的偏导数全都置零，并把 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ 看作常数。

62. 另一个例子

现在讨论另一个例子，其中极小值未必由令偏导数为零给出。给定一个三角形 ABC；试在平面内求一点 P，使得从 P 到三角形各顶点的距离之和

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$PA+PB+PC$ 为极小。设 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)$ 分别是顶点 A,B,C 关于直角坐标系的坐标。于是要求极小的函数为

$$
\begin{aligned}
z = &\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}+\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2} \\
&+\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2},
\end{aligned} \tag{29}
$$

其中三个根式都取正号。这个方程表示一个显然完全位于 xy 平面上方的曲面 S；整个问题化为在这个曲面上求离 xy 平面最近的点。由关系 (29) 得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} = &\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} \\
&+\frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} = &\frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} \\
&+\frac{y-b_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}}.
\end{aligned}
$$

显然，这些导数是连续的，除非在点 A,B,C 附近；在那里它们变成不定。因而曲面 S 有三个奇点，其投影就是给定三角形的顶点。z 的极小值或者由曲面上切平面平行于 xy 平面的点给出，或者由这些奇点之一给出。为了求解方程 $\partial z/\partial x=0,\partial z/\partial y=0$，把它们写成

$$
\begin{aligned}
\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} &= -\frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}}, \\
\frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} &= -\frac{y-b_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}}.
\end{aligned}
$$

于是平方并相加，得到条件

$$
1+2\frac{(x-a_1)(x-a_2)+(y-b_1)(y-b_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}=0.
$$

这个结果的几何解释很容易。令 α,β 分别表示方向 PA 与 x,y 轴所成角的余弦，令 α',β' 分别表示方向 PB 与同两轴所成角的余弦，则最后一个条件可写成

$$
1+2(\alpha\alpha'+\beta\beta')=0,
$$

或者，若把角 APB 记为 ω，则写成

$$
2\cos\omega+1=0.
$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，所讨论的条件表示线段 AB 在点 P 张成 120° 的角。由于同样理由，角 BPC 与 CPA 也必须都是 120°。[7]显然，点 P 必须位于三角形 ABC 内部；并且，如果三角形 ABC 的任一角等于或大于 120°，则不存在具有所需性质的点。如果没有一个角达到 120°，点 P 可通过一个容易的作图唯一确定，即作为两个圆的交点；这个点后来通常称为 Fermat–Torricelli 点。在这种情形中，极小值由点 P 或由三角形的某一顶点给出。不过容易证明，和 $PA+PB+PC$ 小于三角形任意两边之和。事实上，因为角 APB 与 APC 都等于 120°，从两个三角形 PAC 与 PBA 可得公式

$$AB=\sqrt{a^2+b^2+ab},\qquad AC=\sqrt{a^2+c^2+ac},$$

其中 $PA=a, PB=b, PC=c$。但显然

$$\sqrt{a^2+b^2+ab}>b+\frac{a}{2},\qquad \sqrt{a^2+c^2+ac}>c+\frac{a}{2},$$

因而

$$AB+AC>a+b+c.$$

所以点 P 确实对应于一个极小值。

当三角形 ABC 的某一角等于或大于 120° 时，不存在一点使三角形 ABC 的每一边都在该点张成 120° 的角；因而曲面 S 没有平行于 xy 平面的切平面。在这种情形，极小值必须由三角形的一个顶点给出；事实上，它显然就是钝角的顶点。用几何方法很容易验证这一事实。

63. d'Alembert 定理

设 $F(x,y)$ 是两个变量 x,y 的多项式，按升阶齐次组排列为

$$F(x,y)=H+\phi_p(x,y)+\phi_{p+1}(x,y)+\cdots+\phi_m(x,y),$$

其中 H 是常数。如果方程 $\phi_p(x,y)=0$ 作为 y/x 的方程有一个单根，则函数 $F(x,y)$ 在 $x=y=0$ 处不可能有极大或极小。因为由上面的讨论可知，曲面 $z+H=F(x,y)$ 被过 z 轴的平面所作截线中，有些在原点附近位于 xy 平面上方，另一些则位于下方。由这一点可以推出 d'Alembert 定理的一个证明。设 $f(z)$ 是 m 次多项式

$$f(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_mz^m,$$

[7]建议读者作图。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其系数完全任意。为了分离实部与虚部，把它写成

$$f(x+iy)=a_0+ib_0+(a_1+ib_1)(x+iy)+\cdots+(a_m+ib_m)(x+iy)^m,$$

其中 $a_0,b_0,a_1,b_1,\ldots,a_m,b_m$ 为实数。于是有

$$f(z)=P+iQ,$$

这里 P,Q 的意义为

$$P=a_0+a_1x-b_1y+\cdots\,,\qquad Q=b_0+b_1x+a_1y+\cdots\,;$$

因而最后有

$$|f(z)|=\sqrt{P^2+Q^2}.$$

我们先说明，除非 $a_0=b_0=0$，否则 $|f(z)|$，或者等价地 P^2+Q^2，不可能在 $x=y=0$ 处有极小。为此引入极坐标 ρ,ϕ，并为一般性起见，假定 A_0 之后第一个不为零的系数是 A_p。于是可写

$$P=a_0+(a_p\cos p\phi-b_p\sin p\phi)\rho^p+\cdots\,,$$

$$Q=b_0+(b_p\cos p\phi+a_p\sin p\phi)\rho^p+\cdots\,,$$

$$\begin{aligned}P^2+Q^2=a_0^2+b_0^2+2\rho^p\big[&(a_0a_p+b_0b_p)\cos p\phi\\&+(b_0a_p-a_0b_p)\sin p\phi\big]+\cdots\,,\end{aligned}$$

其中未写出的项关于 ρ 的次数都高于 p。但是方程

$$(a_0a_p+b_0b_p)\cos p\phi+(b_0a_p-a_0b_p)\sin p\phi=0$$

给出 $\tan p\phi=K$，它决定 p 条直线，相邻直线之间的角均为 π/p。

中译者校记（底本原误）。 1904 年英译本与现代重排本均误作 $2\pi/p$。由于 $\tan(p\phi)$ 的周期为 π，而过原点的直线方向按 π 取模，相邻直线的夹角应为 π/p。因此，由上面的说明，除非两个量

$$a_0a_p+b_0b_p,\qquad b_0a_p-a_0b_p$$

都为零，否则 P^2+Q^2 不可能在 $x=y=0$ 处有极小。但由于 $a_p^2+b_p^2$ 不为零，这就要求 $a_0=b_0=0$；也就是说，$f(z)$ 的实部和虚部在原点都必须为零。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果 $|f(z)|$ 在 $x=\alpha, y=\beta$ 处有极小，则令 $z=\alpha+i\beta+z'$ 即可把讨论化为前面的情形。因此，除非 P 与 Q 在 $x=\alpha, y=\beta$ 分别为零，否则 $|f(z)|$ 不可能有极小。

$f(z)$ 的绝对值至少对某一个 z 值必须经过一个极小值，因为当 z 的绝对值无限增大时，它也无限增大。事实上有

$$P^2+Q^2=(a_m^2+b_m^2)\rho^{2m}+\cdots,$$

其中略去的项关于 ρ 的次数都低于 $2m$。这个方程可写成

$$\sqrt{P^2+Q^2}=\rho^m\left(\sqrt{a_m^2+b_m^2}+\epsilon\right),$$

其中当 ρ 无限增大时，ϵ 趋近零。因此可以作一个半径 R 足够大的圆，使得在圆周上 $\sqrt{P^2+Q^2}$ 的值大于例如在原点的值。于是圆内至少有一点

$$x=\alpha, \qquad y=\beta$$

使 $\sqrt{P^2+Q^2}$ 取极小。由上面可知，点 $x=\alpha, y=\beta$ 是两条曲线 $P=0, Q=0$ 的一个交点；这等价于说 $z=\alpha+\beta i$ 是方程 $f(z)=0$ 的一个根。

在这个例子中，如同前一个例子，我们假定了一个在有界区域内部连续的二元函数，实际上会在该区域内部或边界上取得一个最小值。这个陈述容易被承认，而且稍后（§120）还会给出严格证明。

习题

1. 证明：如果 $f^{(n+2)}(a)$ 不为零，则 Lagrange 形式余项中出现的数 θ，当 h 趋近零时趋近于极限 $1/(n+2)$。

2. 设 $F(x)$ 是 n 阶行列式，其所有元素都是 x 的函数。证明导数 $F'(x)$ 是 n 个行列式的和；这些行列式是依次把某一行的全部元素换成其导数所得到的。陈述高阶导数的相应定理。

3. 求下列距离的极大值与极小值：定点到一个平面曲线或空间曲线的距离；两条曲线上两个动点之间的距离；两个曲面上两个动点之间的距离。

4. 曲面 S 上使到 n 个定点距离平方和取极值的点，是从这 n 个给定定点的重心（坐标平均点）向曲面所作法线的垂足。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

5. 在由四条给定边可以构成的一切四边形中，可内接于圆的四边形面积最大。陈述 n 边形的类似定理。

6. 求内接于一个椭球的长方体的最大体积。

7. 利用如下事实求中心二次曲面的轴：顶点是到中心距离取极值的点。

8. 对椭球的中心截面的轴，解类似问题。

9. 求通过给定三角形三个顶点的最小面积椭圆，以及通过给定四面体四个顶点的最小体积椭球。

10. 求一点，使从该点到两条给定直线的距离与到一个给定点的距离之和为极小。〔Joseph Bertrand〕

11. 证明下列公式：

$$\begin{aligned}\log(x+2) = 2\log(x+1) - 2\log(x-1) + \log(x-2)\\ + 2\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + \cdots\right].\end{aligned}$$

〔Borda 级数〕

$$\begin{aligned}\log(x+5) = {} & \log(x+4) + \log(x+3) - 2\log x\\ & + \log(x-3) + \log(x-4) - \log(x-5)\\ & - 2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3\right.\\ & \left. + \cdots\right].\end{aligned}$$

〔Haro 级数〕

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 4 章

定积分

I. 特殊求积法

64. 抛物线求积

平面曲线所围面积的确定，是一个始终吸引几何学家才智的问题。在古人遗留给我们的例子中，最著名的一个就是 Archimedes 的抛物线求积。我们现在说明他的方法。

设要求由抛物线弧 ACB 与弦 AB 围成的面积。作直径 CD, 它把 AB 的中点 D 与点 C 相连；在点 C, 切线平行于 AB。连 AC 与 BC, 并设 E 与 E' 分别是切线平行于 BC 与 AC 的点。我们先把三角形 BEC 的面积同三角形 ABC 的面积比较。作切线 ET, 它在 T 截 CD。作直径 EF, 它在 F 截 CB；最后，作 EK 与 FH 平行于弦 AB。由抛物线的一个初等性质，$TC = CK$。此外

$$CT = EF = KH, \qquad \text{因而} \qquad EF = \frac{CH}{2} = \frac{CD}{4}.$$

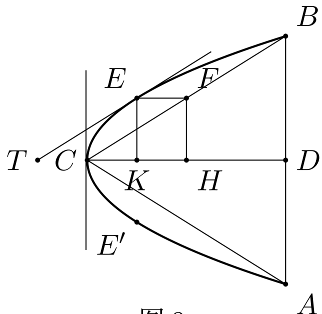


图 8

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

由于两个三角形 BCE 与 BCD 有同一底 BC，它们的面积之比等于高之比，也就是 EF 与 CD 之比。因此三角形 BCE 的面积等于三角形 BCD 面积的四分之一，亦即等于三角形 ABC 的面积 S 的八分之一。三角形 ACE' 的面积显然相同。对每一条弦 $BE, CE, CE', E'A$ 继续施行同样的过程，就得到四个新三角形，每一个的面积都是 $S/8^2$，如此继续。第 n 次操作产生 2^n 个三角形，每个面积为 $S/8^n$。

抛物线弓形的面积显然就是当 n 无限增大时所有这些三角形面积之和所趋近的极限；也就是下面的递减几何级数之和：

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \cdots + \frac{S}{4^n} + \cdots ,$$

而这个和是 $4S/3$。由此可知，所求面积等于以 AB 与 CD 为边的平行四边形面积的三分之二。

这种方法虽然具有令人赞叹的巧妙性，但必须承认，它的成功本质上依赖于抛物线的某些特殊性质，并且缺少一般性。我们可以从古代作者那里举出的其他求积例子，只会进一步证实这一点：每遇一条新曲线，就需要某种新的技巧。但是无论技巧为何，要计算的面积总是被分割成一些元素；这些元素的数目被令为无限增大，并且必须计算这些部分面积之和的极限。我们不再列举任何更多的特殊例子，[1]而是直接给出一种一般的分割方法；它会自然地把我们引向积分学。

65.　一般方法

为确定起见，设要求由一段曲线弧 AMB、一条不与该弧相交的轴 xx'，以及从点 A 与 B 向 xx' 所作的两条垂线 AA_0 与 BB_0 所围成的面积 S。我们还假定，平行于这些直线 AA_0, BB_0 的直线至多在一个点截弧，如图 9所示。把线段 A_0B_0 用点 $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ 分成若干相等或不相等的部分；过这些点作直线 $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_{n-1}Q_{n-1}$，使它们平行于 AA_0，并分别在点 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ 截弧 AB。

[1]Duhamel 的 *Traité* 中可以找到大量用古代作者的方法确定面积、弧长和体积的例子。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

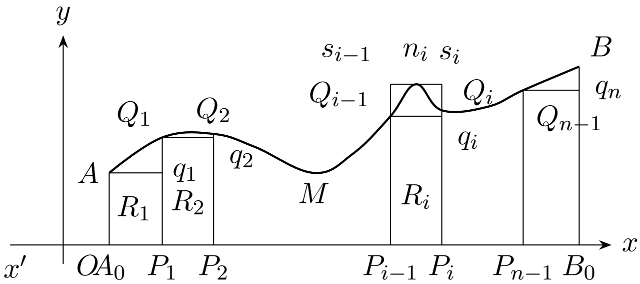


图 9

现在过 A 作一条平行于 xx' 的直线，在 q_1 截 P_1Q_1；过 Q_1 作平行于 xx' 的直线，在 q_2 截 P_2Q_2；如此继续。这样得到一列矩形 $R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots, R_n$。这些矩形中的每一个可以完全位于轮廓 ABB_0A_0 之内，但也有一些可以部分位于该轮廓之外，如图 9中所示。

设 α_i 表示矩形 R_i 的面积，β_i 表示由轮廓 $P_{i-1}P_iQ_iQ_{i-1}$ 所围的面积。首先，若分点的数目无限增加，同时各距离

$$A_0P_1, \quad P_1P_2, \quad \ldots, \quad P_{i-1}P_i, \quad \ldots$$

都趋近于零，则每一个比

$$\beta_1/\alpha_1, \quad \beta_2/\alpha_2, \quad \ldots, \quad \beta_i/\alpha_i, \quad \ldots$$

都趋近于一。因为例如比 β_i/α_i 显然介于 $l_i/P_{i-1}Q_{i-1}$ 与 $L_i/P_{i-1}Q_{i-1}$ 之间，其中 l_i 与 L_i 分别是弧 $Q_{i-1}Q_i$ 上一点到轴 xx' 的距离的最小值与最大值。而显然，当距离 $P_{i-1}P_i$ 趋近于零时，这两个分数都趋近于一。因此，夹在各比 $\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \ldots, \alpha_n/\beta_n$ 的最大者与最小者之间的比

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}$$

也会在矩形数目按上述方式无限增加时趋近于一。但是这个比的分母是常数，并且等于所求面积 S。于是，这个面积也等于和 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 在矩形数目 n 按照所规定的方式无限增大时的极限。

为了从这一结果推出面积的解析表达式，令曲线 AB 关于一组直角坐标轴表示，其中 x 轴 Ox 与 xx' 重合，并设 $y = f(x)$ 是曲线 AB 的方程。按假设，函数 $f(x)$ 是在端点 A 与 B 的横坐标 a 与 b 之间的连续函数。用 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 表示分点 $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ 的横坐标，则上述各矩形的底分别为

$$x_1 - a, \quad x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad x_i - x_{i-1}, \quad \ldots, \quad b - x_{n-1},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而它们的高相应地为

$$f(a),\quad f(x_1),\quad \ldots,\quad f(x_{i-1}),\quad \ldots,\quad f(x_{n-1}).$$

因此面积 S 等于下面这个和的极限:

$$(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1}), \tag{1}$$

其中整数 n 无限增大，并且使每一个差 $x_1-a, x_2-x_1, \ldots$ 都趋近于零。

66. 例

如果把底 AB 分成 n 个相等部分，每部分长度为 h（$b-a=nh$），那么所有矩形都有同一底 h，而它们的高分别为

$$f(a),\quad f(a+h),\quad f(a+2h),\quad \ldots,\quad f[a+(n-1)h].$$

只需求出和

$$h\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f[a+(n-1)h]\},\qquad h=\frac{b-a}{n},$$

当整数 n 无限增大时的极限。若能求出 x 的一组等差数列取值所对应的一组 $f(x)$ 值的和，这个计算就容易；例如当 $f(x)$ 只是 x 的一个整幂时，或者当 $f(x)=\sin mx$ 或 $f(x)=\cos mx$ 等等时，就是这种情形。

例如，重新考虑抛物线 $x^2=2py$，并求由这条抛物线的一段弧 OA、x 轴以及通过端点 A 的直线 $x=a$ 围成的面积。把长度分成 n 个相等部分，每部分长度为 h（$nh=a$），按上面所述，我们必须求和

$$\frac{h}{2p}\left[h^2+4h^2+\cdots+(n-1)^2h^2\right]=\frac{h^3}{2p}\left[1+4+9+\cdots+(n-1)^2\right]$$

的极限。括号内的量是前 $n-1$ 个整数平方之和，即 $n(n-1)(2n-1)/6$；因而上面的和等于

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{12pn^3}\,a^3.$$

当 n 无限增大时，这个和显然趋近于极限 $a^3/6p=(1/3)(a\cdot a^2/2p)$，即以点 A 的两个坐标为边所作矩形面积的三分之一；这与上面得到的结果一致。

在其他情形中，如下面这个出自 Fermat 的例子，选取横坐标成等比数列的点作为分点更好。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

设要求由曲线 $y = Ax^\mu$、x 轴以及两条直线 $x = a, x = b$（$0 < a < b$）围成的面积，其中指数 μ 任意。为此在 a 与 b 之间插入 $n-1$ 个等比中项，得到数列

$$a, \quad a(1+\alpha), \quad a(1+\alpha)^2, \quad \dots, \quad a(1+\alpha)^{n-1}, \quad b,$$

其中数 α 满足条件 $a(1+\alpha)^n = b$。取这组数为分点横坐标，则相应纵坐标分别为

$$Aa^\mu, \quad Aa^\mu(1+\alpha)^\mu, \quad Aa^\mu(1+\alpha)^{2\mu}, \quad \dots,$$

而第 p 个矩形的面积为

$$\bigl[a(1+\alpha)^p - a(1+\alpha)^{p-1}\bigr] Aa^\mu(1+\alpha)^{(p-1)\mu} = Aa^{\mu+1}\alpha(1+\alpha)^{(p-1)(\mu+1)}.$$

因此所有矩形面积之和为

$$Aa^{\mu+1}\alpha\bigl[1 + (1+\alpha)^{\mu+1} + (1+\alpha)^{2(\mu+1)} + \dots + (1+\alpha)^{(n-1)(\mu+1)}\bigr].$$

若 $\mu+1$ 不为零，我们先假定如此，则括号内的和等于

$$\frac{(1+\alpha)^{n(\mu+1)} - 1}{(1+\alpha)^{\mu+1} - 1};$$

或者，把 $a(1+\alpha)^n$ 换成 b，原来的和可写成

$$A\bigl(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\bigr)\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1} - 1}.$$

当 α 趋近零时，商 $[(1+\alpha)^{\mu+1} - 1]/\alpha$ 的极限是 $(1+\alpha)^{\mu+1}$ 对 α 在 $\alpha = 0$ 处的导数，即 $\mu+1$；因此所求面积为

$$\frac{A\bigl(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\bigr)}{\mu+1}.$$

如果 $\mu = -1$，这个计算就不再适用。内接矩形面积之和等于 $nA\alpha$，而我们必须求乘积 $n\alpha$ 的极限，其中 n 与 α 由关系

$$a(1+\alpha)^n = b$$

相连。由此可得

$$n\alpha = \log\frac{b}{a}\,\frac{\alpha}{\log(1+\alpha)} = \log\frac{b}{a}\,\frac{1}{\log\bigl((1+\alpha)^{1/\alpha}\bigr)},$$

这里符号 log 表示 Napier 对数。当 α 趋近零时，$(1+\alpha)^{1/\alpha}$ 趋近于数 e，乘积 $n\alpha$ 趋近于 $\log(b/a)$。所以所求面积等于 $A\log(b/a)$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

67. 原函数

积分学的发明把平面面积的求值问题化归为寻找一个导数已知的函数的问题。设 $y=f(x)$ 是关于两条直角坐标轴的一条曲线方程，其中函数 $f(x)$ 连续。把由这条曲线、x 轴、一个固定纵坐标线 M_0P_0 与一个可变纵坐标线 MP 围成的面积，看作可变纵坐标线横坐标 x 的函数。为了包括所有可能情形，我们约定用 A 表示由给定曲线、x 轴和直线 M_0P_0, MP 围成的各部分面积的代数和；这些面积各部分按一定符号计入：在 M_0P_0 右侧且在 Ox 上方的部分取正号，在 M_0P_0 右侧且在 Ox 下方的部分取负号；对于 M_0P_0 左侧的部分采用相反约定。于是，如果 MP 处于位置 $M'P'$，则 A 等于差

$$M_0P_0C - M'P'C;$$

同样，如果 MP 处于 $M''P''$，则

$$A = M''P''D - M_0P_0D.$$

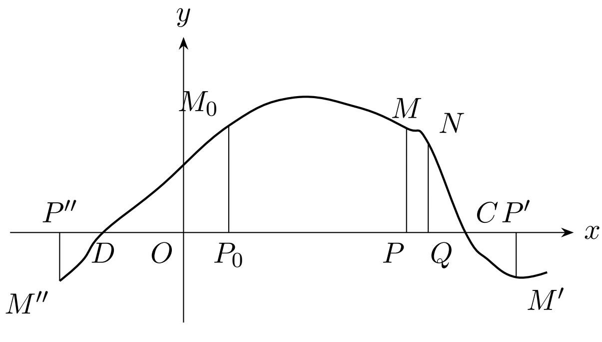


图 10

在这些约定下, 我们现在证明, 如此定义的连续函数 A 的导数恰好是 $f(x)$。如图 10所示，取两条相邻的纵坐标线 MP, NQ，它们的横坐标为 x 与 $x+\Delta x$。面积的增量 ΔA 显然介于两个矩形的面积之间；这两个矩形有同一底 PQ，高分别是弧 MN 上纵坐标的最大值与最小值。以 H 表示最大纵坐标，以 h 表示最小纵坐标，则可写成

$$h\Delta x < \Delta A < H\Delta x,$$

或者除以 Δx，得 $h < \Delta A/\Delta x < H$。当 Δx 趋近于零时，由于 $f(x)$ 连续，H 与 h 趋近于同一极限 MP，即 $f(x)$。因此 A 的导数是 $f(x)$。读者可自行证明，对于点 M 的任意位置，同一结果仍成立。

如果我们已经知道 $f(x)$ 的一个原函数，也就是一个导数为 $f(x)$ 的函数 $F(x)$，那么差 $A - F(x)$ 是常数，因为它的导数为零（§8）。为确定这个常数，只需注意，当 x 等于直线 M_0P_0 的横坐标 a 时，面积 A 为零。因此

$$A = F(x) - F(a).$$

由上面的推理可知，第一，平面面积的确定可化归为原函数的发现；第二，对我们来说重要得多的是，每个连续函数 $f(x)$ 都是某个函数的导数。这里用一种略显含糊的几何概念，即平面曲线下的面积，证明了这个基本定理。这个证明曾长期被认为是令人满意的，但现在已不能再接受。为了给积分学建立稳固基础，必须给出一个纯解析证明，它完全不依赖任何几何直观。

不过，上面的几何证明并不只是出于历史兴趣才给出；它还为新的证明提供了本质的解析论证。事实上，恰恰是对像 (1) 这样的和以及稍微更一般的和的研究，将具有压倒性的重要性。在开始这种研究以前，我们必须先考察关于函数的一般性质，特别是关于连续函数的一些问题。[2]

II. 定积分；相关几何概念

68. 上确界与下确界

如果存在一个数 N 大到使一个数集中的任何元素都不超过 N，就说这个数集有一个上界（参见 §44 的脚注）。同样，如果存在一个数 N'，使得这个数集中的任何元素都不小于 N'，就说这个数集有一个下界。例如，全体正整数的集合有下界而无上界；全体整数（正的和负的）的集合既无上界也无下界；而 0 与 1 之间的全体有理数集合既有下界也有上界。

设 (E) 是一个有上界的集合。相对于这个集合，所有数可分为两类。若集合 (E) 中有大于一个数 α 的元素，我们就说 α 属于第一类；若集合 (E) 中没有大于 α 的元素，就说它属于第二类。由于集合 (E) 有上界，显然两类数都存在。若 A 是第一类的数，B 是第二类的数，则显然 $A < B$；集合 (E) 中有元素位于 A 与 B 之间，但没有元素大于 B。数 $C = (A + B)/2$ 可以属于第一类，也可以属于第二类。在前一种情形中，我们把区间 (A, B) 换成区间 (C, B)；在后一

[2]关于定积分一般概念的最重要著作，应提到 Riemann 的论文 *Ueber die Moeglichkeit, eine Function durch eine trigonometrische Reihe darzustellen*（*Werke*, 第 2 版, Leipzig, 1892, p. 239；另有 Laugel 的法译本，p. 225），以及我们已经引用过的 Darboux 论文：*Sur les fonctions discontinues*（*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 第 2 辑，第 IV 卷）。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

种情形中，把它换成区间 (A,C)。新的区间 (A_1,B_1) 是区间 (A,B) 的一半，并且相对于集合 (E) 具有与 (A,B) 相同的性质：存在至少一个集合 (E) 的元素大于 A_1，但没有元素大于 B_1。对 (A_1,B_1) 按同样方式操作，并无限继续，我们得到一列无穷区间

$$(A,B),\quad (A_1,B_1),\quad (A_2,B_2),\quad \ldots,$$

其中每一个都是前一个的一半，并且相对于集合 (E) 具有与 (A,B) 相同的性质。由于数 $A,A_1,A_2,\ldots,A_n$ 从不减小且始终小于 B，它们趋近于一个极限 λ (§1)。同样，由于数 $B,B_1,B_2,\ldots$ 从不增大且始终大于 A，它们趋近于一个极限 λ'。并且，由于差 $B_n-A_n=(B-A)/2^n$ 当 n 无限增大时趋近于零，这两个极限必相等，即 $\lambda'=\lambda$。把这个共同极限记作 L；则 L 叫作集合 (E) 的上确界。由它的取得方式可知，L 具有下面两个性质：

1) 集合 (E) 中没有元素大于 L。

2) 对任意小的正数 ϵ，总存在集合 (E) 的一个元素大于 $L-\epsilon$。

事实上，假设集合中有一个元素大于 L，例如 $L+h$（$h>0$）。由于 B_n 在 n 无限增大时趋近于 L，在某个 n 以后 B_n 将小于 $L+h$。但这是不可能的，因为 B_n 属于第二类。另一方面，设 ϵ 为任意正数。那么在某个 n 以后，A_n 将大于 $L-\epsilon$；而既然有 (E) 的元素大于 A_n，这些数也就大于 $L-\epsilon$。显然，上述两个性质不能同时属于 L 以外的任何数。

上确界可以属于集合 (E)，也可以不属于。例如，在所有不超过 2 的有理数集合中，数 2 正是上确界，并且属于这个集合。另一方面，所有不超过 2 的无理数集合的上确界也是 2，但这个上确界不是该集合的元素。特别要注意，如果上确界 L 不属于集合，则无论 ϵ 取多小，总有无穷多个 (E) 的元素大于 $L-\epsilon$。因为若只有有限多个，这些元素中最大的一个才会是上确界，而不是 L。当集合由 n 个不同的数组成时，上确界就是这 n 个数中最大的一个。

类似地可以证明，如果一个集合有下界，则存在一个数 L'，它有下面两个性质：[3]

---

[3]每当全体数能够按照某种特征性质被分成两类 A 与 B，且任一 A 类数都小于任一 B 类数时，A 类数的上确界 L 同时也是 B 类数的下确界。首先显然，任何大于 L 的数都属于 B 类。若有一个 $L'<L$ 属于 B 类，那么每一个大于 L' 的数都属于 B 类；于是 A 类的一切数都不超过 L'，这与它们的上确界为 L 矛盾。因此每个小于 L 的数都属于 A 类，每个大于 L 的数都属于 B 类，而 L 本身可以属于两类中的任一类。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

1) 集合中没有元素小于 L'。

2) 对任意正数 ϵ，存在集合的一个元素小于 $L' + \epsilon$。

这个数 L' 叫作集合的下确界。

69. 振幅

设 $f(x)$ 是一个定义在闭区间[4] (a, b) 上的 x 的函数；也就是说，x 在 a 与 b 之间的每个值以及端点 a, b 本身，都对应于唯一确定的 $f(x)$ 值。如果函数所取的一切值都位于两个固定数 A 与 B 之间，就说这个函数在这个闭区间中有界。于是函数值的集合有上确界和下确界。设 M 与 m 分别是这个集合的上确界和下确界；则差

$$\Delta = M - m$$

叫作函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 中的振幅。

这些定义引出若干说明。一个函数若要在闭区间 (a, b) 中有界，仅仅要求它对每一个 x 值都有有限值是不够的。例如，在闭区间 $(0, 1)$ 中由如下方式定义的函数：

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

对于每一个 x 值都有有限值；但它在我们所定义的意义下并非有界，因为只要取 $x < 1/A$，就有 $f(x) > A$。再如，一个在闭区间 (a, b) 中有界的函数，可以取到同上确界 M 或下确界 m 任意接近的值，而仍从不真正取到这些值。例如，在闭区间 $(0, 1)$ 中由关系

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = 1 - x \quad (0 < x \leq 1)$$

定义的函数 $f(x)$，其上确界为 $M = 1$，但从不达到这个界。

70. 连续函数的性质

现在转向连续函数的专门研究。

定理 A. 设 $f(x)$ 是一个在闭区间 (a, b) 中连续的函数，ϵ 是任意正数。那么总能把区间 (a, b) 分成若干个部分区间，使得属于同一部

[4] “闭”这个词在此只是为了强调。见 §2。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

分区间的变量的任意两个值 x' 与 x'' 总满足

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

假设这不成立。令 $c = (a+b)/2$；则至少有区间 $(a,c), (c,b)$ 中的一个具有与 (a,b) 相同的性质，也就是说，它不可能被分成满足定理陈述的部分区间。用它替代给定区间 (a,b)，并像上面（§68）那样继续推理，就可以形成一列无穷区间

$$(a,b), \quad (a_1,b_1), \quad (a_2,b_2), \quad \ldots,$$

其中每一个都是前一个的一半，并具有原区间 (a,b) 的同样性质。对于任意 n，总能在区间 (a_n,b_n) 中找到两个数 x' 与 x''，使 $|f(x') - f(x'')|$ 大于 ϵ。现在令 λ 为两列数 $a, a_1, a_2, \ldots$ 与 $b, b_1, b_2, \ldots$ 的共同极限。由于函数 $f(x)$ 在 $x = \lambda$ 处连续，能找到一个数 η，使得只要 $|x-\lambda|$ 小于 η，就有 $|f(x) - f(\lambda)| < \epsilon/2$。选择 n 足够大，使 a_n 与 b_n 同 λ 的差都小于 η。于是区间 (a_n,b_n) 完全位于区间 $(\lambda-\eta, \lambda+\eta)$ 内；若 x' 与 x'' 是区间 (a_n,b_n) 中任意两个值，就必有

$$|f(x') - f(\lambda)| < \epsilon/2, \qquad |f(x'') - f(\lambda)| < \epsilon/2,$$

因而 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$。由此可知，上述假设导致矛盾；定理得证。

推论 I. 设 $a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b$ 是把区间 (a,b) 分成 p 个部分区间的一种分割，并且满足定理的条件。在区间 (a,x_1) 中有 $|f(x)| < |f(a)| + \epsilon$；特别地，$|f(x_1)| < |f(a)| + \epsilon$。同样，在区间 (x_1,x_2) 中有 $|f(x)| < |f(x_1)| + \epsilon$，从而更强地有 $|f(x)| < |f(a)| + 2\epsilon$；特别地，对 $x = x_2$ 有 $|f(x_2)| < |f(a)| + 2\epsilon$；如此继续。对于最后一个区间，有

$$|f(x)| < |f(x_{p-1})| + \epsilon < |f(a)| + p\epsilon.$$

因此，$f(x)$ 在区间 (a,b) 中的绝对值总小于 $|f(a)| + p\epsilon$。由此可知，每一个在闭区间 (a,b) 中连续的函数，在该区间中有界。

推论 II. 假设区间 (a,b) 被分成 p 个部分区间

$$(a,x_1), \quad (x_1,x_2), \quad \ldots, \quad (x_{p-1},b),$$

使得对同一闭部分区间中的任意两个 x 值都有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon/2$。令 η 是一个小于所有差 $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots, b - x_{p-1}$ 的正数。现在在区间 (a,b) 中任取两个数，使 $|x' - x''| < \eta$，并求 $|f(x') - f(x'')|$ 的一个上界。如果两个数 x' 与

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

x'' 落在同一个部分区间中，就有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon/2$。如果不是，则 x' 与 x'' 必位于两个相邻区间中，并且容易看出 $|f(x')-f(x'')|<2(\epsilon/2)=\epsilon$。因此，对任意正数 ϵ，都能找到另一个正数 η，使得

$$|f(x')-f(x'')|<\epsilon,$$

其中 x' 与 x'' 是区间 (a,b) 中任意两个满足 $|x'-x''|<\eta$ 的数。这个性质也表述为：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中一致连续。

定理 B. 一个在闭区间 (a,b) 中连续的函数 $f(x)$，至少一次取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的每一个值；取值点 x 位于 a 与 b 之间。

先考虑一个特殊情形。假设 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，例如 $f(a)<0$ 且 $f(b)>0$。我们要证明，a 与 b 之间至少存在一个 x 值使 $f(x)=0$。现在 $f(x)$ 在 a 附近为负，在 b 附近为正。考虑 a 与 b 之间使 $f(x)$ 为正的那些 x 值的集合，并设 λ 是这个集合的下确界（$a<\lambda<b$）。由下确界的定义本身，只要 $h>0$ 且 $\lambda-h\in(a,b)$，就有 $f(\lambda-h)$ 为负或为零。因此 $f(\lambda)$，作为 $f(\lambda-h)$ 的极限，也为负或为零。但 $f(\lambda)$ 不能为负。事实上，假设 $f(\lambda)=-m$，其中 m 为正数。由于函数 $f(x)$ 在 $x=\lambda$ 处连续，可找到一个数 η，使得只要 $|x-\lambda|<\eta$ 就有 $|f(x)-f(\lambda)|<m$；于是对 λ 与 $\lambda+\eta$ 之间的一切 x 值，函数 $f(x)$ 都为负。因此 λ 不可能是使 $f(x)$ 为正的 x 值集合的下确界。所以 $f(\lambda)=0$。

现在设 N 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数。函数 $\phi(x)=f(x)-N$ 连续，并且在 $x=a$ 与 $x=b$ 处异号。因此，由刚处理过的特殊情形，它在区间 (a,b) 中至少一次为零。

定理 C. 每一个在闭区间 (a,b) 中连续的函数，至少一次真正取得它的上确界值和下确界值。

首先，每个连续函数，既然已经证明它有界，就有一个上确界 M 和一个下确界 m。例如证明：区间 (a,b) 中至少有一个 x 值使 $f(x)=M$。

取 $c=(a+b)/2$，则 $f(x)$ 的上确界至少在两个区间 $(a,c),(c,b)$ 中的一个上等于 M。用这个新区间替换 (a,b)，在其上重复这个过程，如此继续。像前面已经多次做过的那样推理，就可以形成一列无穷区间

$$(a,b),\quad (a_1,b_1),\quad (a_2,b_2),\quad \ldots,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中每一个都是前一个的一半，并且在每一个中 $f(x)$ 的上确界都是 M。于是，如果 λ 是两列

$$a, a_1, \ldots, a_n, \ldots \quad 与 \quad b, b_1, \ldots, b_n, \ldots$$

的共同极限，则 $f(\lambda)$ 等于 M。因为假设 $f(\lambda) = M - h$，其中 h 为正数。能找到一个正数 η，使得只要 x 保持在 $\lambda - \eta$ 与 $\lambda + \eta$ 之间，$f(x)$ 就保持在 $f(\lambda) - h/2$ 与 $f(\lambda) + h/2$ 之间，从而小于 $M - h/2$。现在选取 n 足够大，使 a_n 与 b_n 同它们的共同极限 λ 的差都小于 η。则区间 (a_n, b_n) 完全位于区间 $(\lambda - \eta, \lambda + \eta)$ 之内，于是显然，$f(x)$ 在区间 (a_n, b_n) 中的上确界不可能等于 M。

把这个定理同前一个定理结合，就看到任何在闭区间 (a, b) 中连续的函数，至少一次取得其上确界与下确界之间的每一个值。此外，定理 A 可以表述如下：给定一个在闭区间 (a, b) 中连续的函数，可以把该区间分成足够小的子区间，使函数在其中任一子区间中的振幅小于任意指定的正数。因为连续函数的振幅等于该函数在变量的两个特定值处函数值之差。

71. 和 S 与 s

设 $f(x)$ 是一个在区间 (a, b) 中有界的函数，可以连续也可以不连续，并设 $a < b$。把区间 (a, b) 分成若干较小的部分区间

$$(a, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad \ldots, \quad (x_{p-1}, b),$$

其中每个数 $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ 都大于前一个。设 M 与 m 是 $f(x)$ 在原区间中的上确界与下确界，M_i 与 m_i 是在区间 (x_{i-1}, x_i) 中的上确界与下确界，并置

$$S = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_p(b - x_{p-1}),$$

$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_p(b - x_{p-1}).$$

对区间 (a, b) 的每一种分割，都对应一个和 S 以及一个较小的和 s。显然，没有一个和 S 小于 $m(b - a)$，因为没有一个数 M_i 小于 m；因此这些和 S 有下确界 I。[5]同样，所有和 s 都不超过 $M(b - a)$，因而有上确界 I'。我们现在证明 I' 至多等于 I。为此显然只需证明：若 S, s 与 S', s' 是对应于区间 (a, b) 任意两种给定分割的两组和，则 $s \leq S'$ 且 $s' \leq S$。

[5]如果 $f(x)$ 是常数，则 $S = s$、$M = m$，并且一般地说，所提到的一切不等式都变成等式。——英译者

首先，假设把每一个子区间 $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots$ 再由新的分点细分成更小区间，并设

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_{l-1}, x_2, y_{l+1}, \ldots, b$$

是这样得到的新序列。这个新的分割方法叫作第一个分割的加细分割。设 Σ 与 σ 表示相对于区间 (a, b) 的这个新分割而言，与 S 与 s 类似的和；我们来比较 S, s 与 Σ, σ。例如，比较两个和 S 与 Σ 中来自区间 (a, x_1) 的部分。设 M_1' 与 m_1' 是 $f(x)$ 在区间 (a, y_1) 中的上确界与下确界，M_2' 与 m_2' 是在区间 (y_1, y_2) 中的上确界与下确界，依此类推，M_k' 与 m_k' 是在区间 (y_{k-1}, x_1) 中的上确界与下确界。则 Σ 中来自 (a, x_1) 的部分是

$$M_1'(y_1 - a) + M_2'(y_2 - y_1) + \cdots + M_k'(x_1 - y_{k-1});$$

而由于数 $M_1', M_2', \ldots, M_k'$ 都不能超过 M_1，显然上面的和至多等于 $M_1(x_1 - a)$。同样，Σ 中来自区间 (x_1, x_2) 的部分至多等于 $M_2(x_2 - x_1)$，其余亦然。把这些不等式相加，得 $\Sigma \leq S$；以同样方式容易证明 $\sigma \geq s$。

现在考虑任意两个分割方法，并设 S, s 与 S', s' 为对应的和。把这两种分割的分点叠加起来，得到第三种分割；它可以看作前两种给定分割中任意一种的加细分割。设 Σ 与 σ 是相对于这个辅助分割的两个和。由上可得关系

$$\Sigma \leq S, \qquad \sigma \geq s, \qquad \Sigma \leq S', \qquad \sigma \geq s'.$$

又因为 Σ 不小于 σ，于是得到 $s' \leq S$ 且 $s \leq S'$。既然没有一个和 S 小于任何一个和 s，极限 I 就不可能小于极限 I'；也就是说，$I \geq I'$。

72. 可积函数

在区间 (a, b) 中有界的函数称为在该区间中可积，如果当部分区间的数目无限增大并且每个部分区间都趋近于零时，两个和 S 与 s 趋近于同一极限。

> 函数在一个区间中可积的充要条件是：对应于任意正数 ϵ，存在另一个数 η，使得只要每个部分区间都小于 η，就有 $S - s$ 小于 ϵ。

这个条件首先是必要的；因为若 S 与 s 有同一极限 I，就可找到足够小的数 η，使得只要每个部分区间小于 η，就有 $|S - I|$ 与 $|s - I|$ 都小于 $\epsilon/2$。于是更有 $S - s < \epsilon$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

此外，这个条件也是充分的；因为可写成[6]

$$S - s = S - I + I - I' + I' - s,$$

并且由于数 $S - I, I - I', I' - s$ 中没有一个是负的，若它们的和小于 ϵ，则每一个都必小于 ϵ。但 $I - I'$ 是固定数，而 ϵ 是任意正数，故必有 $I' = I$。并且，只要每个部分区间小于 η，就有 $S - I < \epsilon$ 与 $I' - s < \epsilon$；这等价于说 S 与 s 有同一极限 I。

于是函数 $f(x)$ 称为在区间 (a, b) 中可积，而极限 I 叫作一个定积分。它用符号

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

表示；这个记号暗示了它的来源，读作"从 a 到 b 的 $f(x)\,dx$ 的定积分"。按照定义本身，对于任何分割方法，I 总位于两个和 S 与 s 之间。若取 S 与 s 之间的任何数作为 I 的近似值，则误差永不超过 $S - s$。

每一个连续函数都是可积的。

差 $S - s$ 小于或等于 $(b - a)\omega$，其中 ω 表示 $f(x)$ 在各部分区间中的振幅的上确界。但是可以选择 η，使得任何长度小于 η 的区间内的振幅都小于预先指定的正数（§70）。若把 η 选成使振幅小于 $\epsilon/(b - a)$，则差 $S - s$ 将小于 ϵ。

在一个区间中单调增大的函数或单调减小的函数, 在该区间中可积。

若对于给定区间 (a, b) 中任意两个值 x', x''，只要 $x' > x''$ 就有 $f(x') \geq f(x'')$，则称函数 $f(x)$ 在该区间中单调增大。函数在区间的某些部分上可以为常数，但如果它不是常数，就必须随 x 增大。把区间 (a, b) 分成 n 个子区间，每一个都小于 η，则可写

$$S = f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(b)(b - x_{n-1}),$$

$$s = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}),$$

因为例如 $f(x)$ 在区间 (a, x_1) 中的上确界正是 $f(x_1)$，下确界是 $f(a)$；其余各子区间同理。相减得

$$S - s = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)] + (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] + \cdots + (b - x_{n-1})[f(b) - f(x_{n-1})].$$

[6]关于 I 与 I' 存在性的证明，见 §73；这一节可先于 §72 阅读。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这个等式右端出现的差没有一个是负的，并且所有差 $x_1-a, x_2-x_1, \ldots$ 都小于 η；因而

$$S-s<\eta\{f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(b)-f(x_{n-1})\},$$

即

$$S-s<\eta[f(b)-f(a)].$$

只需取

$$\eta<\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$$

即可使 $S-s<\epsilon$。对于单调减小函数，推理相同。

回到一般情形。在积分的定义中，和 S 与 s 可以用更一般的表达式来替代。给定区间 (a,b) 的任意一种分割

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, b;$$

令 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ 依次是属于这些区间的值（$x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$）。则和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}) \quad (2)$$

显然位于和 S 与 s 之间，因为总有 $m_i\leq f(\xi_i)\leq M_i$。若函数可积，这个新和也以 I 为极限。特别地，如果假设 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 分别同 $a, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 重合，那么和 (2) 就化为上面（§65）考察过的和 (1)。

由积分定义可以立即得到若干命题。我们假定了 $a<b$；若现在交换这两个限 a 与 b，每个因子 x_i-x_{i-1} 都改变符号；因此

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

由定义也显然可得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

至少当 c 位于 a 与 b 之间时如此；例如当 b 位于 a 与 c 之间时，只要函数 $f(x)$ 在 a 与 c 之间可积，同一公式仍成立，因为它可写成

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

若 $f(x) = A\phi(x) + B\psi(x)$，其中 A 与 B 是任意两个常数，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\int_a^b \phi(x)\,dx + B\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

而对任意有限个函数之和，也有类似公式。

式 (2) 中的 $f(\xi_i)$ 还可由更一般的表达式替代。把区间 (a, b) 分成 n 个子区间 $(a, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i), \ldots$；对每一个子区间，附加一个量 ζ_i，它随该子区间长度 $x_i - x_{i-1}$ 趋近于零而趋近于零。若对应于每一个正数 ϵ，能够找到另一个不依赖于 i 的正数 η，使得只要 $x_i - x_{i-1}$ 小于 η 就有 $|\zeta_i| < \epsilon$，我们就说 ζ_i 一致地趋近于零。现在说明，只要 ζ_i 一致地趋近于零，和

$$S' = \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + \zeta_i](x_i - x_{i-1})$$

就以定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 为极限。事实上，设 η 足够小，使得只要每个子区间 $x_i - x_{i-1}$ 小于 η，两个不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \epsilon, \qquad |\zeta_i| < \epsilon$$

都成立。于是可写

$$\begin{aligned} S' - \int_a^b f(x)\,dx = {} & \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx\right] \\ & + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

显然，只要每个子区间小于 η，就有

$$\left|S' - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \epsilon + \epsilon(b - a).$$

定理得证。[7]

[7] 上面的定理可毫无困难地推广到二重积分和三重积分；我们将在好几处用到它（§80, §95, §97, §131, §144 等）。这个命题本质上只是 Duhamel 的一个定理的应用：若一个无穷小和的每个无穷小都由另一个无穷小替代，而后者同前者之差是高阶无穷小，则该和的极限不变。参见 W. F. Osgood, “The Integral as the Limit of a Sum and a Theorem of Duhamel’s,” *Annals of Mathematics*, 第 2 辑，第 IV 卷，pp. 161–178。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

73. Darboux 定理

给定任何在区间 (a,b) 中有界的函数 $f(x)$，当子区间的数目无限增加，并且每一个子区间都趋近于零时，和 S 与 s 分别趋近于它们的极限 I 与 I'。我们以和 S 为例来证明这一点。设 $a<b$，并且设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中为正；这总可以通过给 $f(x)$ 加上适当的常数来实现，而这又只等于给每一个和 S 加上一个常数。既然数 I 是所有和 S 的下确界，就可找到一种特定的分割方法，例如

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b,$$

使相应的和 S 小于 $I+\epsilon/2$, 其中 ϵ 是预先给定的正数。现在再考虑把 (a,b) 分成长度小于 η 的若干区间的一种分割，并设法求相应和 S' 的一个上界。先看那些不含任何点 $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ 的区间；回想 §71 的推理，可知 S' 中来自这些区间的部分小于原来的和 S, 因而小于 $I+\epsilon/2$。另一方面，含有集合 $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ 中某一点的区间数不超过 $p-1$，因此它们对和 S' 的贡献不超过 $(p-1)M\eta$，其中 M 是 $f(x)$ 的上确界。于是

$$S' < I + \frac{\epsilon}{2} + (p-1)M\eta,$$

只需取 η 小于 $\epsilon/[2M(p-1)]$，即可使 S' 小于 $I+\epsilon$。因此，所有和 S 的下确界 I 也是任意一列对应于一致无穷小子区间的和 S 的极限。

用类似的方法可以证明和 s 以 I' 为极限。如果 $f(x)$ 是任意函数，这两个极限 I 与 I' 一般不同。函数可积的充要条件就是 $I'=I$。

74. 积分第一中值公式

从现在起，除非明白说明相反情形，我们都假定积分号下的函数是连续的。

设 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是在区间 (a,b) 中都连续的两个函数, 其中一个, 例如 $\phi(x)$, 在整个区间中保持同一符号。为确定起见，我们还假定 $a<b$ 且 $\phi(x)>0$。

把区间 (a,b) 分成若干子区间，并令 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ 依次是属于这些小区间的 x 值。所有量 $f(\xi_i)$ 都位于 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中的最大值 M 与最小值 m 之间:

$$m \leq f(\xi_i) \leq M.$$

把这些不等式分别乘以因子 $\phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$；按假设这些因子都是正的，然后相加。和

$$\sum f(\xi_i)\phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

显然位于两个和

$$m\sum\phi(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\qquad M\sum\phi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

之间。因此，当子区间的数目无限增加时，在极限中有

$$m\int_a^b\phi(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx\le M\int_a^b\phi(x)\,dx,$$

这可写成

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx=\mu\int_a^b\phi(x)\,dx.$$

其中 μ 位于 m 与 M 之间。由于函数 $f(x)$ 连续，它在介于 a 与 b 之间的某个变量值 ξ 处取到值 μ；因而可把前一等式写成

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b\phi(x)\,dx,\qquad a\le\xi\le b.\tag{3}$$

[8]特别地，如果 $\phi(x)=1$，则积分 $\int_a^b dx$ 按积分定义本身化为 $b-a$，公式变成

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi).\tag{4}$$

75. 积分第二中值公式

还有第二个公式，由 Bonnet 给出；他是从 Abel 的一个重要引理推出它的。

引理。设 $\epsilon_0,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_p$ 是一组单调递减的正量，而 $u_0,u_1,\ldots,u_p$ 是同样数目的任意正量或负量。如果 A 与 B 分别是所有和

$$s_0=u_0,\quad s_1=u_0+u_1,\quad\ldots,\quad s_p=u_0+u_1+\cdots+u_p$$

中的最大者与最小者，则和

$$S=\epsilon_0u_0+\epsilon_1u_1+\cdots+\epsilon_pu_p$$

位于 $A\epsilon_0$ 与 $B\epsilon_0$ 之间，也就是说

$$A\epsilon_0\ge S\ge B\epsilon_0.$$

[8]上述不等式中只有在 $f(x)=k$ 为常函数时才会取等号。不过即便在这种情形下公式仍然成立，并且无论如何总可以选取 $a<\xi<b$。——英译者

事实上有

$$u_0 = s_0, \qquad u_1 = s_1 - s_0, \qquad \ldots, \qquad u_p = s_p - s_{p-1},$$

因而和 S 等于

$$s_0(\epsilon_0 - \epsilon_1) + s_1(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \cdots + s_{p-1}(\epsilon_{p-1} - \epsilon_p) + s_p\epsilon_p.$$

由于差 $\epsilon_0 - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{p-1} - \epsilon_p$ 没有一个是负的，把 $s_0, s_1, \ldots, s_p$ 先后换成它们的上界 A 与下界 B，就给出了 S 的两个界。这样得到

$$S \le A(\epsilon_0 - \epsilon_1 + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_{p-1} - \epsilon_p + \epsilon_p) = A\epsilon_0,$$

而同样显然有 $S \ge B\epsilon_0$。

现在设 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是 x 的两个连续函数，其中 $\phi(x)$ 在区间 $a \le x \le b$ 中是正的单调递减函数。则积分

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$$

是和

$$f(a)\phi(a)(x_1 - a) + f(x_1)\phi(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots$$

的极限。数 $\phi(a), \phi(x_1), \ldots$ 构成一组单调递减的正数；因此由引理，上面的和位于 $A\phi(a)$ 与 $B\phi(a)$ 之间，其中 A 与 B 分别是下列和中的最大者与最小者：

$$f(a)(x_1 - a),$$

$$f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$\ldots,$$

$$f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

令分割趋于无限细，显然所讨论的积分必位于 $A_1\phi(a)$ 与 $B_1\phi(a)$ 之间；这里 A_1 与 B_1 分别表示当 c 从 a 变到 b 时积分

$$\int_a^c f(x)\,dx$$

的最大值与最小值。由于这个积分显然是其上限 c 的连续函数（§76），可写出公式

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx, \qquad a \le \xi \le b. \tag{5}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当函数 $\phi(x)$ 单调递减但不总是正的时，有一个更一般的公式，归功于 Weierstrass。在这种情形中令 $\phi(x) = \phi(b) + \psi(x)$。于是 $\psi(x)$ 是正的单调递减函数。对它应用公式 (5)，得

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = [\phi(a) - \phi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

由此容易推出公式

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\phi(b)\,dx + [\phi(a) - \phi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

或

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \phi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

当函数 $\phi(x)$ 递增时，也有类似的公式。

76. 回到原函数

现在我们能够给出基本存在定理（§67）的一个纯分析证明。设 $f(x)$ 是任意连续函数。那么定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

其中下限 a 看作固定，是上限 x 的函数。我们来证明这个函数的导数就是 $f(x)$。首先有

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

或者应用第一中值公式 (4)，

$$F(x+h) - F(x) = hf(\xi),$$

其中 ξ 位于 x 与 $x+h$ 之间。当 h 趋近于零时，$f(\xi)$ 趋近于 $f(x)$；因此函数 $F(x)$ 的导数是 $f(x)$，这正是要证明的。

所有具有同一导数的其他函数，都由给 $F(x)$ 加上任意常数 C 得到。其中有且只有一个函数在 $x = a$ 时取预先指定的值 y_0，即函数

$$y_0 + \int_a^x f(t)\,dt.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当不会产生歧义时，同一个字母 x 既用来表示上限，也用来表示积分变量，并以 $\int_a^x f(x)\,dx$ 代替 $\int_a^x f(t)\,dt$。不过很清楚，一个定积分只依赖于积分限以及积分号下函数的形式。用来表示积分变量的字母完全无关紧要。

每一个导数为 $f(x)$ 的函数，都叫作 $f(x)$ 的*不定积分*，或者 $f(x)$ 的*原函数*，并用不写出积分限的符号

$$\int f(x)\,dx$$

表示。由上面显然有

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C.$$

反过来，如果用任何方法找到了一个导数为 $f(x)$ 的函数 $F(x)$，就可写

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C.$$

为了确定常数 C，只需注意当 $x = a$ 时左端为零。因此 $C = -F(a)$，而基本公式成为

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{6}$$

如果在这个公式中以 $F'(x)$ 代替 $f(x)$，它就变成

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x)\,dx,$$

或者应用积分第一中值公式，

$$F(x) - F(a) = (x-a)F'(\xi),$$

其中 ξ 位于 a 与 x 之间。这构成了导数中值定理的一个新证明；但它不如 §8 所给的证明一般，因为这里假设了导数 $F'(x)$ 连续。

在下一章中，我们将考察原函数已知的较简单函数类。眼下只列出若干立即可见的例子：

$$\int A(x-a)^\alpha\,dx = A\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha + 1 \neq 0;$$

$$\int A\frac{dx}{x-a} = A\log(x-a) + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m} + C, \qquad m \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+A}\right) + C, \qquad \int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \log f(x) + C.$$

基本公式 (6) 的证明建立在函数 $f(x)$ 在闭区间 (a,b) 中连续的假设上。如果忽略这个条件，就可能得到一些看似悖论的结果。例如取 $f(x)=1/x^2$，公式 (6) 给出

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

在我们现在的体系中，除非 a 与 b 同号，这个等式的左端没有意义；而即使 a 与 b 异号，右端也有完全确定的值。稍后在研究虚限之间的定积分时，我们会看到这个悖论的解释。

类似地，公式 (6) 导致等式

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \log\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right].$$

如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则 $f(x)$ 在 a 与 b 之间为零，于是上面等式两端在目前对我们都没有意义。以后我们会看到适宜赋予它们的意义。

再者，公式 (6) 还可能导致歧义。因此，若 $f(x)=1/(1+x^2)$，我们得到

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b - \arctan a.$$

这里左端完全确定，而右端有无穷多个定值。为避免这种歧义，考虑函数

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

这个函数 $F(x)$ 在整个实轴上连续，并且当 $x \to 0$ 时也趋于零（特别地，$F(0)=0$）。另一方面，设 $\arctan x$ 表示一个位于 $-\pi/2$ 与 $+\pi/2$ 之间的角。这两个函数有同一导数，并且在 $x=0$ 时都为零。于是它们相等，因此可写

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^b \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^a \frac{dt}{1+t^2} = \arctan b - \arctan a,$$

其中赋给反正切的值总是位于 $-\pi/2$ 与 $+\pi/2$ 之间。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

用类似的方法可推出公式

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b - \arcsin a,$$

其中根号取正值，a 与 b 均位于 -1 与 $+1$ 之间，并且 $\arcsin x$ 表示一个位于 $-\pi/2$ 与 $+\pi/2$ 之间的角。

77. 指标

一般说来，当原函数 $F(x)$ 是多值的时，应选择初值 $F(a)$ 的一个值，并随着 x 从 a 变到 b，跟随这个分支的连续变化。举例来说，考虑积分

$$\int_a^b \frac{P'Q-PQ'}{P^2+Q^2}\,dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx,$$

其中

$$f(x) = \frac{P}{Q},$$

而 P 与 Q 是两个在区间 (a,b) 中都连续，并且不同时为零的函数。如果 Q 在 a 与 b 之间不为零，则 $f(x)$ 不会变为无穷大，而 $\arctan f(x)$ 保持在 $-\pi/2$ 与 $+\pi/2$ 之间。但如果方程 $Q=0$ 在这个区间中有根，一般就不再如此。为了看出公式必须怎样修改，我们保留约定：arctan 表示 $-\pi/2$ 与 $+\pi/2$ 之间的角；并且先假定 Q 在 a 与 b 之间只对一个值 $x=c$ 为零。可把积分写成

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f(x)^2} = \int_a^{c-\epsilon} + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon'} + \int_{c+\epsilon'}^b,$$

其中三个积分中的被积函数与左端相同，ϵ 与 ϵ' 是两个很小的正数。由于 $f(x)$ 在 a 与 $c-\epsilon$ 之间以及在 $c+\epsilon'$ 与 b 之间都不变为无穷大，这又可写成

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f'\,dx}{1+f^2} = {} & \arctan f(c-\epsilon) - \arctan f(a) \\ & + \arctan f(b) - \arctan f(c+\epsilon') + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon'} \frac{f'\,dx}{1+f^2}.\end{aligned}$$

现在可能出现若干情况。为确定起见，设 $f(x)$ 通过从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 而成为无穷大。那么 $f(c-\epsilon)$ 将为正且很大，而 $\arctan f(c-\epsilon)$ 将非常接近 $\pi/2$；同时

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$f(c+\epsilon')$ 将为负且绝对值很大，而 $\arctan f(c+\epsilon')$ 将非常接近 $-\pi/2$。此外，从 $c-\epsilon$ 到 $c+\epsilon'$ 的积分的绝对值很小；令其趋于极限，就得到公式

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f(x)^2} = \pi + \arctan f(b) - \arctan f(a).$$

同样容易看出，如果 $f(x)$ 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，就必须减去 π。在一般情形中，我们可把区间 (a,b) 分成若干子区间，使 $f(x)$ 在每一个子区间中恰好一次变为无穷大。对每个子区间按上述方式处理并把所得结果相加，就得到公式

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f(x)^2} = \arctan f(b) - \arctan f(a) + (K-K')\pi,$$

其中 K 表示 $f(x)$ 通过从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 而成为无穷大的次数，K' 表示 $f(x)$ 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 的次数。数 $K-K'$ 叫作函数 $f(x)$ 在 a 与 b 之间的*指标*。

当 $f(x)$ 化为有理函数 V_1/V 时，这个指标可以不用知道 V 的根而用初等过程算出。显然可以假定 V_1 与 V 互素并且次数低于 V，因为从 V_1/V 中减去它的多项式部分并不改变指标。于是考虑为确定 V 与 V_1 的最大公因子所需的一列除法，并在每一步改变余式的符号。首先用 V_1 除 V，得到商 Q_1 与余式 $-V_2$。再用 V_2 除 V_1，得到商 Q_2 与余式 $-V_3$；如此继续。最后会得到一个常余式 $-V_{n+1}$。这些运算给出下列方程组：

$$V = V_1Q_1 - V_2,$$

$$V_1 = V_2Q_2 - V_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$V_{n-1} = V_nQ_n - V_{n+1}.$$

多项式序列

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_{r-1}, V_r, V_{r+1}, \ldots, V_n, V_{n+1} \tag{7}$$

具有 Sturm 序列的本质特征：1）序列中相邻的两个多项式不可能同时为零；因为若同时为零，就可逐次证明这个 x 值使所有其他多项式也为零，特别使 V_{n+1} 为零；2）当中间多项式之一 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ 为零时，序列 (7) 中的符号变号数不改变，因为若 V_r 在 $x=c$ 时为零，则 V_{r-1} 与 V_{r+1} 在 $x=c$ 时异号。由此可知，除了当 x 经过方程 $V=0$ 的根时，序列 (7) 中的符号变号数保持不变。如果 V_1/V 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$，这个数增加一；反之，如果 V_1/V 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，这个数减少一。因此，指标等于序列 (7) 在 $x=b$ 与 $x=a$ 时的符号变号数之差。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

78.　曲线面积

现在我们可以给出连续平面曲线所围面积的纯分析定义，只把矩形面积看作已知。为此，只需把 §72 的结果翻译成几何语言。设 $f(x)$ 是在闭区间 (a, b) 中连续的函数，并为确定起见设 $a < b$ 且 $f(x) > 0$。如前面一样（图 9，§65），考虑由轮廓 $AMBB_0A_0$ 所围的平面部分；这个轮廓由 x 轴上的线段 A_0B_0、两条平行于 y 轴且横坐标分别为 a 与 b 的直线 AA_0 与 BB_0、以及方程为 $y = f(x)$ 的曲线弧 AMB 组成。在 A_0B_0 上标出若干分点

$$P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots,$$

它们的横坐标为 $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots$；过这些点作平行于 y 轴的直线，分别在点

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i-1}, Q_i, \ldots$$

截弧 AMB。特别考虑由轮廓 $Q_{i-1}Q_iP_iP_{i-1}Q_{i-1}$ 所围的平面部分，并在弧 $Q_{i-1}Q_i$ 上标出最高点与最低点，也就是对应于 $f(x)$ 在区间 (x_{i-1}, x_i) 中的最大值 M_i 与最小值 m_i 的点。在图 9中，最低点与 Q_{i-1} 重合。令 R_i 表示以底 $P_{i-1}P_i$、高 M_i 作成的矩形 $P_{i-1}P_is_is_{i-1}$ 的面积；令 r_i 表示以底 $P_{i-1}P_i$、高 m_i 作成的矩形 $P_{i-1}P_iq_iQ_{i-1}$ 的面积。于是

$$R_i = M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad r_i = m_i(x_i - x_{i-1}).$$

前面（§72）所得结果现在可表述如下：不管分点怎样取，都存在一个固定数 I，它总是小于 $\sum R_i$ 且大于 $\sum r_i$；并且当子区间 $P_{i-1}P_i$ 的数目增加而每一个子区间都趋近于零时，两个和 $\sum R_i$ 与 $\sum r_i$ 都趋近于 I。我们把两个和 $\sum R_i$ 与 $\sum r_i$ 的这个共同极限 I，叫作由轮廓 $AMBB_0A_0A$ 所围平面部分的*面积*。这样，所考察的面积按定义等于定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

这个定义同平面曲线面积的通常观念相符合。因为在这个颇为含糊的观念中，有一点最为明确：由轮廓 $P_{i-1}P_iQ_im_iQ_{i-1}P_{i-1}$ 所围的面积位于两个矩形 $P_{i-1}P_is_is_{i-1}$ 与 $P_{i-1}P_iq_iQ_{i-1}$ 的面积 R_i 与 r_i 之间；所以由轮廓 $AMBB_0A_0A$ 所围的总面积必定是一个位于两个和 $\sum R_i$ 与 $\sum r_i$ 之间的量。但是定积分 I 是唯一的固定量，它对于 A_0B_0 的任意分割方式都始终位于这两个和之间，因为它是 $\sum R_i$ 与 $\sum r_i$ 的共同极限。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

给定面积也可以用无限多种其他方式定义为矩形面积和的极限。我们已经看到，定积分 I 也是和

$$\sum (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

的极限，其中 ξ_i 是区间 (x_{i-1}, x_i) 中的任意值。而这个和的元素

$$(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

表示一个矩形的面积；其底为 $P_{i-1}P_i$，其高是弧 $Q_{i-1}m_iQ_i$ 上任意一点的纵坐标。还应注意，只要采用 §67 中的约定，无论弧 AMB 相对于 x 轴的位置如何，定积分 I 都表示面积。因此每一个定积分都表示一个面积；所以这类积分的计算叫作*求积*。

面积概念既已一次性地严格化，就没有理由不在某些论证中使用它，尤其当这种使用能使论证近乎直观时。例如，很清楚，上面考虑的面积位于两个矩形面积之间；这两个矩形有共同的底 A_0B_0，其高分别为弧 AMB 的最小纵坐标与最大纵坐标。因此它等于一个以 A_0B_0 为底、以弧 AMB 上某个适当选定点的纵坐标为高的矩形面积；这只是积分第一中值公式的另一种说法。

79. 有限跳跃间断的函数

下面的说明也很重要。设 $f(x)$ 是在区间 (a, b) 中取有限值的函数，并且在 a 与 b 之间有限多个值处以如下方式间断。设 $f(x)$ 在从 c 到 $c + k$（$k > 0$）上连续，并且当 ϵ 通过正值趋近于零时，$f(c + \epsilon)$ 趋近于某个极限，我们记作 $f(c+0)$；同样，设 $f(x)$ 在 $c - k$ 与 c 之间连续，并且当 ϵ 通过正值趋近于零时，$f(c - \epsilon)$ 趋近于极限 $f(c - 0)$。如果两个极限 $f(c+0)$ 与 $f(c-0)$ 不同，则函数 $f(x)$ 在 $x = c$ 处间断。通常约定取

$$f(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}.$$

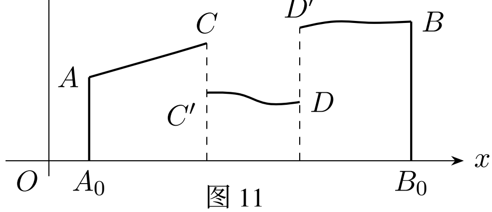


图 11

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果函数 $f(x)$ 有若干个这种间断点，它在图形上将由若干条互不相接的弧 $AC, C'D, D'B$ 表示。例如设 c 与 d 是这些间断点的横坐标。那么按照 §72 的定义，我们写

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$

从几何上说，这个定积分表示由轮廓 $ACC'DD'BB_0A_0A$ 所围的面积。

若现在用变量 x 代替上限 b，定积分

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

仍然是 x 的连续函数。在 $f(x)$ 连续的点 x，仍有 $F'(x) = f(x)$。对于间断点，例如 $x = c$，有

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x)\,dx = hf(c+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1,$$

并且比值 $[F(c+h)-F(c)]/h$, 按 h 为正或为负, 分别趋近于 $f(c+0)$ 或 $f(c-0)$。这是一个连续函数 $F(x)$ 的例子：它在某些点没有通常意义下的导数，而左右导数分别等于两个不同的值。

80. 曲线弧的长度

给定一条曲线弧 AB；在这条弧上取若干中间点 $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$，并把每一对相邻点用直线连接，作成折线 $Am_1m_2\cdots m_{n-1}B$。

如果当边数增加并且每一条边都趋近于零时，这条折线的周长趋近于一个极限，那么这个极限就定义为弧 AB 的*长度*。

设

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t), \qquad z = \psi(t)$$

是弧 AB 上一点的直角坐标，以参数 t 表示；并设当 t 从 a 变到 b（$a < b$）时，函数 f, ϕ, ψ 连续且有连续的一阶导数，并且点 (x, y, z) 描述弧 AB 而不改变运动方向。设

$$a, t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{n-1}, b$$

是对应于折线顶点的 t 值。那么边 c_i 由公式给出

$$c_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

或对 $x_i - x_{i-1}, \ldots$ 应用中值定理，

$$c_i = (t_i - t_{i-1})\sqrt{[f'(\xi_i)]^2 + [\phi'(\eta_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2},$$

其中 ξ_i, η_i, ζ_i 位于 t_{i-1} 与 t_i 之间。当区间 (t_{i-1}, t_i) 很小时，根式同表达式

$$\sqrt{[f'(t_{i-1})]^2 + [\phi'(t_{i-1})]^2 + [\psi'(t_{i-1})]^2}$$

只差很小。为了估计误差，可把它写成

$$\frac{[f'(\xi_i) - f'(t_{i-1})][f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})] + \cdots}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \phi'^2(\eta_i) + \psi'^2(\zeta_i)} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \phi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})}}.$$

但有

$$|f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})| < \sqrt{f'^2(\xi_i) + \cdots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \cdots},$$

因而

$$\left|\frac{f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \cdots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \cdots}}\right| < 1.$$

所以，如果每个区间取得足够小，使得函数 $f'(t), \phi'(t), \psi'(t)$ 中每一个在任一区间中的振幅都小于 $\varepsilon/3$，就有

$$\sqrt{f'^2(\xi_i) + \cdots} = \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \cdots} + \varepsilon_i, \qquad |\varepsilon_i| < \varepsilon;$$

于是折线的周长等于

$$\sum(t_i - t_{i-1})\sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \phi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})} + \sum \varepsilon_i(t_i - t_{i-1}).$$

补充项 $\sum \varepsilon_i(t_i - t_{i-1})$ 的绝对值小于 $\varepsilon \sum(t_i - t_{i-1})$，也就是小于 $\varepsilon(b-a)$。既然只要区间取得足够小，ε 就可取得任意小，可知这个项趋近于零；因此弧 AB 的长度 s 等于定积分

$$s = \int_a^b \sqrt{f'^2 + \phi'^2 + \psi'^2}\, dt. \tag{8}$$

这个定义可以推广到导数 f', ϕ', ψ' 在弧 AB 的有限多个点处不连续的情形；当曲线有一个或多个角点时，就会发生这种情形。只需把弧 AB 分成若干部分，使得 f', ϕ', ψ' 在每一部分上连续即可。

由公式 (8) 可知，从一个固定点 A 到对应于参数值 t 的可变点 M 的弧长 s，是 t 的函数，其导数为

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'^2 + \phi'^2 + \psi'^2};$$

于是平方并乘以 dt^2，得到公式

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{9}$$

它不含自变量。这个公式也很容易从几何意义来记住，因为它表示 ds 是一个直角平行六面体的对角线，而这个平行六面体的三条相邻棱分别为 dx, dy, dz。

注。把积分第一中值公式应用于表示弧 M_0M_1 的定积分，设它的端点对应于参数值 t_0, t_1（$t_1 > t_0$），可得

$$s = \mathrm{arc}\, M_0M_1 = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\theta) + \phi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)},$$

其中 θ 位于区间 (t_0, t_1) 中。另一方面，用 c 表示弦 M_0M_1，有

$$c^2 = [f(t_1) - f(t_0)]^2 + [\phi(t_1) - \phi(t_0)]^2 + [\psi(t_1) - \psi(t_0)]^2.$$

对每个差 $f(t_1) - f(t_0), \ldots$ 应用导数中值公式，得到

$$c = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\xi) + \phi'^2(\eta) + \psi'^2(\zeta)},$$

其中三个数 ξ, η, ζ 都属于区间 (t_0, t_1)。由上面的计算可知，只要函数 $f'(t), \phi'(t), \psi'(t)$ 中每一个在区间 (t_0, t_1) 内的振幅都小于 $\varepsilon/3$，两个根式之差就小于 ε。因此有

$$s - c < \varepsilon(t_1 - t_0),$$

或者最终

$$1 - \frac{c}{s} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{f'^2(\theta) + \phi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}}.$$

如果弧 M_0M_1 是无穷小的，则 $t_1 - t_0$ 趋近于零；于是 ε，从而 $1 - c/s$，也趋近于零。由此可知，无穷小弧与其弦之比以一为极限。

例。求一条平面曲线弧的长度，设它在极坐标中的方程为 $\rho = f(\omega)$。取 ω 为自变量，则曲线由三个方程 $x = \rho\cos\omega$，$y = \rho\sin\omega$，$z = 0$ 表示；因此

$$\begin{aligned}ds^2 = dx^2 + dy^2 &= (\cos\omega\, d\rho - \rho\sin\omega\, d\omega)^2 \\ &\quad + (\sin\omega\, d\rho + \rho\cos\omega\, d\omega)^2,\end{aligned}$$

或者化简后，

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

例如考虑心脏线，其方程为

$$\rho = R + R\cos\omega.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

由前一公式有

$$ds^2 = R^2 d\omega^2 \left[\sin^2\omega + (1+\cos\omega)^2\right] = 4R^2\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega^2,$$

或者，只让 ω 从 0 变到 π，

$$ds = 2R\cos\frac{\omega}{2}\,d\omega;$$

弧长为

$$\left(4R\sin\frac{\omega}{2}\right)_{\omega_0}^{\omega_1},$$

其中 ω_0 与 ω_1 是对应于弧端点的极角。因此整条曲线的总长为 $8R$。

81. 方向余弦

在研究曲线性质时，我们常被引向把弧本身作为自变量。沿曲线选定某个方向为正方向，并用 s 表示某个固定点 A 与可变点 M 之间的弧长 AM；符号按 M 位于从 A 出发的正方向还是负方向而取 $+$ 或 $-$。在曲线任一点 M，取与弧长增加方向相一致的切线方向，并设 α, β, γ 是这个方向与三条直角坐标轴 Ox, Oy, Oz 的正方向所成的角。于是有下列关系：

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz} = \pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \pm\frac{1}{ds}.$$

为了决定取哪个符号，假设切线正方向与 x 轴成锐角；那么 x 与 s 同时增大，应取 $+$ 号。如果角 α 是钝角，$\cos\alpha$ 为负，s 增大时 x 减小，dx/ds 为负，于是仍应取 $+$ 号。因此在任何情形下都有公式

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}, \tag{10}$$

其中 dx, dy, dz, ds 都是相对于同一个自变量取的微分；这个自变量除此之外任意。

82. 直线段的变分

设 MM_1 是一条直线段，它的两个端点分别描绘两条曲线 C, C_1。在这两条曲线上各选一点作为原点，并选定一个正的运动方向；采用下面的记号：s 为弧 AM；s_1 为弧 A_1M_1，这两条弧都按同一符号约定取；l 为长度 MM_1；θ 为 MM_1 与切线 MT 的正方向之间的角；θ_1 为 M_1M 与切线 M_1T_1 的正方向之间的角。我们要在 θ, θ_1 以及微分 ds, ds_1, dl 之间找出一个关系。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

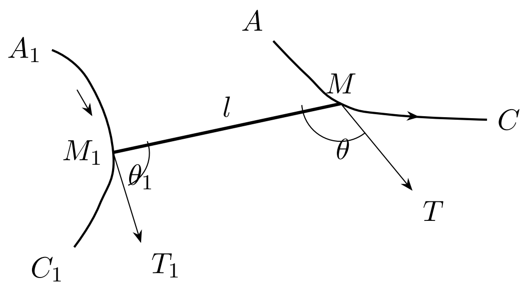


图 12

令 (x, y, z)、(x_1, y_1, z_1) 分别为点 M, M_1 的坐标，α, β, γ 为 MT 的方向角，$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 为 M_1T_1 的方向角。于是有

$$l^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

由此可推出公式

$$\begin{aligned} l\,dl = (x - x_1)(dx - dx_1) + (y - y_1)(dy - dy_1) \\ + (z - z_1)(dz - dz_1), \end{aligned}$$

借助公式 (10) 以及曲线 C_1 的相应公式，可把它写成

$$\begin{aligned} dl = &\left(\frac{x - x_1}{l}\cos\alpha + \frac{y - y_1}{l}\cos\beta + \frac{z - z_1}{l}\cos\gamma\right) ds \\ &+ \left(\frac{x_1 - x}{l}\cos\alpha_1 + \frac{y_1 - y}{l}\cos\beta_1 + \frac{z_1 - z}{l}\cos\gamma_1\right) ds_1. \end{aligned}$$

但是 $(x - x_1)/l, (y - y_1)/l, (z - z_1)/l$ 是 M_1M 的方向余弦，因此 ds 的系数是 $-\cos\theta$。同样，ds_1 的系数是 $-\cos\theta_1$；于是所求关系为

$$dl = -ds\cos\theta - ds_1\cos\theta_1. \tag{10'}$$

我们将经常应用这个公式；下面立即讨论其中一个应用。

83. Graves 与 Chasles 定理

设 E 与 E' 是两个共焦椭圆；从位于外椭圆 E' 上的一点 M，向内椭圆 E 作两条切线 MA, MB。当点 M 描述椭圆 E' 时，差

$$MA + MB - \text{arc}\, ANB$$

保持不变。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

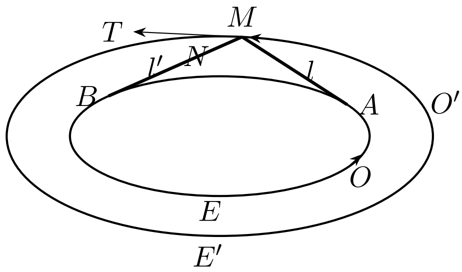


图 13

用 s 与 s' 表示弧 OA 与 OB，用 σ 表示弧 $O'M$，用 l 与 l' 表示距离 AM 与 BM，用 θ 表示 MB 与切线 MT 的正方向之间的角。由于椭圆共焦，MA 与 MT 之间的角等于 $\pi-\theta$。注意到 AM 与点 A 处切线的正方向重合，而 BM 是点 B 处切线的负方向；由公式 (10') 依次得到

$$dl=-ds+d\sigma\cos\theta,\qquad dl'=ds'-d\sigma\cos\theta;$$

相加得

$$d(l+l')=d(s'-s)=d(\text{arc }ANB),$$

这就证明了上面陈述的命题。

上面的定理归功于英国几何学家 Graves。下面这个由 Chasles 发现的定理可用类似方式证明：给定一个椭圆和一个与它共焦、并在 N 处与之相交的双曲线。若从双曲线通过 N 的那一支上的一点 M，向椭圆作两条切线 MA 与 MB，则弧差 $NA-NB$ 等于切线长差 $MA-MB$。

III. 变量代换；分部积分

有大量不能直接求值的定积分，可以用本节将要讨论的两个一般过程来处理。

84. 变量代换

在定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 中，若借助代换 $x=\phi(t)$ 把变量 x 换成一个新的自变量 t，便得到一个新的定积分。设函数 $\phi(t)$ 在 α 与 β 之间连续，并有连续导数；又设当 t 从 α 变到 β 时，$\phi(t)$ 从 a 变到 b，且不改变方向。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

把区间 (α,β) 用中间值

$$\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$$

分成若干子区间，并令

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$$

为 $x=\phi(t)$ 的相应值。由中值定理，有

$$x_i - x_{i-1} = (t_i - t_{i-1})\phi'(\theta_i),$$

其中 θ_i 介于 t_{i-1} 与 t_i 之间。令 $\xi_i=\phi(\theta_i)$ 为相应的 x 值；它位于 x_{i-1} 与 x_i 之间。于是和

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})$$

以原来的定积分为极限。但这个和也可写成

$$f[\phi(\theta_1)]\phi'(\theta_1)(t_1-\alpha)+\cdots+f[\phi(\theta_i)]\phi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1})+\cdots,$$

从这种形式可见，它又以新的定积分

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt$$

为极限。因此得到等式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt, \tag{11}$$

这就是变量代换公式。应注意，积分号下的新微分，是把微分 $f(x)\,dx$ 中的 x 与 dx 分别用它们的值 $\phi(t)$ 与 $\phi'(t)\,dt$ 替代所得；而新的积分限，则是同旧积分限相对应的 t 的值。适当地选择函数 $\phi(t)$，新的积分可能比旧的容易求值；但在这件事上不可能规定任何固定的规则。

例如，取定积分

$$\int_0^x \frac{du}{(u-\alpha)^2+\beta^2},$$

并作代换 $u=\alpha+\beta t$。它变为

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{du}{(u-\alpha)^2+\beta^2} &= \frac{1}{\beta}\int_{-\alpha/\beta}^{(x-\alpha)/\beta} \frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{1}{\beta}\left(\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}+\arctan\frac{\alpha}{\beta}\right).\end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在建立公式 (11) 时所作的假设并非全都必要。例如，函数 $\phi(t)$ 并不一定要在 t 从 α 变到 β 时始终沿同一方向变化。为确定起见，假设当 t 从 α 增至 γ（$\gamma<\beta$）时，$\phi(t)$ 从 a 单调增至 c（$c>b$）；随后当 t 从 γ 增至 β 时，$\phi(t)$ 从 c 减至 b。若函数 $f(x)$ 在区间 (a,c) 中连续，则可把公式分别应用到两个区间 (a,c) 与 (c,b)，得到

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_\alpha^\gamma f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt,\qquad \int_c^b f(x)\,dx=\int_\gamma^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt;$$

相加即得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt.$$

另一方面，函数 $\phi(t)$ 对所有 t 值必须是单值定义的，这一点确实必要。若忽略这个条件，就可能发生谬误。例如若把公式用于积分 $\int_{-1}^{+1}dx$，并用变换 $x=t^{3/2}$，就会导致

$$\int_{-1}^{+1}dx=\int_1^1\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt,$$

这显然不正确, 因为第二个积分为零。为了正确应用公式, 必须把区间 $(-1,+1)$ 分成两个区间 $(-1,0)$ 与 $(0,1)$。在第一个区间中，应取 $x=-\sqrt{t^3}$，并令 t 从 1 变到 0；在第二个半区间中，应取 $x=\sqrt{t^3}$，并令 t 从 0 变到 1。于是得到正确结果

$$\int_{-1}^{+1}dx=3\int_0^1\sqrt{t}\,dt=[2t^{3/2}]_0^1=2.$$

注。若在公式 (11) 中把上限 b 与 β 分别换成 x 与 t，它就变为

$$\int_a^x f(x)\,dx=\int_\alpha^t f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt,$$

这说明变换 $x=\phi(t)$ 把一个导数为 $f(x)$ 的函数 $F(x)$，化为一个导数为 $f[\phi(t)]\phi'(t)$ 的函数 $\Phi(t)$。这也可由复合函数求导公式立即得到。因此一般可写

$$\int f(x)\,dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt.$$

这就是不定积分中的变量代换公式。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

85.　分部积分

设 u 与 v 是两个函数，它们连同导数 u' 与 v' 在 a 与 b 之间连续。于是有

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

两端积分便得

$$\int_a^b \frac{d(uv)}{dx}\,dx = \int_a^b u\frac{dv}{dx}\,dx + \int_a^b v\frac{du}{dx}\,dx.$$

这可写成

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{12}$$

其中符号 $[F(x)]_a^b$ 一般表示差 $F(b) - F(a)$。若把上限 b 换成变量上限 x，而保持下限 a 为常数，也就是从定积分转到不定积分，则这个公式变为

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{13}$$

这样，积分 $\int u\,dv$ 的计算就化为积分 $\int v\,du$ 的计算，而后者可能更容易。

例如，试求定积分

$$\int_a^b x^m \log x\,dx, \qquad m+1 \neq 0.$$

取 $u = \log x$，$v = x^{m+1}/(m+1)$，由公式 (12) 得

$$\begin{aligned}\int_a^b x^m \log x\,dx &= \left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1}\right]_a^b - \frac{1}{m+1}\int_a^b x^m\,dx \\ &= \left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\right]_a^b.\end{aligned}$$

当 $m+1=0$ 时，这个公式不能应用；在这个特殊情形下有

$$\int_a^b \frac{\log x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_a^b.$$

公式 (12) 可以推广。用

$$u', u'', \ldots, u^{(n+1)}; \qquad v', v'', \ldots, v^{(n+1)}$$

表示两个函数 u 与 v 的逐次导数。于是把公式 (12) 应用于积分

$$\int u\,dv^{(n)},\quad \int u'\,dv^{(n-1)},\quad \ldots,$$

并交错取符号相加，便得到

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \\ \cdots + (-1)^n u^{(n)}v]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx. \tag{14}$$

特别地，当积分号下的函数是一个次数至多为 n 的多项式同某个已知函数 v 的 $(n+1)$ 阶导数之积时，这个公式适用。比如要求

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx,$$

其中 $f(x)$ 是 n 次多项式。令 $u = f(x)$、$v = e^{\omega x}/\omega^{n+1}$，公式 (14) 化为

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx = \left\{ e^{\omega x}\left[\frac{f(x)}{\omega} - \frac{f'(x)}{\omega^2} + \cdots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{\omega^{n+1}}\right]\right\}_a^b. \tag{15}$$

同一种方法，或者说连续施行分部积分，也使我们能够求定积分

$$\int_a^b \cos mx\, f(x)\,dx,\qquad \int_a^b \sin mx\, f(x)\,dx,$$

其中 $f(x)$ 是多项式。

86. 带余项的 Taylor 公式

在公式 (14) 中，用一个函数 $F(x)$ 替代 u；这个函数连同它的前 $n+1$ 个导数在 a 与 b 之间连续；再令 $v = (b-x)^n$。于是

$$v' = -n(b-x)^{n-1},\quad v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2},\quad \ldots,$$

$$v^{(n)} = (-1)^n 1\cdot 2\cdots n,\qquad v^{(n+1)} = 0.$$

由于 $v, v', v'', \ldots, v^{(n-1)}$ 在 $x = b$ 时都消失，通用公式给出

$$0 = (-1)^n\Big[n!F(b) - n!F(a) - n!F'(a)(b-a) - \frac{n!}{2}F''(a)(b-a)^2 \\ - \cdots - F^{(n)}(a)(b-a)^n\Big] + (-1)^{n+1}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因而

$$F(b) = F(a) + \frac{b-a}{1}F'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx.$$

由于因子 $(b-x)^n$ 在 x 从 a 变到 b 时保持同一符号，中值公式给出

$$\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx = F^{(n+1)}(\xi)\int_a^b (b-x)^n\,dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}F^{(n+1)}(\xi),$$

其中 ξ 介于 a 与 b 之间。代入这个值，便得到带 Lagrange 余项的 Taylor 公式。

87. 数 e 的超越性

由公式 (15) 可以证明 Hermite 的一个著名定理：数 e 不是任何以整数为系数的代数方程的根。[9] 在公式 (15) 中令 $a=0$ 且 $\omega=-1$，它变为

$$\int_0^b e^{-x}f(x)\,dx = -[e^{-x}F(x)]_0^b,$$

其中

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x),$$

这个式子还可写成

$$F(b) = e^bF(0) - e^b\int_0^b f(x)e^{-x}\,dx. \tag{16}$$

假设 e 是一个以整数为系数的代数方程

$$c_0 + c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_me^m = 0$$

的根。在 (16) 中依次取 $b=0,1,2,\ldots,m$，分别乘以 $c_0,c_1,\ldots,c_m$ 后相加，得到

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_mF(m) + \sum_{i=0}^m c_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}\,dx = 0. \tag{17}$$

[9]这里给出的证明归于 D. Hilbert；他从 Hermite 所用的方法获得启发。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

下面说明，若适当地选择 f，这种关系是不可能的。令

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-m)^p,$$

其中 p 是一个大于 m 的素数。这个多项式的次数是 $mp+p-1$，而它在第 p 阶以后各逐次导数的系数都是 p 的整数倍。此外，f 连同它的前 $p-1$ 个导数在 $x=1,2,\ldots,m$ 时都为零；所以 $F(1),F(2),\ldots,F(m)$ 全都是 p 的整数倍。

还需计算 $F(0)$。有

$$F(0)=f(0)+f'(0)+\cdots+f^{(p-1)}(0)+f^{(p)}(0)+\cdots.$$

从第一项直到 $f^{(p-2)}(0)$ 都为零，而 $f^{(p)}(0),f^{(p+1)}(0),\ldots$ 都是 p 的整数倍。为求 $f^{(p-1)}(0)$，只需把 $f(x)$ 中 x^{p-1} 的系数乘以 $(p-1)!$，得到

$$\pm(1\cdot 2\cdots m)^p.$$

因此

$$c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_mF(m)$$

等于 p 的一个整数倍再加上

$$\pm c_0(1\cdot 2\cdots m)^p.$$

如果取 p 大于 m 且大于 $|c_0|$，这个整数就不能被 p 整除，因而不为零。另一方面，在 $0\le x\le i$ 时，$f(x)$ 的每一个因子都小于 m，并且

$$|f(x)|<\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!},\qquad \left|\int_0^i f(x)e^{-x}\,dx\right|<\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

于是

$$\left|\sum c_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}\,dx\right|<M\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}e^m=\varphi(p),$$

其中 M 是 $|c_0|+|c_1|+\cdots+|c_m|$ 的一个上界。当 p 无限增大时，$\varphi(p)$ 趋于零。因此，对于足够大的 p，方程 (17) 不可能成立；Hermite 定理由此得证。

88. Legendre 多项式

考察积分

$$\int_a^b QP_n\,dx,$$

其中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，而 Q 是次数小于 n 的多项式。现在试求 $P_n(x)$，使得无论多项式 Q 怎样取，上述积分都为零。可把 $P_n(x)$ 看成某个 $2n$ 次多项式 R 的第 n 阶导数；而这个多项式 R 并不完全确定，因为可以给它加上一个任意的 $(n-1)$ 次多项式而不改变它的第 n 阶导数。因此可设 $P_n = d^nR/dx^n$，其中 R 连同它的前 $n-1$ 个导数在 $x=a$ 时都为零。分部积分给出

$$\int_a^b Q\frac{d^nR}{dx^n}\,dx = \left[Q\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}} - Q'\frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}} + \cdots \pm R\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right]_a^b.$$

由于

$$R(a) = R'(a) = \cdots = R^{(n-1)}(a) = 0,$$

而 $Q(b), Q'(b), \ldots, Q^{(n-1)}(b)$ 的值可以任意，故还必须有

$$R(b) = R'(b) = \cdots = R^{(n-1)}(b) = 0.$$

所以，除一个常数因子外，

$$R(x) = (x-a)^n(x-b)^n,$$

并且

$$P_n = C\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n].$$

当积分限为 -1 与 $+1$ 时，多项式 P_n 就是 Legendre 多项式。按 Legendre 的常数取法，置

$$X_n = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{18}$$

并令 $X_0 = 1$，则

$$X_0 = 1, \qquad X_1 = x, \qquad X_2 = \frac{3x^2-1}{2}, \qquad X_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, \qquad \ldots.$$

一般地，X_n 是 n 次多项式；其中 x 的各指数随 n 为偶或为奇。Leibniz 公式给出

$$X_n(1) = 1, \qquad X_n(-1) = (-1)^n. \tag{19}$$

由上面确立的一般性质，

$$\int_{-1}^{+1} X_n\phi(x)\,dx = 0, \tag{20}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 $\phi(x)$ 是任意次数小于 n 的多项式。特别地，若 m 与 n 是不同整数，则

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0. \tag{21}$$

公式 (21) 使我们能够在三个相继多项式之间建立递推公式。由于任意 n 次多项式都可写成 $X_0, X_1, \ldots, X_n$ 的线性函数，设

$$xX_n = C_0 X_{n+1} + C_1 X_n + C_2 X_{n-1} + C_3 X_{n-2} + \cdots .$$

乘以 X_{n-2} 并从 -1 到 $+1$ 积分，可知 $C_3 = 0$；类似地 $C_4 = C_5 = \cdots = 0$。又因为 xX_n 中不含 x^n，所以 $C_1 = 0$。比较 x^{n+1} 的系数，然后令 $x = 1$，得

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0. \tag{22}$$

关系 (22) 表明序列

$$X_0, \quad X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n \tag{23}$$

具有 Sturm 序列的性质。当 x 从 -1 连续变到 $+1$ 时，这个序列中的变号次数只有在 x 经过方程 $X_n = 0$ 的一个根时才会改变。但是公式 (19) 表明，当 $x = -1$ 时，序列 (23) 中有 n 次变号；当 $x = 1$ 时，没有变号。因此方程 $X_n = 0$ 在 -1 与 $+1$ 之间有 n 个实根；这也可由 Rolle 定理容易地推出。

IV. 积分概念的推广；反常积分；线积分

注。[10] 在本节中，我们把定积分的概念推广到被积函数变为无穷大、或者积分区间无界的情形，并引入线积分。

89. 被积函数变为无穷大

到目前为止，我们一直假定被积函数在积分限之间保持有限。但在某些情形中，可以把定义推广到在积分限之间变为无穷大的函数。先考虑下列特殊情形：$f(x)$ 对介于 a 与 b 之间的一切 x 值以及 $x = b$ 都连续，但在 $x = a$ 处变为无穷大。为确定起见，假定 $a < b$。那么，不管把 ρ 取成多么小，只要 $\rho > 0$，积分

$$\int_{a+\rho}^{b} f(x) \, dx$$

[10] 如果愿意，也可以先读下一章，再读本章最后几节。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

都有一个确定的值。如果当 ρ 趋于零时这个积分趋近于一个极限，通常并且自然地把这个极限记作

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

如果已知 $f(x)$ 的一个原函数，记作 $F(x)$，则可写

$$\int_{a+\rho}^b f(x)\,dx = F(b) - F(a+\rho),$$

于是只需考察当 ρ 趋于零时 $F(a+\rho)$ 是否收敛到一个极限。例如有

$$\int_{a+\rho}^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = -\frac{M}{\mu-1}\left[\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\rho^{\mu-1}}\right], \qquad \mu \neq 1.$$

如果 $\mu > 1$，当 ρ 趋于零时，项 $1/\rho^{\mu-1}$ 无限增大。但若 μ 小于 1，则可写 $1/\rho^{\mu-1} = \rho^{1-\mu}$，显然这一项随 ρ 一同趋于零。因此在这种情形下，定积分趋近于一个极限，并且可写

$$\int_a^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = \frac{M(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

如果 $\mu = 1$，则有

$$\int_{a+\rho}^b \frac{M\,dx}{x-a} = M\log\frac{b-a}{\rho},$$

而当 ρ 趋于零时右端无限增大。总之，给定积分趋近于极限的充要条件是 μ 小于 1。

若 μ 为正，则直线 $x = a$ 是曲线

$$y = \frac{M}{(x-a)^\mu}$$

的渐近线。由上面的结果可知，由 x 轴、固定直线 $x = b$、这条曲线及其渐近线所围成的面积，在 $\mu < 1$ 时有有限值。

如果不知道 $f(x)$ 的原函数，就可以把给定积分同已知积分比较。上面的积分通常被取作比较积分；这导出一些实用规则，在许多情形中已经足够。首先，上限 b 并不进入推理，因为一切都取决于 $f(x)$ 在 $x = a$ 处变为无穷大的方式。因此可把 b 换成 a 与 b 之间任意一个数，这相当于写

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

特别地，除非 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近有无穷多个零点，否则可以假定 $f(x)$ 在 a 与 c 之间保持同一符号。

我们先证明下面的引理:

设 $\phi(x)$ 是区间 (a,b) 中的正函数，并且假定当下限趋近于 a 时积分

$$\int_a^b \phi(x)\,dx$$

趋近于一个极限。那么，如果在整个区间中都有 $|f(x)|<\phi(x)$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

也趋近于一个极限。

如果 $f(x)$ 在整个区间 (a,b) 中为正，证明是直接的。因为 $f(x)$ 小于 $\phi(x)$，所以

$$\int_{a+\rho}^b f(x)\,dx < \int_{a+\rho}^b \phi(x)\,dx.$$

而且，当 ρ 减小时，$\int_{a+\rho}^b f(x)\,dx$ 增大，因为它的一切元素都是正的。但上面的不等式表明，它始终小于第二个积分；因此它也趋近于一个极限。如果 $f(x)$ 在 a 与 b 之间恒为负，只要把每一个元素改变符号即可。最后，如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近有无穷多个零点，可以写出等式

$$\int_{a+\rho}^b f(x)\,dx = \int_{a+\rho}^b \{f(x)+|f(x)|\}\,dx - \int_{a+\rho}^b |f(x)|\,dx.$$

右端第二个积分趋近于一个极限，因为 $|f(x)|<\phi(x)$。另一方面，函数 $f(x)+|f(x)|$ 在 a 与 b 之间或者为正或者为零，并且它的值不超过 $2\phi(x)$；所以相应积分也趋近于一个极限，引理得证。

由此可知，如果一个函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不趋近于任何极限，但其绝对值始终小于一个固定数，则积分趋近于一个极限。例如积分

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$$

有一个完全确定的值。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

实用规则。设函数 $f(x)$ 可写成

$$f(x)=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}},$$

其中函数 $\psi(x)$ 当 x 趋近于 a 时保持有限。

如果 $\mu<1$，并且函数 $\psi(x)$ 的绝对值小于某个固定数 M，则积分趋近于一个极限。但若 $\mu\geq 1$，并且 $\psi(x)$ 的绝对值大于某个正数 m，则积分不趋近于任何极限。

定理的第一部分很容易证明，因为 $|f(x)|$ 小于 $M/(x-a)^{\mu}$，而后一个函数的积分在 $\mu<1$ 时趋近于极限。为了证明第二部分，先注意 $\psi(x)$ 在 $x=a$ 附近保持同一符号，因为它的绝对值总超过一个正数 m。设 $\psi(x)>0$ 于 a 与 b 之间。于是可写

$$\int_{a+\rho}^{b} f(x)\,dx>\int_{a+\rho}^{b}\frac{m\,dx}{(x-a)^{\mu}},$$

而当 ρ 减小时，第二个积分无限增大。

只要能够找到一个指数 μ，使得乘积 $(x-a)^{\mu}f(x)$ 在 $x=a$ 处趋近于一个不为零的极限 K，这些规则就足够了。如果 μ 小于 1，可以把上限 b 取到足够接近 a，使得在区间 (a,b) 内有

$$|f(x)|<\frac{L}{(x-a)^{\mu}},$$

其中 L 是大于 $|K|$ 的正数。因此积分趋近于极限。另一方面，如果 $\mu\geq 1$，可把 b 取到足够接近 a，使得在区间 (a,b) 内有

$$|f(x)|>\frac{l}{(x-a)^{\mu}},$$

其中 l 是小于 $|K|$ 的正数。又因函数 $f(x)$ 连续，所以保持同一符号；因此积分

$$\int_{a+\rho}^{b} f(x)\,dx$$

的绝对值无限增大。[11]

[11]命题的第一部分也可表述如下：如果能够找到一个指数 μ $(0<\mu<1)$，使乘积 $(x-a)^{\mu}f(x)$ 在 x 趋近于 a 时趋近于一个极限 A，则积分有极限；这里不排除 $A=0$ 的情形。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

例。设 $f(x) = P/Q$ 是一个有理函数。如果 a 是分母的 m 重根，那么当 x 趋近于 a 时，乘积 $(x-a)^m f(x)$ 趋近于一个不为零的极限。由于 m 至少等于 1，显然当 ρ 趋近于零时，积分

$$\int_{a+\rho}^{b} f(x)\,dx$$

无限增大。但若考虑函数

$$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

其中 P 与 R 是两个多项式，并且 $R(x)$ 与它的导数互素；若 a 是 $R(x)$ 的一个根，则乘积 $(x-a)^{1/2} f(x)$ 当 x 趋近于 a 时趋近于一个极限，并且积分本身趋近于一个极限。例如积分

$$\int_{-1+\rho}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

当 ρ 趋近于零时趋近于 $\pi/2$。

再考虑积分 $\int_\rho^1 \log x\,dx$。乘积 $x^{1/2}\log x$ 的极限为零。从足够小的 x 值开始，便可写 $|\log x| < Mx^{-1/2}$，其中 M 是任意选取的一个正数。因此积分趋近于一个极限。

关于下限 a 所说的一切，对上限 b 可不加修改地重复。如果函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 处为无穷大，就把积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 定义为当 ρ' 趋近于零时积分

$$\int_{a}^{b-\rho'} f(x)\,dx$$

的极限。如果 $f(x)$ 在两个端点都为无穷大，就把 $\int_a^b f(x)\,dx$ 定义为当 ρ 与 ρ' 彼此独立地趋近于零时积分

$$\int_{a+\rho}^{b-\rho'} f(x)\,dx$$

的极限。设 c 是 a 与 b 之间任一数。于是可写

$$\int_{a+\rho}^{b-\rho'} f(x)\,dx = \int_{a+\rho}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-\rho'} f(x)\,dx,$$

在这种情形下，右端每一个积分都应趋近于一个极限。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

最后，如果 $f(x)$ 对 a 与 b 之间的某个值 c 变为无穷大，我们就把积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 定义为两个积分

$$\int_a^{c-\rho'} f(x)\,dx, \qquad \int_{c+\rho}^b f(x)\,dx$$

的极限之和；如果在 a 与 b 之间有任意有限多个间断点，也用类似方式处理。

应注意，基本公式 (6) 原来是在假定 $f(x)$ 于 a 与 b 之间连续的情形下建立的；当 $f(x)$ 在这些积分限之间变为无穷大时，只要原函数 $F(x)$ 保持连续，这个公式仍成立。为确定起见，假定函数 $f(x)$ 只对 a 与 b 之间的一个值 c 变为无穷大。那么有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\rho'=0}\int_a^{c-\rho'} f(x)\,dx + \lim_{\rho=0}\int_{c+\rho}^b f(x)\,dx;$$

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，这可写成

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\rho'=0} F(c-\rho') - F(a) + F(b) - \lim_{\rho=0} F(c+\rho).$$

由于函数 $F(x)$ 被假定在 $x=c$ 处连续，$F(c+\rho)$ 与 $F(c-\rho')$ 有同一极限 $F(c)$，于是公式又化为

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

下面的例子说明了这一点：

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}} = [3x^{1/3}]_{-1}^{+1} = 6.$$

如果原函数 $F(x)$ 本身在 a 与 b 之间变为无穷大，这个公式就不再成立，因为这种情形下左边的积分还没有意义。

变量代换公式和分部积分公式，也可以用类似方式推广到这些新的积分；只须把它们看成通常积分的极限即可。

90. 积分限为无穷

设 $f(x)$ 是 x 的函数，它对大于某个数 a 的一切 x 值连续。那么不论 $l > a$ 取成多么大，积分

$$\int_a^l f(x)\,dx$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

都有一个确定的值。如果当 l 无限增大时这个积分趋近于一个极限，就用符号

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

表示这个极限。

如果已知 $f(x)$ 的一个原函数，就很容易判断积分是否趋近于极限。例如，在例子

$$\int_0^l \frac{dx}{1+x^2} = \arctan l$$

中，右端当 l 无限增大时趋近于 $\pi/2$，这一点写成方程

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

同样，若 a 为正且 $\mu-1$ 不为零，有

$$\int_a^l \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{1-\mu}\left(\frac{1}{l^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right).$$

如果 μ 大于 1，右端当 l 无限增大时趋近于极限，并且可写

$$\int_a^{+\infty} \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{(\mu-1)a^{\mu-1}}.$$

另一方面，如果 μ 小于 1，积分随 l 无限增大而无限增大。$\mu=1$ 时也一样，因为这时积分给出对数。

当不知道 $f(x)$ 的原函数时，我们再次用比较法，并注意下限 a 可以取到任意大。我们的工作基于下列引理：

> 设 $\phi(x)$ 对 $x>a$ 为正，并且假定积分 $\int_a^l \phi(x)\,dx$ 趋近于一个极限。那么，只要对一切大于 a 的 x 值都有 $|f(x)| \le \phi(x)$，积分 $\int_a^l f(x)\,dx$ 也趋近于一个极限。

这个命题的证明与上面给出的证明完全类似。如果函数 $f(x)$ 可写成

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{x^\mu},$$

其中函数 $\psi(x)$ 当 x 为无穷大时保持有限，则可证明下列定理；我们仅陈述它们：

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

> 如果 $|\psi(x)|$ 小于一个固定数 M，且 μ 大于 1，则积分趋近于一个极限。
>
> 如果 $|\psi(x)|$ 大于某个正数 m，且 μ 小于或等于 1，则积分不趋近于任何极限。

例如积分

$$\int_0^l \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$$

趋近于极限，因为被积函数可写成

$$\frac{\cos ax}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\cos ax}{1+1/x^2},$$

而 $1/x^2$ 的系数的绝对值小于 1。

只要能够找到一个正数 μ，使乘积 $x^\mu f(x)$ 当 x 为无穷大时趋近于一个不为零的极限，上述规则就足够了。如果 μ 大于 1，积分趋近于极限；如果 μ 小于或等于 1，积分不趋近于任何极限。[12]

例如，有理分式的积分当上限无限增大时趋近于极限的充要条件是：分母次数至少比分子次数大两个单位。最后，若取

$$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

其中 P 与 R 是次数分别为 p 与 r 的两个多项式，则乘积 $x^{r/2-p}f(x)$ 在 x 为无穷大时趋近于一个不为零的极限。积分趋近于极限的充要条件是 $p < r/2 - 1$。

91. 进一步的例子

上面陈述的规则并不总能判定一个积分是否趋近于极限。例如，在 $f(x) = (\sin x)/x$ 中，如果 $\mu < 1$，乘积 $x^\mu f(x)$ 趋近于零；如果 $\mu > 1$，它能取到大于任意给定数的值；如果 $\mu = 1$，它在 $+1$ 与 -1 之间振荡。上面的规则全都不能应用，但积分确实趋近于一个极限。考虑稍微更一般的积分

$$A = \int_0^l e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \alpha \geq 0.$$

[12] 若 $\mu > 1$，且乘积 $x^\mu f(x)$ 当 x 为无穷大时趋近于零，积分也趋近于极限。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

被积函数在 $x = k\pi$ 处变号。因此我们自然要研究交错级数

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots, \tag{24}$$

其中所用记号如下:

$$a_0 = \int_0^\pi e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad a_1 = -\int_\pi^{2\pi} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \ldots,$$

$$a_n = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|.$$

在通项 a_n 中以 $y + n\pi$ 代 x，可写成

$$a_n = \int_0^\pi e^{-\alpha y - n\alpha\pi}\frac{\sin y}{y + n\pi}\,dy.$$

显然,当 n 增大时,被积函数减小,因此 $a_{n+1} < a_n$。而且通项 a_n 小于 $\int_0^\pi (1/n\pi)\,dy$,也就是在 $n \geq 1$ 时小于 $1/n$。所以，上述级数收敛，因为项的绝对值随级数进行而递减，并且通项趋于零。如果上限 l 介于 $n\pi$ 与 $(n+1)\pi$ 之间，则有

$$\int_0^l e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx = S_n \pm \theta a_n, \qquad 0 < \theta < 1,$$

其中 S_n 表示级数 (24) 的前 n 项之和。当 l 无限增大时，n 也无限增大，a_n 趋近于零，积分趋近于级数 (24) 的和 S。

同样可以证明，衍射理论中出现的积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$$

各有有限值。例如曲线 $y = \sin x^2$ 具有正弦曲线那样的波状形态，但当我们向外走去时，这些波动越来越急促，因为 $\sin x^2$ 的两个相邻零点之差

$$\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$$

当 n 无限增大时趋近于零。

附注。最后这个例子引出一个有趣的说明。当 x 无限增大时，$\sin x^2$ 在 -1 与 $+1$ 之间振荡。因此，一个积分可以趋近于极限，即使被积函数不趋近于零，也就是说，即使 x 轴不是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线。下面给出一个同类例子，其中函数 $f(x)$ 不改变符号。函数

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^6 \sin^2 x}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 x 为正时保持正值，而且它不趋近于零，因为 $f(k\pi)=k\pi$。为了说明积分趋近于极限，如上考虑级数

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots,$$

其中

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2 x}.$$

当 x 从 $n\pi$ 变到 $(n+1)\pi$ 时，x^6 始终大于 $n^6\pi^6$，故可写

$$a_n<(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+n^6\pi^6\sin^2 x}.$$

新被积函数的一个原函数是

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}\arctan\left(\sqrt{1+n^6\pi^6}\tan x\right),$$

而当 x 从 $n\pi$ 变到 $(n+1)\pi$ 时，$\tan x$ 恰好一次变为无穷大，从 $+\infty$ 跳到 $-\infty$。因此新积分等于（§77）

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+n^6\pi^6}},$$

于是有

$$a_n<\frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}<\frac{n+1}{n^3\pi}.$$

由此可知级数 $\sum a_n$ 收敛，因而积分 $\int_0^l f(x)\,dx$ 趋近于一个极限。

另一方面，如果当 x 为无穷大时 $f(x)$ 趋近于一个不为零的极限 h，则积分显然不可能趋近于任何极限。因为在某个 x 值以后，$f(x)$ 的绝对值将大于 $|h/2|$，并且不再变号。

前面的展开同无穷级数的处理有密切类比。这两个理论之间的密切联系，将由 Cauchy 的一个定理显明出来；我们以后（第 VIII 章）会讨论这个定理。那时还会找到一些新的判别法，使我们能够在比上面处理的情形更一般的情形下，判定一个积分是否趋近于极限。

92. 函数 $\Gamma(a)$

定积分

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}\,dx \tag{25}$$

在 a 为正时有确定值。

为此，考虑两个积分

$$\int_{\rho}^{1} x^{a-1}e^{-x}\,dx, \qquad \int_{1}^{l} x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

其中 ρ 是很小的正数，l 是很大的正数。第二个积分总趋近于极限，因为当 x 足够大时，有 $x^{a-1}e^{-x} < 1/x^2$，也就是 $e^x > x^{a+1}$。至于第一个积分，乘积 $x^{1-a}f(x)$ 在 x 趋近于零时趋近于极限 1, 而积分趋近于极限的充要条件是 $1-a$ 小于 1, 也就是 a 为正。假定这个条件满足, 那么这两个极限之和就是函数 $\Gamma(a)$, 它也叫作第二类 Euler 积分。当 a 趋近于零时，这个函数 $\Gamma(a)$ 变为无穷大；当 a 为正时它为正；并且当 $a \to +\infty$ 时它也变为无穷大。它在 $a = 1.4616321\cdots$ 处有一个极小值，对应的 $\Gamma(a)$ 值为 $0.8856032\cdots$。

设 $a > 1$，作分部积分，把 $e^{-x}\,dx$ 看作 $-e^{-x}$ 的微分。这样得到

$$\Gamma(a) = -[x^{a-1}e^{-x}]_0^{+\infty} + (a-1)\int_0^{+\infty} x^{a-2}e^{-x}\,dx,$$

但因 $a > 1$，乘积 $x^{a-1}e^{-x}$ 在两个积分限处都为零，于是只剩下公式

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1). \tag{26}$$

反复应用这个公式，可把 $\Gamma(a)$ 的计算化为自变量 a 介于 0 与 1 之间的情形。此外，当 a 是整数时，$\Gamma(a)$ 的值很容易确定。首先

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = 1,$$

于是前面的公式给出，当 $a = 2, 3, \ldots, n, \ldots$ 时,

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 1\cdot 2;$$

一般地，若 n 是正整数,

$$\Gamma(n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1) = (n-1)!. \tag{27}$$

93. 线积分

设 AB 是一条连续平面曲线的一段弧, 而 $P(x, y)$ 是二元函数, 它沿 AB 连续；这里 x, y 表示 AB 上一点关于所在平面中一组坐标轴的坐标。在弧 AB 上

取若干分点 $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$，其坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots$；然后在每一小弧 $m_{i-1}m_i$ 上任意选取另一点 $m_i'(\xi_i, \eta_i)$。最后考虑和

$$\begin{aligned} P(\xi_1, \eta_1)(x_1 - a) + P(\xi_2, \eta_2)(x_2 - x_1) + \cdots \\ + P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + \cdots , \end{aligned} \tag{28}$$

这里的和扩展到全部这些部分区间。当分点个数无限增加，并且每一个差 $x_i - x_{i-1}$ 都趋近于零时，上面的和趋近于一个极限。这个极限叫作 $P(x, y)$ 沿弧 AB 的线积分，记作

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx.$$

为了建立这个极限的存在性，先假定平行于 y 轴的直线至多在一点截弧 AB。设 a 与 b 分别为点 A 与 B 的横坐标，并设 $y = \phi(x)$ 是曲线 AB 的方程。按照假设，$\phi(x)$ 在区间 (a, b) 中是 x 的连续函数；如果在函数 $P(x, y)$ 中用 $\phi(x)$ 代替 y，所得函数 $\Phi(x) = P[x, \phi(x)]$ 也是连续的。因此有

$$P(\xi_i, \eta_i) = P[\xi_i, \phi(\xi_i)] = \Phi(\xi_i),$$

于是前面的和可写为

$$\Phi(\xi_1)(x_1 - a) + \Phi(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + \Phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \cdots .$$

由此可知，这个和以通常定积分

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b P[x, \phi(x)]\, dx$$

为极限，最后得到公式

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_a^b P[x, \phi(x)]\, dx.$$

如果平行于 y 轴的直线能在多于一点截弧 AB，就应把这条弧分成若干部分，使其中每一部分都只被任一平行于 y 轴的直线截于一点。例如，若给定弧形如 $ACDB$（图 14），其中 C 与 D 是横坐标取极值的点，则弧 AC, CD, DB 各自满足上面的条件，并且可写

$$\int_{ACDB} P(x, y)\, dx = \int_{AC} P(x, y)\, dx + \int_{CD} P(x, y)\, dx + \int_{DB} P(x, y)\, dx.$$

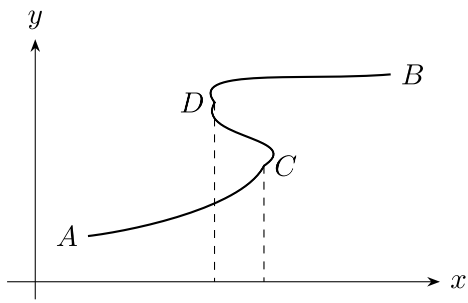


图 14

但应注意，在计算右端三个积分时，函数 $P(x, y)$ 中的变量 y 必须分别用变量 x 的三个不同函数来代替。

形如 $\int_{AB} Q(x, y)\, dy$ 的曲线积分可用类似方式定义。显然，这些积分立刻化为通常定积分; 但它们的用处足以说明引入它们是合理的。还可指出, 弧 AB 可以由不同曲线的一些部分组成，例如直线段、圆弧等等。

实践中常遇到的一种情形是, 曲线 AB 上一点的坐标由一个可变参数给出:

$$x = \phi(t), \qquad y = \psi(t),$$

其中 $\phi(t)$ 与 $\psi(t)$ 以及它们的导数 $\phi'(t), \psi'(t)$ 都是 t 的连续函数。我们假定当 t 从 α 变到 β 时，点 (x, y) 沿同一运动方向描出弧 AB。把区间 (α, β) 分成若干子区间, 并令 t_{i-1}, t_i 是两个相邻的 t 值; 在弧 AB 上同它们对应的两点是 m_{i-1} 与 m_i，其坐标分别为 (x_{i-1}, y_{i-1}) 与 (x_i, y_i)。于是

$$x_i - x_{i-1} = \phi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

其中 θ_i 介于 t_{i-1} 与 t_i 之间。这个 θ_i 值对应弧 $m_{i-1}m_i$ 上一点 (ξ_i, η_i)；因此可写

$$\sum P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum P[\phi(\theta_i), \psi(\theta_i)]\phi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

转到极限便得

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_\alpha^\beta P[\phi(t), \psi(t)]\phi'(t)\, dt.$$

以同样方式可得到 $\int Q\, dy$ 的类似公式。把两者相加，得

$$\begin{aligned}\int_{AB} &\{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\} \\ &= \int_\alpha^\beta \{P[\phi(t), \psi(t)]\phi'(t) + Q[\phi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}\, dt.\end{aligned} \tag{29}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这就是线积分中的变量代换公式。当然，如果弧 AB 由若干不同曲线的部分组成，函数 $\phi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在整个 AB 上就不会有同一形式，在这种情形下，应把公式分别用于每一部分。

94. 闭曲线的面积

我们已经定义了平面上一部分的面积：它由一段弧 AMB、一条不截这段弧的直线，以及从点 A 与 B 向这条直线所作的两条垂线 AA_0, BB_0 所围成（§65，§78，图 9）。现在考虑任意形状的一条连续闭曲线；所谓闭曲线，是指一个点 M 的轨迹，它的坐标是参数 t 的连续函数 $x = f(t), y = \phi(t)$，并且对参数的两个值 t_0 与 T 取同样的值。函数 $f(t)$ 与 $\phi(t)$ 在限 t_0 与 T 之间可以有若干不同的形式；例如，当闭轮廓 C 由若干不同曲线的部分组成时就是这样。设 $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M_0$ 表示曲线 C 上的点，它们分别对应于从 t_0 增至 T 的参数值 $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{n-1}, T$。依次用直线连接这些点，便得到一个内接于曲线的多边形。当边数无限增加，并且每一边都趋近于零时，这个多边形的面积所趋近的极限，叫作闭曲线 C 的面积。[13]可以看出，这个定义同上面处理的特殊情形中的定义一致。因为若把多边形 $A_0Q_1Q_2\cdots BB_0A_0$（图 9）用平行于 A_0A 的直线分割成小梯形，其中一个小梯形的面积为

$$\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})[f(x_i) + f(x_{i-1})] \quad \text{或} \quad (x_i - x_{i-1})f(\xi_i),$$

其中 ξ_i 介于 x_{i-1} 与 x_i 之间。因此在这个特殊情形下，整个多边形的面积趋近于定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$。

现在考虑一条闭曲线 C，任一平行于某个固定方向的直线至多在两点截它。取一条平行于这个方向的直线作为 y 轴，再取一条垂直于它的直线作为 x 轴，使整条曲线 C 都位于象限 xOy 中（图 15）。

[13]当然，假定所考虑的曲线没有二重点，并且多边形的边取得足够小，以致多边形本身没有二重点。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

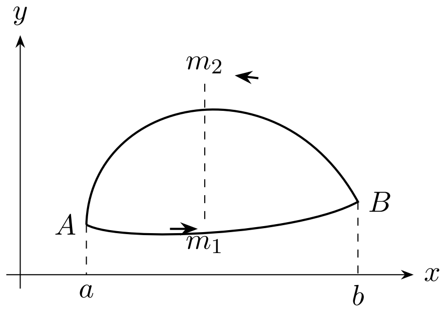


图 15

轮廓 C 上的点投影到 Ox 轴上的线段 ab；任何平行于 y 轴的直线至多在两点 m_1, m_2 截轮廓 C。设 $y_1 = y_1(x)$ 与 $y_2 = y_2(x)$ 分别为两条弧 Am_1B 与 Am_2B 的方程；为简单起见，假定曲线 C 上投影到 a 与 b 的点 A, B 被取为多边形的两个顶点。内接多边形的面积，等于由直线 Aa, ab, bB 与分别内接于两条弧 Am_1B、Am_2B 的折线所组成的两个多边形面积之差。转到极限，显然曲线 C 的面积等于分别由轮廓 Am_1BbaA 与 Am_2BbaA 所围的两个面积之差，也就是相应定积分

$$\int_a^b y_2\,dx - \int_a^b y_1\,dx$$

之差。这两个积分表示曲线积分 $\int y\,dx$ 分别沿 Am_1B 与 Am_2B 取值。如果约定说：当一个站在平面上的观察者按某个方向绕曲线行走时，所围面积始终在他的左手边，则轮廓 C 按该方向被描述时称为正向，那么上面的结果可表述如下：轮廓 C 所围面积 σ 由公式

$$\sigma = -\int_C y\,dx \tag{30}$$

给出，其中线积分沿闭轮廓 C 按正向取。由于当原点任意移动而坐标轴保持与原来平行时，这个积分不变，故不论轮廓 C 相对于坐标轴的位置如何，同一公式都成立。

现在考虑任意形状的轮廓 C。我们假定可以画出有限条线段，连接 C 上若干对点，使所得子轮廓中每一个都至多被任一平行于 y 轴的直线截于两点。图 16 中轮廓 C 所围的区域就是这样；借助横截线 ab 与 cd，可把它分成三个子区域，其边界分别为轮廓 $amba, abndcqa, cdpc$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

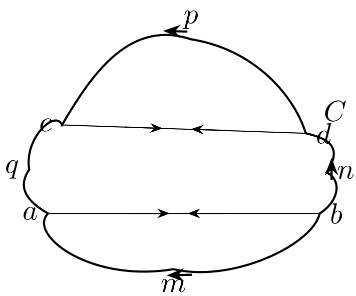


图 16

把前面的公式应用于这些子区域中的每一个并把所得结果相加，由辅助线 ab 与 cd 引起的线积分相互抵消，于是闭曲线 C 所围面积仍由线积分 $-\int y\,dx$ 给出；积分沿轮廓 C 按正向取。

类似地可证明，同一面积还由公式

$$\sigma = \int_C x\,dy \tag{31}$$

给出；最后，将这两个公式合并，有

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_C (x\,dy - y\,dx), \tag{32}$$

其中积分总按正向取。最后这个公式显然同坐标轴的选择无关。例如，若椭圆由形式

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

给出，则它的面积为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

95. 极坐标中曲线的面积

试求轮廓 $OAMBO$ 所围面积（图 17）；这个轮廓由两条直线 OA, OB 与弧 AMB 组成，而弧 AMB 至多被任一向径截于一点。取 O 为极点，取直线 Ox 为始线，并设 $\rho = f(\omega)$ 是弧 AMB 的方程。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

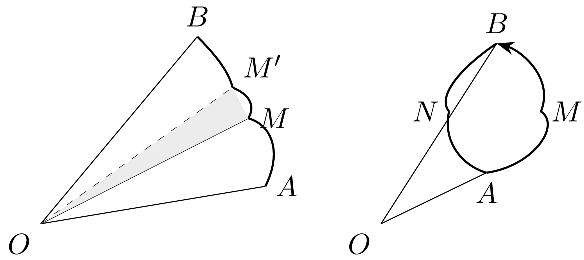


图 17

在弧 AMB 内接一个多边形，并以 A 与 B 为两个顶点；要求的面积是诸如 OMM' 这样的三角形面积之和的极限。但三角形 OMM' 的面积为

$$\frac{1}{2}\rho(\rho+\Delta\rho)\sin\Delta\omega = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega + \Delta\omega\,\varepsilon,$$

其中 ε 随 $\Delta\omega$ 一同趋于零。容易说明，只要角 $\Delta\omega$ 取得充分小，所有类似的量 ε 都小于任意预先指定的数；所以在求极限时可以略去项 $\varepsilon\Delta\omega$。因此所求面积是和 $\rho^2\Delta\omega/2$ 的极限，也就是等于定积分

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\rho^2\,d\omega,$$

其中 ω_0 与 ω_1 是直线 OA 与 OB 同直线 Ox 所成的角。

由任意形状的轮廓所围的面积，是若干个像上面那样的曲线所围面积的代数和。例如，若要求一个围绕点 O 的闭轮廓的面积，并且这个闭轮廓至多被通过 O 的任一直线截于两点，只要令 ω 从 0 变到 2π 即可。不围绕 O 的凸闭轮廓（图 17）的面积，等于两个扇形 $OAMBO$ 与 $OANBO$ 的差；其中每一个都可由前面的方法计算。无论哪种情形，面积都由线积分

$$\frac{1}{2}\int_C \rho^2\,d\omega$$

表示；积分沿曲线 C 按正向取。这个公式同前面的公式本质上没有不同。因为若从直角坐标转到极坐标，就有

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,$$

$$dx=\cos\omega\,d\rho-\rho\sin\omega\,d\omega,\qquad dy=\sin\omega\,d\rho+\rho\cos\omega\,d\omega,$$

因而

$$x\,dy-y\,dx=\rho^2\,d\omega.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

最后，考虑一段弧 AMB，它在斜坐标中的方程为 $y=f(x)$。为了求由这段弧 AMB、x 轴以及两条平行于 y 轴的直线 AA_0, BB_0 所围的面积，设想在弧 AMB 内接一个多边形，并用平行于 y 轴的直线把这个多边形的面积分割成小梯形。其中一个小梯形的面积为

$$\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})[f(x_i) + f(x_{i-1})] \sin\theta,$$

这可写成 $(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \sin\theta$，其中 ξ_i 位于区间 (x_{i-1}, x_i) 内。因此所讨论的面积等于定积分

$$\sin\theta \int_{x_0}^{X} y\,dx,$$

其中 x_0 与 X 分别表示点 A 与 B 的横坐标。类似于前面的情形可证明，任意闭轮廓 C 所围的面积由公式

$$\frac{\sin\theta}{2} \int_C (x\,dy - y\,dx)$$

给出。

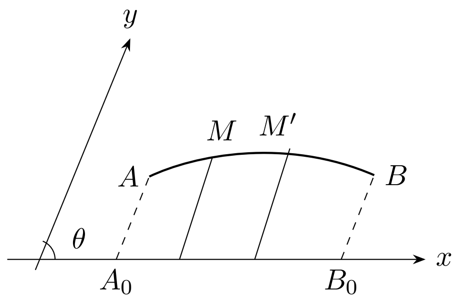


图 18

注。给定一条闭曲线 C（图 15），在任一点 M 处画出向外延伸的那一段法线，并令 α, β 分别为这个方向同 x, y 两轴所成的角，这些角从 0 数到 π。沿弧 Am_1B，角 β 为钝角，并且 $dx = -ds\cos\beta$。因此可写

$$\sigma = \int_C y\cos\beta\,ds.$$

沿 Bm_2A，角 β 为锐角，但在线积分中沿 Bm_2A 时 dx 为负。如果约定始终把 ds 看作正数，我们仍有 $dx = -ds\cos\beta$。因此闭曲线的面积可由刚写出的积分

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

表示，其中角 β 按上面定义，而 ds 本质上为正。这个公式同前面的公式一样适用于任意形状的轮廓；并且显然同一面积也由公式

$$\sigma = \int_C x \cos\alpha \, ds$$

给出。这些陈述完全不依赖于坐标轴的选择。

96. 积分 $\int x\,dy - y\,dx$ 的值

自然要问，沿任意曲线，不论闭合还是不闭合，取积分

$$\int x\,dy - y\,dx$$

究竟表示什么。

例如，考虑两条闭曲线 $OAOB$ 与 $ApBqCrAsBtCuA$（图 19），它们分别有一个二重点与三个二重点。显然，可以把其中任一曲线替换成两条无二重点闭曲线的组合。因此闭轮廓 $OAOB$ 等价于两个轮廓 OAO 与 OBO 的组合。沿整个轮廓取得的积分等于部分 OAO 面积的两倍减去部分 OBO 面积的两倍。同样，另一个轮廓可以替换为两条闭曲线 $ApBqCrA$ 与 $AsBtCuA$；沿整个轮廓取得的积分等于面积 $ApBsA$、$BtCqB$ 与 $ArCuA$ 之和的两倍，再加上部分 $AsBqCuA$ 面积的四倍。

中译者校记（底本原误）。 1904 年英译本和现代重排本在本节以下几处把 $\int(x\,dy - y\,dx)$ 直接说成有向面积，漏掉了由公式 (32) 明示的因子 2。本稿在正文中统一补入这个因子。

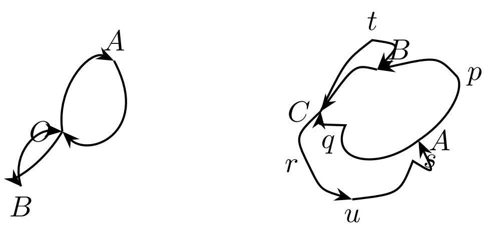


图 19

而且，这种推理是一般的。具有任意多个二重点的任一闭轮廓，确定若干部分面积 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$，其中每一部分的全部边界都由它构成。沿整个轮廓取

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

得的积分等于一个形如

$$2(m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \cdots + m_p\sigma_p)$$

的和，其中 $m_1, m_2, \ldots, m_p$ 是正整数或负整数，可由下列规则求出：

> 给定两个相邻面积 σ, σ'，它们由轮廓 C 的一段弧 ab 隔开。设想一位观察者按箭头所定方向沿轮廓在平面上行走；那么，他左侧面积的系数比右侧面积的系数大 1。

给轮廓外部的面积赋系数零，就可以逐次确定其余各部分的系数。

如果给定弧 AB 不闭合，可以用把它的端点连到原点的方式把它变成一条闭曲线；前面的公式适用于这个新区域，因为沿向径 OA 与 OB 取积分 $\int x\,dy - y\,dx$ 显然为零。

V. 由定积分定义的函数

97. 积分号下求导

我们常常要处理一些积分，其中被积函数不仅依赖于积分变量，也依赖于一个或几个其他变量；这些变量被我们看作参数。设 $f(x,\alpha)$ 是二元连续函数，当 x 从 x_0 变到 X，而 α 在某些限 α_0 与 α_1 之间变化时都连续。我们要研究由定积分

$$F(\alpha) = \int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx$$

定义的变量 α 的函数；这里假定 α 取 α_0 与 α_1 之间的一个确定值，并且积分限 x_0, X 与 α 无关。于是有

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_{x_0}^{X} \{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)\}\,dx. \tag{33}$$

由于函数 $f(x,\alpha)$ 连续，只要把 $\Delta\alpha$ 取得足够小，这个被积函数的绝对值就能小于任意预先指定的数 ε。因此增量 $\Delta F(\alpha)$ 的绝对值小于 $\varepsilon|X - x_0|$，这说明函数 $F(\alpha)$ 连续。

如果函数 $f(x,\alpha)$ 关于 α 有导数，写成

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha) = \Delta\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha) + \varepsilon\right],$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 ε 随 $\Delta\alpha$ 一同趋于零。把 (33) 两边除以 $\Delta\alpha$，得

$$\frac{\Delta F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx + \int_{x_0}^{X} \varepsilon\,dx;$$

若 η 是 ε 的绝对值的上界，则最后一个积分的绝对值小于 $\eta|X-x_0|$。转到极限，得到公式

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx. \tag{34}$$

为了使上面的推理完全严格，必须说明可以把 $\Delta\alpha$ 取得足够小，使量 ε 对于给定限 x_0 与 X 之间的一切 x 值都小于任意预先指定的数 η。如果导数 $\partial f/\partial\alpha$ 本身连续，这个条件当然满足。因为由中值定理有

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha) = \Delta\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha+\theta\Delta\alpha), \qquad 0<\theta<1,$$

因而

$$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) - \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha).$$

如果函数 $\partial f/\partial\alpha$ 连续，只要 $|\Delta\alpha|$ 小于适当选取的正数 l，这个差 ε 对于所有的 x 与 α 值都小于 η（见第 VI 章，§120）。

现在假定积分限 X 与 x_0 本身也是 α 的函数。若 ΔX 与 Δx_0 表示对应于增量 $\Delta\alpha$ 的增量，则有

$$\begin{aligned} &F(\alpha+\Delta\alpha) - F(\alpha) \\ &\quad= \int_{x_0}^{X} \{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)\}\,dx \\ &\qquad+ \int_{X}^{X+\Delta X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \\ &\qquad- \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx. \end{aligned}$$

把积分第一中值定理用于最后两个积分，并除以 $\Delta\alpha$，便得

$$\begin{aligned} \frac{F(\alpha+\Delta\alpha) - F(\alpha)}{\Delta\alpha} = &\int_{x_0}^{X} \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx \\ &+ \frac{\Delta X}{\Delta\alpha} f(X+\theta\Delta X, \alpha+\Delta\alpha) \\ &- \frac{\Delta x_0}{\Delta\alpha} f(x_0+\theta'\Delta x_0, \alpha+\Delta\alpha). \end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 $\Delta\alpha$ 趋于零时，其中第一个积分趋近于上面得到的极限；转到极限，便得公式

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx + \frac{dX}{d\alpha} f(X,\alpha) - \frac{dx_0}{d\alpha} f(x_0,\alpha), \tag{35}$$

这就是积分号下求导的一般公式。

由于线积分总可以化成若干通常定积分之和，显然前面的公式可推广到线积分。比如考虑线积分

$$F(\alpha) = \int_{AB} P(x,y,\alpha)\,dx + Q(x,y,\alpha)\,dy,$$

其中积分沿一条同 α 无关的曲线 AB 取。显然有

$$F'(\alpha) = \int_{AB} P_\alpha(x,y,\alpha)\,dx + Q_\alpha(x,y,\alpha)\,dy,$$

其中积分应沿同一条曲线取。另一方面，上面的推理预设积分限有限，且被积函数在积分限之间不变为无穷大。对于这些条件不满足的情形，我们以后（第 VIII 章，§175）再讨论。

公式 (35) 常用于求某些定积分的值，把它们化为另一些更容易计算的积分。例如，若 a 为正，有

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}},$$

于是应用公式 (34) 共 $n-1$ 次，得

$$(-1)^{n-1} 1\cdot 2\cdots(n-1) \int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} \right).$$

98.　间断性的例子

如果所加的条件不是对积分限之间的所有值都满足，定积分就可能定义参数的一个不连续函数。例如考虑定积分

$$F(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

这个积分总有有限值，因为分母的根除 $\alpha = k\pi$ 时外都是虚的；而当 $\alpha = k\pi$ 时显然有 $F(\alpha)=0$。假定 $\sin\alpha \neq 0$，并作代换 $x = \cos\alpha + t\sin\alpha$，则不定积分变为

$$\int \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此定积分 $F(\alpha)$ 的值为

$$\arctan\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}-\arctan\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

其中各角应取在 $-\pi/2$ 与 $\pi/2$ 之间。但

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-1,$$

所以这两个角的差为 $\pm\pi/2$。为了唯一确定符号，只需注意积分的符号同 $\sin\alpha$ 的符号相同。因此，按 $\sin\alpha$ 为正或为负，有 $F(\alpha)=\pm\pi/2$。由此可知，函数 $F(\alpha)$ 对所有形如 $k\pi$ 的 α 值间断。不过，这个结果丝毫不与上面的推理相矛盾。因为例如当 x 从 -1 变到 $+1$，而 α 从 $-\varepsilon$ 变到 $+\varepsilon$ 时，积分号下的函数对于值组 $\alpha=0,x=-1$ 以及 $\alpha=0,x=+1$ 都取不定形，而这些值组无论 ε 取何值都属于所考虑的区域。

容易给出许多这类例子。再考虑积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}\,dx.$$

作代换 $mx=y$，得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}\,dx=\pm\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy,$$

这里应取的符号为 m 的符号；因为若 m 为正，变换后积分的限同给定积分的限相同；若 m 为负，则应把限对调。我们已经看到，右端的积分是一个正数 N（§91）。因此，给定积分按 m 为正或为负分别等于 $\pm N$。若 $m=0$，积分值为零。显然，这个积分在 $m=0$ 处是不连续的。

VI. 定积分的近似求值

99. 引言

当不知道 $f(x)$ 的原函数时，可以借助某些方法求定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的近似值。积分中值定理给出两个界限，积分值必须位于这两个界限之间；用类似的过程还可以得到无限多个其他界限。设对 a 与 b 之间的一切 x 值（$a < b$）都有

$$\phi(x) < f(x) < \psi(x).$$

那么也有

$$\int_a^b \phi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

如果函数 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 是两个已知函数的导数，这个公式便给出两个界限，积分值必位于其间。例如考虑积分

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

现在

$$\sqrt{1-x^4} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2},$$

而当 x 在零与一之间取值时，因子 $\sqrt{1+x^2}$ 介于 1 与 $\sqrt{2}$ 之间。因此给定积分介于两个积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

之间，也就是说，介于 $\pi/2$ 与 $\pi/(2\sqrt{2})$ 之间。还可注意到 $(1+x^2)^{-1/2}$ 大于 $1-x^2/2$；这是把 $(1+u)^{-1/2}$ 按带余项的 Taylor 级数展开到两项所得的结果。这样可以找到两个更接近的界限。因此积分 I 大于表达式

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这两个积分中第二个的值为 $\pi/4$（§105）；所以 I 介于 $3\pi/8$ 与 $\pi/2$ 之间。

显然，前面的方法只给出积分准确值的粗略概念。为了得到更精确的近似，可以把区间 (a,b) 分成更小的子区间，并在每个子区间上应用积分中值定理。为确定起见，设函数 $f(x)$ 当 x 从 a 增加到 b 时始终增加。把区间 (a,b) 分成 n 个相等部分（$b-a=nh$）。那么由积分的定义本身可知，积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 介于两个和

$$s = h\{f(a) + f(a+h) + \cdots + f[a+(n-1)h]\},$$

$$S = h\{f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+nh)\}$$

之间。如果取 $(S+s)/2$ 作为该积分的近似值，则误差不会超过

$$\frac{|S-s|}{2} = \frac{b-a}{2n}\{f(b)-f(a)\}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$(S+s)/2$ 的值可写成

$$h\left\{\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f[a+(n-1)h]+\frac{f(b)}{2}\right\}.$$

注意到 $\{f(a+ih)+f[a+(i+1)h]\}h/2$ 是一个梯形的面积，这个梯形的高为 h，两底为 $f(a+ih)$ 与 $f(a+ih+h)$；因此可以说，整个方法就是把曲线 $y=f(x)$ 下方、两条相邻纵坐标之间的面积，用以这两条纵坐标为两底的梯形面积来代替。当不需要很高精度时，这个方法相当实用。

例如考虑积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

取 $n=4$，得积分的近似值为

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{1}{4}\right)=0.78279\cdots,$$

且误差小于 $1/16=.0625$。[14] 这给出 π 的一个精确到一位小数的近似值，即 $3.1311\cdots$。

如果函数 $f(x)$ 当 x 从 a 增加到 b 时并不始终增加（或始终减少），可以把区间分成若干子区间，使每一个子区间上都满足这个条件。

100. 插值法

求积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的近似值还有下面的方法。确定一条 n 次抛物线型曲线

$$Y=\phi(X)=A_0+A_1X+\cdots+A_nX^n,$$

它通过曲线 $y=f(x)$ 上位于横坐标为 a 与 b 的两点之间的 $n+1$ 个点 $B_0,B_1,\ldots,B_n$。这些点可以任意选取；给定积分的一个近似值由积分

$$\int_a^b \phi(x)\,dx$$

给出，而这个积分容易计算。

设 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ 是 $n+1$ 个点 $B_0,B_1,\ldots,B_n$ 的坐标。多项式 $\phi(x)$ 由 Lagrange 插值公式确定为

$$\phi(x)=y_0X_0+y_1X_1+\cdots+y_nX_n,$$

[14]由公式 $|S-s|/2$ 得出。事实上，误差约为 .00260；准确值为 $\pi/4$。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 y_i 的系数是 n 次多项式

$$X_i = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

它对给定的值 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 除 $x = x_i$ 外全都为零，而当 $x = x_i$ 时等于一。因此有

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_i y_i \int_a^b X_i\,dx.$$

数 x_i 具有形式

$$x_0 = a + \theta_0(b-a), \quad x_1 = a + \theta_1(b-a), \quad \ldots, \quad x_n = a + \theta_n(b-a),$$

其中

$$0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n \leq 1.$$

令 $x = a + (b-a)t$，给定积分的近似值取形状

$$(b-a)(K_0y_0 + K_1y_1 + \cdots + K_ny_n), \tag{36}$$

其中 K_i 由公式

$$K_i = \int_0^1 \frac{(t-\theta_0)\cdots(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})\cdots(t-\theta_n)}{(\theta_i-\theta_0)\cdots(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})\cdots(\theta_i-\theta_n)}\,dt$$

给出。如果我们把区间 (a, b) 分成若干较小区间，而这些小区间的比对任意给定函数 $f(x)$ 都取为同一组常数，则数 $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$，从而数 K_i，都同 $f(x)$ 无关。一旦这些系数预先算好，只需在公式 (36) 中用 $y_0, y_1, \ldots, y_n$ 的相应值代入即可。

如果要求面积的曲线 $f(x)$ 是以图形给出的，那么把区间 (a, b) 分成相等部分最为方便；这时只需量取该曲线若干条等距纵坐标。于是若把区间二等分，就应取 $\theta_0 = 0, \theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1$，这给出积分近似值的公式

$$I = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

同样，当 $n = 3$ 时得公式

$$I = \frac{b-a}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而当 $n = 4$ 时

$$I = \frac{b-a}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).$$

前面的方法出自 Cotes。下面的 Simpson 方法稍有不同。把区间 (a, b) 分成 $2n$ 个相等部分，并令 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ 为对应分点的纵坐标。把 Cotes 公式用于两个下标为相邻偶数的纵坐标之间的面积，如 y_0 与 y_2、y_2 与 y_4 等之间的面积，就得到给定面积的一个近似值

$$I = \frac{b-a}{6n}\{(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots \\ + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})\}.$$

化简后便得 Simpson 公式：

$$I = \frac{b-a}{6n}\{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})\}.$$

101. Gauss 方法

在 Gauss 方法中，量 θ_i 被赋予另外的值。论证如下。假定我们能找到次数逐渐增高的多项式，它们在区间 (a, b) 中同给定被积函数 $f(x)$ 的差越来越小。比如设可写

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + R_{2n}(x),$$

其中余项 $R_{2n}(x)$ 对 a 与 b 之间的所有 x 值都满足 $|R_{2n}(x)| < \varepsilon$。[15] 系数 a_i 通常是未知的，但如我们将看到的，它们并不进入计算。设 $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 是 a 与 b 之间的 x 值，并设 $\phi(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式，对于这些 x 值它取与 $f(x)$ 相同的值。那么 Lagrange 插值公式表明，这个多项式可以写成

$$\phi(x) = \sum_{m=0}^{2n-1} a_m\phi_m(x) + R_{2n}(x_0)Y_0(x) + \cdots + R_{2n}(x_{n-1})Y_{n-1}(x),$$

其中 ϕ_m 与 Y_i 至多都是 $n-1$ 次多项式。显然，多项式 $\phi_m(x)$ 只依赖于 $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 的选择。另一方面，这个多项式 $\phi_m(x)$ 在 $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 时，必须同 x^m 取相同的值。因为若假定除 a_m 外所有 a 都为零，并且 $R_{2n}(x)$

[15] 按照 Weierstrass 的一个定理，这是任一在区间 (a, b) 中连续的函数都具有的性质；见第 IX 章，§199。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

也为零，那么 $f(x)$ 化为 $a_m x^m$，而 $\phi(x)$ 化为 $a_m\phi_m(x)$。于是差 $x^m-\phi_m(x)$ 必须能被乘积

$$P_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

整除。因此，如果 $m\geq n$，就有

$$x^m-\phi_m(x)=P_nQ_{m-n}(x),$$

其中 $Q_{m-n}(x)$ 是 $m-n$ 次多项式；若 $m\leq n-1$，则有 $x^m-\phi_m(x)=0$。用 $\int_a^b\phi(x)\,dx$ 代替 $\int_a^b f(x)\,dx$ 所产生的误差显然由公式

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\phi(x)\,dx\\ &=\sum_{i=n}^{2n-1}a_i\int_a^b\{x^i-\phi_i(x)\}\,dx\\ &\quad+\int_a^b R_{2n}(x)\,dx-\sum_{j=0}^{n-1}R_{2n}(x_j)\int_a^b Y_j(x)\,dx\\ &=\sum_{i=n}^{2n-1}a_i\int_a^b P_n(x)Q_{i-n}(x)\,dx\\ &\quad+\int_a^b R_{2n}(x)\,dx-\sum_{j=0}^{n-1}R_{2n}(x_j)\int_a^b Y_j(x)\,dx.\end{aligned}\tag{37}$$

中译者校记（底本原误）。 1904 年英译本与现代重排本在公式 (37) 中漏写了插值多项式里余项值 $R_{2n}(x_j)$ 所产生的最后一组项；但本节稍后的最终误差公式又包含这些项。本稿已在 (37) 中补全，以使前后推导一致。

给出。依赖于系数 $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ 的项恒等地消失，所以误差只依赖于系数 $a_n,a_{n+1},\ldots,a_{2n-1}$ 以及余项 $R_{2n}(x)$。但这个余项通常相对于系数 $a_n,a_{n+1},\ldots,a_{2n-1}$ 很小。因此，如果能够适当地安排量 $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}$，使得依赖于 $a_n,a_{n+1},\ldots,a_{2n-1}$ 的项也恒等地消失，那么很有希望得到高精度的近似。为此，以下积分消失是必要且充分的：

$$\int_a^b P_nQ_0\,dx,\qquad\int_a^b P_nQ_1\,dx,\qquad\ldots,\qquad\int_a^b P_nQ_{n-1}\,dx,$$

其中 Q_i 是 i 次多项式。我们已经看到（§88），若取 P_n 为

$$P_n=\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n(x-b)^n\right]$$

的形式，则这个条件满足。因此只需取 $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 为方程 $P_n = 0$ 的根；而这些根全都位于 a 与 b 之间。

可以假定 $a = -1, b = +1$，因为其他一切情形都可由代换

$$x = \frac{b+a}{2} + t\,\frac{b-a}{2}$$

化为这种情形。在这个特殊情形中，$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 的值就是 Legendre 多项式 X_n 的根。这些根的数值以及公式 (36) 中 K_i 的数值，在 n 到 5 为止时，可在 Bertrand 的 *Traité de Calcul intégral*（第 342 页）中找到，精确到七位和八位小数。

于是 Gauss 方法中的误差为

$$\int_a^b R_{2n}(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} R_{2n}(x_i) \int_a^b Y_i(x)\,dx,$$

其中函数 $Y_i(x)$ 与给定被积函数无关。为了得到误差的一个界，只需知道 $R_{2n}(x)$ 的一个界，也就是知道在区间 (a, b) 中函数 $f(x)$ 可由 $2n-1$ 次多项式表示到怎样的近似程度。但并不需要知道这个多项式本身。

获得给定定积分近似数值的另一个过程，是把函数 $f(x)$ 展成级数，然后逐项积分。我们以后（第 VIII 章）将看到，在什么条件下这个过程是正当的，以及它所给出的近似程度。

102.　Amsler 求积仪

为了机械地量出闭平面曲线所围面积，人们发明了许多仪器。[16] 其中最巧妙的一种是 Amsler 求积仪；它的理论给出了线积分的一个有趣应用。

考虑一条刚性直线上的两点 A_1 与 A_2 所描绘曲线围成的有向面积，仍分别记为 A_1 与 A_2；这里同一符号兼指点及其轨迹所围面积，含义由上下文判定。这条刚性直线在平面内任意运动，并且最后回到原来的位置。分别以 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 表示点 A_1 与 A_2 相对于一组直角坐标轴的坐标。设 l 为距离 A_1A_2，并设 θ 为 A_1A_2 与正 x 轴所成的角。为了用解析方式定义该直线的运动，必须把 x_1, y_1 与 θ 看作某个变量参数 t 的周期函数；当 t 增加 T 时，它们重新取同样的值。于是有

$$x_2 = x_1 + l\cos\theta, \qquad y_2 = y_1 + l\sin\theta,$$

[16]这些仪器的说明可见 Abdank-Abakanowicz 的著作：*Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications*（Gauthier-Villars, 1886）。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因而

$$x_2\,dy_2 - y_2\,dx_2 = x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1 + l^2\,d\theta \\ + l(\cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1 + x_1\cos\theta\,d\theta + y_1\sin\theta\,d\theta).$$

在上面作出的一般约定下（§96），点 A_1 与 A_2 所描曲线的面积 A_1 与 A_2 有下列值：

$$A_1 = \frac{1}{2}\int(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1), \qquad A_2 = \frac{1}{2}\int(x_2\,dy_2 - y_2\,dx_2).$$

因此，对刚才得到的方程两边积分，得到方程

$$A_2 = A_1 + \frac{l^2}{2}\int d\theta + \frac{l}{2}\left[\int \cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1 \right. \\ \left. + \int(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta)\,d\theta\right],$$

其中每个积分的上下限都对应于变量 t 的值 t_0 与 t_0+T。显然

$$\int d\theta = 2K\pi,$$

其中 K 是一个整数，它依赖于直线的运动方式。另一方面，分部积分给出公式

$$\int x_1\cos\theta\,d\theta = x_1\sin\theta - \int \sin\theta\,dx_1,$$

$$\int y_1\sin\theta\,d\theta = -y_1\cos\theta + \int\cos\theta\,dy_1.$$

但 $x_1\sin\theta$ 与 $y_1\cos\theta$ 在 $t=t_0$ 与 $t=t_0+T$ 时取相同的值。因此前面的方程可写成

$$A_2 = A_1 + K\pi l^2 + l\int(\cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1).$$

现在令 s 表示点 A_1 所描弧的长度，从任意固定点起、按某个确定方向取正来计；又令 α 表示切线正向与正 x 轴所成的角。那么有

$$\cos\theta\,dy_1 - \sin\theta\,dx_1 = (\sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\cos\alpha)\,ds = \sin V\,ds,$$

其中 V 是切线正向同直线 A_1A_2 的正向所成的角，这个角按三角学中的方式取。于是前面的方程取形式

$$A_2 = A_1 + K\pi l^2 + l\int\sin V\,ds. \tag{38}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

同样，直线上任一第三点 A_3 所描曲线的面积由公式

$$A_3 = A_1 + K\pi l'^2 + l'\int \sin V\, ds, \tag{39}$$

给出，其中 l' 是距离 A_1A_3。从这两个方程中消去未知量 $\int \sin V\, ds$，便得公式

$$l'A_2 - lA_3 = (l'-l)A_1 + K\pi ll'(l-l'),$$

它又可写成

$$A_1(23) + A_2(31) + A_3(12) + K\pi(12)(23)(31) = 0, \tag{40}$$

其中 (ik) 表示点 A_i 与 A_k 之间的距离（$i,k=1,2,3$），并带有适当符号。作为这个公式的应用，考虑一条长为 $a+b$ 的直线 A_1A_2，它的两端 A_1 与 A_2 描绘同一条闭凸曲线 C。把这条直线分成长度为 a 与 b 两段的点 A_3，描出一条完全位于 C 内部的闭曲线 C'。在这种情形下有

$$A_2 = A_1, \qquad (12) = a+b, \qquad (23) = -b, \qquad (31) = -a, \qquad K = 1.$$

于是除以 $a+b$，得

$$A_1 - A_3 = \pi ab.$$

但 $A_1 - A_3$ 正是两条曲线 C 与 C' 之间的面积。因此这个面积同曲线 C 的形状无关。这个定理出自 Holditch。

如果不在方程 (38) 与 (39) 之间消去 $\int \sin V\, ds$，而是消去 A_1，就得公式

$$A_3 = A_2 + K\pi(l'^2 - l^2) + (l'-l)\int \sin V\, ds. \tag{41}$$

Amsler 求积仪正是这个公式的一个应用。设 $A_1A_2A_3$ 是一根刚性杆，它在 A_2 处与另一根杆 OA_2 铰接。点 O 固定，点 A_3 上装有一个尖指针，用来描绘要求面积的曲线。于是点 A_2 按运动的性质描出一段圆弧或一个完整圆周。无论哪种情形，量 A_2, K, l, l' 全部已知；如果能够求出积分 $\int \sin V\, ds$，其中积分沿点 A_1 所描曲线 C_1 取，那么面积 A_3 就可以计算。端点 A_1 带有一个刻度圆柱，它的轴同杆 A_1A_3 的轴重合，并且它能绕这个轴转动。

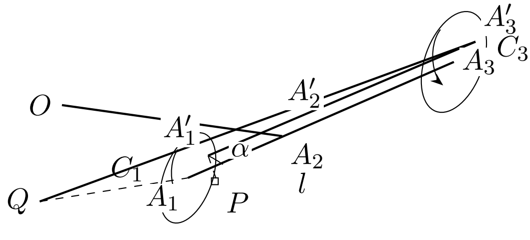


图 20

考虑杆的一个微小位移，它把 $A_1A_2A_3$ 带到位置 $A_1'A_2'A_3'$。设 Q 为这两条直线的交点。以 Q 为中心作圆弧 $A_1'\alpha$，并从 A_1' 向 A_1A_2 作垂线 $A_1'P$。我们可以把杆的运动想象为由两部分组成：先沿自身方向滑动，直到 A_1 到达 α；然后绕 Q 旋转，把 α 带到 A_1'。在这个过程的第一部分中，圆柱将沿它的一条母线滑动而不转动。在第二部分中，圆柱的转动由弧 $\alpha A_1'$ 度量。当弧 $A_1'A_1$ 趋近于零时，两个比

$$\frac{\alpha A_1'}{A_1'P}, \qquad \frac{A_1'P}{\text{弧}A_1A_1'}$$

分别趋近于 1 与 $\sin V$。因此

$$\alpha A_1' = \Delta s(\sin V + \varepsilon),$$

其中 ε 随 Δs 趋近于零而趋近于零。由此可知，圆柱的总转动正比于和 $\sum \Delta s(\sin V + \varepsilon)$ 的极限，即正比于积分 $\int \sin V\, ds$。所以量出这种转动，就足以确定给定面积。

习题

1. 证明：当 n 无限增大时，和

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

趋近于 $\log 2$。证明这个和以定积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

为极限。

2. 如前题那样，通过把下列各和同某些定积分联系起来，求它们的极限：

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

一般地，当 $\phi(i,n)$ 是 i 与 n 的 -1 次齐次函数时，和

$$\sum_{i=0}^{n} \phi(i,n)$$

在 n 变为无穷大时的极限等于某个定积分。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

3. 证明定积分

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$$

的值是 $-(\pi/2)\log 2$。可以从已知三角公式

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

出发证明；也可以利用下面几乎不言自明的等式:

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx.$$

4. 借助前一例求定积分

$$\int_0^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x \, dx.$$

5. 证明定积分

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx$$

的值为 $(\pi/8)\log 2$。令 $x = \tan\phi$，并把变换后的积分分成三部分。

6*. 求定积分

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx.$$

〔Poisson〕

7. 证明定积分

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}},$$

其中 α 为正，在 $\alpha \leq 1$ 时等于 2，在 $\alpha > 1$ 时等于 $2/\alpha$。

8*. 证明：$f(x)$ 在区间 (a,b) 中可积的充要条件是：对应于任意预先指定的数 ε，都能找到该区间的一个分割，使相应两和 S 与 s 的差 $S - s$ 小于 ε。

9. 设 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是在区间 (a,b) 中连续的两个函数，并设 $(a, x_1, x_2, \ldots, b)$ 是这个区间的一个分割方法。如果 ξ_i, η_i 是区间 (x_{i-1}, x_i) 中任意两个 x 值，则和

$$\sum f(\xi_i)\phi(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

以定积分

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$$

为极限。

10. 设 $f(x)$ 是在区间 (a,b) 中连续且为正的函数。证明两个定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

的乘积在函数为常数时取最小值。

11. 设符号 $I_{x_0}^{x_1}$ 表示一个函数在 x_0 与 x_1 之间的指数（§77）。证明下列公式成立：

$$I_{x_0}^{x_1} f(x) + I_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

其中若 $f(x_0) > 0$ 且 $f(x_1) < 0$，则 $\varepsilon = +1$；若 $f(x_0) < 0$ 且 $f(x_1) > 0$，则 $\varepsilon = -1$；若 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 同号，则 $\varepsilon = 0$。把 §77 第二段最后的公式分别用于函数 $f(x)$ 与 $1/f(x)$。

12*. 设 U 与 V 分别是 n 次和 $n-1$ 次多项式, 并且互素。证明有理分式 V/U 在限 $-\infty$ 与 $+\infty$ 之间的指数, 等于方程 $U+iV=0$ 的根中虚部为正者的个数与虚部为负者的个数之差。〔Hermite, *Bulletin de la Société mathématique*, Vol. VII, p. 128.〕

13*. 用分部积分推出积分第二中值定理。

第 5 章

不定积分

本章将回顾那些一般类型的初等函数；它们的积分能够用初等函数表示出来。所谓初等函数，我们包括有理和无理代数函数、指数函数与对数函数、三角函数及其反函数，以及由上述函数经有限次组合而形成的一切函数。当一个函数 $f(x)$ 的不定积分不能用这些函数表示时，它就构成一个新的超越函数。这些超越函数的研究及其分类，是积分学中最重要的问题之一。

I. 有理函数的积分

103. 一般方法

每一个有理函数 $f(x)$ 都是一个整式函数 $E(x)$ 与一个有理分式 $P(x)/Q(x)$ 的和；其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 互素，并且 $P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数。如果方程 $Q(x)=0$ 的实根和虚根都已知，那么这个有理分式可以分解为下列两种类型的简分式之和：

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \qquad \frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}.$$

第一类分式对应于实根，第二类分式对应于成对的虚根。整式函数 $E(x)$ 的积分可以立即写出。第一类分式的积分由公式

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}, \qquad m>1,$$

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\log|x-a|, \qquad m=1$$

给出。为简明起见，我们略去了本应加在右端的任意常数 C。本章讨论实变量不定积分；凡对数的自变量可能变号时，公式均应理解在一个不穿过零点或奇

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

点的连通区间上成立，并写成 $\log|\cdot|$。1904 年英译本依当时惯例往往省略绝对值。剩下只需考察由成对虚根产生的简分式。为了化简相应的积分，作代换

$$x = \alpha + \beta t, \qquad dx = \beta\, dt.$$

所论积分便化为

$$\int \frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}\, dx = \frac{1}{\beta^{2n-1}} \int \frac{M\alpha + N + M\beta t}{(1+t^2)^n}\, dt,$$

于是只剩下两类积分：

$$\int \frac{t\, dt}{(1+t^2)^n}, \qquad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

由于 $t\, dt$ 是 $1+t^2$ 的微分的一半，若 $n>1$，第一个积分由公式

$$\int \frac{t\, dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} = -\frac{\beta^{2n-2}}{2(n-1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^{n-1}}$$

给出；若 $n=1$，则由公式

$$\int \frac{t\, dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\log(1+t^2) = \frac{1}{2}\log\frac{(x-\alpha)^2+\beta^2}{\beta^2}$$

给出。仅余下类型

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

的积分。若 $n=1$，这个积分的值为

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t = \arctan\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

若 n 大于一，则该积分的计算可以化为同一形式、而 $(1+t^2)$ 的指数降低一的积分的计算。把所论积分记作 I_n，可写

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^n}.$$

在最后一个积分中取

$$u = t, \qquad dv = \frac{t\, dt}{(1+t^2)^n}, \qquad v = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

并作分部积分，得公式

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

将这个值代入 I_n 的方程，便得到

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}.$$

反复使用这个公式，最后归结为积分 $I_1 = \arctan t$。沿步骤回代，得到公式

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}\arctan t + R(t),$$

其中 $R(t)$ 是一个容易计算的 t 的有理函数。我们只指出, 它的分母是 $(1+t^2)^{n-1}$, 而分子的次数低于 $2n-2$。

由此可知，一个有理函数的积分由本身仍为有理的项，以及如下几种形式之一的超越项组成:

$$\log|x-a|, \qquad \log\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right], \qquad \arctan\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

例如考虑积分 $\int dx/(x^4-1)$。分母有两个实根 $+1$ 与 -1，以及两个虚根 $+i$ 与 $-i$。因而可写

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

为了确定 A，把两边同乘以 $x-1$，再令 $x=1$。这给出 $A=1/4$；类似地 $B=-1/4$。于是所假定的恒等式可写成

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

或者，把左端化简为

$$\frac{-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

由此得 $C=0$ 且 $D=-1/2$，最后有

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

从而

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

注. 前述方法虽完全一般，却并不总是最简单。使用适当技巧往往可以缩短计算。比如考虑积分

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^n}.$$

若 $n > 1$，我们既可以用根 $+1$ 与 -1 把被积函数分解为部分分式，也可以使用类似于 I_n 的递推公式。但最优雅的方法是作代换

$$x = \frac{1+z}{1-z},$$

这给出

$$x^2 - 1 = \frac{4z}{(1-z)^2}, \qquad dx = \frac{2\,dz}{(1-z)^2},$$

因而

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^n} = \frac{2}{4^n}\int \frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}\,dz.$$

用二项式定理展开 $(1-z)^{2n-2}$ 后，只需逐项积分 Az^μ 形式的项即可；其中 μ 可以为正，也可以为负。

104. Hermite 方法

到此为止，我们都假定要积分的分式已经分解为部分分式；这预设我们知道分母的根。下面这个出自 Hermite 的方法，使我们无须知道这些根就能求出积分的代数部分；它只涉及初等运算，也就是说，只涉及多项式的加法、乘法和除法。

设 $f(x)/F(x)$ 是要积分的有理分式。可假定 $f(x)$ 与 $F(x)$ 互素；并且按照重根理论，可设多项式 $F(x)$ 写成

$$F(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \cdots X_p^p,$$

其中 $X_1, X_2, \ldots, X_p$ 都是没有重根的多项式，并且任意两个没有公因子。现在可把给定分式分解为分母分别为 $X_1, X_2^2, \ldots, X_p^p$ 的部分分式：

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \cdots + \frac{A_p}{X_p^p},$$

其中 A_i 是一个与 X_i 互素的多项式。事实上，由最大公因子理论，如果 X 与 Y 是任意两个互素多项式，而 Z 是第三个多项式，则总能找到另外两个多项式 A 与 B，使得

$$BX + AY = Z.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

令 $X = X_1$，$Y = X_2^2 \cdots X_p^p$，$Z = f(x)$，这个恒等式便成为

$$BX_1 + AX_2^2 \cdots X_p^p = f(x),$$

或除以 $F(x)$，得

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{X_1} + \frac{B}{X_2^2 \cdots X_p^p}.$$

又由上面的恒等式可知，如果 $f(x)$ 与 $F(x)$ 互素，则 A 与 X_1 互素，而 B 与 $X_2^2 \cdots X_p^p$ 互素。对分式

$$\frac{B}{X_2^2 \cdots X_p^p}$$

重复这一过程，依次继续，最后便达到上面给出的形式。

所以只需说明怎样求形如

$$\int \frac{A\,dx}{\phi^n}$$

的积分的有理部分，其中 $\phi(x)$ 是一个同其导数互素的多项式。由上面提到的定理，可以找到两个多项式 B 与 C，使得

$$B\phi(x) + C\phi'(x) = A,$$

于是前一个积分可写成

$$\int \frac{A\,dx}{\phi^n} = \int \frac{B\phi + C\phi'}{\phi^n}\,dx = \int \frac{B\,dx}{\phi^{n-1}} + \int C\frac{\phi'\,dx}{\phi^n}.$$

如果 n 大于一，取

$$u = C, \qquad v = -\frac{1}{(n-1)\phi^{n-1}},$$

并作分部积分，得

$$\int C\frac{\phi'}{\phi^n}\,dx = -\frac{C}{(n-1)\phi^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{C'\,dx}{\phi^{n-1}}.$$

把它代入前式，得到公式

$$\int \frac{A\,dx}{\phi^n} = -\frac{C}{(n-1)\phi^{n-1}} + \int \frac{A_1\,dx}{\phi^{n-1}},$$

其中 A_1 是一个新的多项式。若 $n > 2$，可对新的积分再作同样处理，如此继续；这个过程总能一直进行到分母中 ϕ 的指数等于一为止，于是将有

$$\int \frac{A\,dx}{\phi^n} = R(x) + \int \frac{\psi\,dx}{\phi},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 $R(x)$ 是 x 的有理函数，而 ψ 是一个多项式；总可假定它的次数低于 ϕ 的次数，但它不必同 ϕ 互素。为了积分后一种形式，必须知道 ϕ 的根；但是这个积分的求值不会引入新的有理项，因为分式 ψ/ϕ 的分解只导致下列两种类型的项:

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

其中每一个的积分都是一个超越函数。

这个方法特别使我们能够判定一个给定有理函数的积分本身是否仍为有理函数。其充要条件是：在上述过程尽可能执行到最后时，每一个类似于 ψ 的多项式都为零。

应注意，前面求 I_n 的递推公式时所用的方法，本质上只是这个方法的一个特殊情形。现在考虑更一般的积分

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}, \qquad A \neq 0, \qquad B^2-AC \neq 0.$$

由恒等式

$$A(Ax^2+2Bx+C)-(Ax+B)^2 = AC-B^2$$

可知，可以写

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{A}{AC-B^2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} - \frac{1}{AC-B^2}\int \frac{(Ax+B)(Ax+B)\,dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}.$$

对最后一个积分作分部积分，得

$$\int (Ax+B)\frac{(Ax+B)\,dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = -\frac{Ax+B}{2(n-1)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} + \frac{A}{2n-2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}},$$

于是前面的关系变为

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{Ax+B}{2(n-1)(AC-B^2)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\frac{A}{AC-B^2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}.$$

继续同一过程，最后归结为积分

$$\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 $B^2-AC>0$ 时它是一个对数，当 $B^2-AC<0$ 时它是一个反正切。

再举一例，考虑积分

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx.$$

由恒等式

$$5x^3+3x-1=6x(x^2+1)-(x^3+3x+1)$$

可知，可以写

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\int \frac{6x(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx-\int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

对右端第一个积分作分部积分，得

$$\int x\frac{6(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^3}=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}+\int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2},$$

于是给定积分的值为

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}.$$

注. 应用 Hermite 方法时，需要解决下面的问题：给定三个多项式 A,B,C，次数分别为 m,n,p，并且其中两个 A 与 B 互素，求另外两个多项式 u 与 v，使关系

$$Au+Bv=C$$

恒成立。

为了确定次数尽可能低的两个多项式 u 与 v 来解这个问题，先假定 p 至多等于 $m+n-1$。这时可取 u 与 v 分别为次数 $n-1$ 与 $m-1$ 的多项式。于是 $m+n$ 个未知系数由比较系数所得的 $m+n$ 个非齐次线性方程决定。因为这些方程的行列式不能为零；若为零，就能找到次数不超过 $n-1$ 与 $m-1$ 的两个多项式 u 与 v，使恒等式 $Au+Bv=0$ 成立；而这只有在 A 与 B 有公因子时才可能。

如果 C 的次数等于或大于 $m+n$，可用 AB 去除 C，得到次数小于 $m+n$ 的余式 C'。于是 $C=ABQ+C'$；再作代换 $u-BQ=u_1$，关系 $Au+Bv=C$ 就化为

$$Au_1+Bv=C'.$$

这正是第一种情形下的问题。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

105. 类型 $\int R(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx$ 的积分

在有理函数的积分之后，自然要考察无理函数的积分。我们从被积函数是 x 以及二次多项式平方根的有理函数这一情形开始。在这种情形下，一个简单代换便可消去根号，并把积分化为前一情形。当根号下的式子是一次式，比如 $ax+b$ 时，这个代换是不言自明的。若令 $ax+b=t^2$，则

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})\,dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right)\frac{2t\,dt}{a},$$

变换后的积分的被积函数是有理函数。

如果根号下的式子是二次式，并有两个实根 a 与 b，则可写

$$\sqrt{A(x-a)(x-b)} = (x-b)\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}},$$

而代换

$$\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}} = t, \qquad \text{或} \qquad x = \frac{Aa-bt^2}{A-t^2},$$

确能消去根号。

如果根号下的式子有虚根，上述过程就会引入虚量。为了弄清问题的本质，令 y 表示根号 $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$。那么 x 与 y 是曲线

$$y^2 = Ax^2+2Bx+C \tag{1}$$

上一点的坐标；显然，整个问题等价于用一个参数的有理函数来表示一个二次曲线上点的坐标。几何上可看出这是可能的。因为若过二次曲线上任意一点 (α, β) 作割线

$$y-\beta = t(x-\alpha),$$

则该割线同二次曲线的第二个交点的坐标由一次方程给出，因此是 t 的有理函数。

若三项式 $Ax^2+2Bx+C$ 有虚根，则系数 A 必须为正；否则该三项式对一切实 x 值都为负。在这种情形下，二次曲线 (1) 是双曲线。一条平行于这条双曲线某一渐近线的直线

$$y = x\sqrt{A}+t$$

截双曲线于一点，其坐标为

$$x = \frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}, \qquad y = t+\sqrt{A}\,\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

若 $A<0$，二次曲线是椭圆，而三项式 $Ax^2+2Bx+C$ 必有两个实根 a 与 b；否则它对一切实 x 值都为负。前面给出的变量代换，正是用动割线

$$y=t(x-a)$$

截这条二次曲线时所得到的代换。

例如取积分

$$\int \frac{dx}{(x^2+k)\sqrt{x^2+k}}.$$

辅助二次曲线 $y^2=x^2+k$ 是一条双曲线；平行于一条渐近线的直线 $x+y=t$ 截双曲线于一点，其坐标为

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{t}\right),\qquad y=\sqrt{x^2+k}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{k}{t}\right).$$

按这些方程所指示的方式代换，得到

$$dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{t^2}\right)dt,\qquad \int \frac{dx}{(x^2+k)\sqrt{x^2+k}}=\int \frac{4t\,dt}{(t^2+k)^2},$$

或者回到变量 x,

$$\int \frac{dx}{(x^2+k)\sqrt{x^2+k}}=\frac{x-\sqrt{x^2+k}}{k\sqrt{x^2+k}},$$

其中右端只差一个常数项而确定。一般地，若 $AC-B^2$ 不为零，则有公式

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{3/2}}=\frac{Ax+B}{(AC-B^2)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

在有些情形中，不消去根号而直接求积分反而更容易。比如考虑积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

若系数 A 为正，积分可写成

$$\int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{A^2x^2+2ABx+AC}}=\int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{(Ax+B)^2+AC-B^2}},$$

或令 $Ax+B=t$，得

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+AC-B^2}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left|t+\sqrt{t^2+AC-B^2}\right|.$$

回到变量 x，有公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left|Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right|.$$

如果 x^2 的系数为负，积分可写成

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{AC+B^2-(Ax-B)^2}}, \qquad A>0.$$

量 $AC+B^2$ 必为正。因此作代换

$$Ax-B = t\sqrt{AC+B^2},$$

给定积分变为

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin t.$$

于是这种情形下的公式是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \frac{Ax-B}{\sqrt{AC+B^2}}.$$

容易证明，当 x 在三项式两个根之间变化时，反正弦的自变量从 -1 变到 $+1$。

中间情形 $A=0$ 且 $B\neq 0$ 时，积分是代数的:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2Bx+C}} = \frac{1}{B}\sqrt{2Bx+C}.$$

类型

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

的积分，可借代换 $x=a+1/y$ 化为前一种类型。事实上，有公式

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{A_1y^2+2B_1y+C_1}},$$

其中

$$A_1 = Aa^2+2Ba+C, \qquad B_1 = Aa+B, \qquad C_1 = A.$$

应注意，当且仅当 a 是根号下三项式的一个根时，这个积分才是代数的。

现在考虑类型 $\int \sqrt{x^2+A}\,dx$ 的积分。分部积分给出

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

另一方面，有

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \sqrt{x^2+A}\,dx - \int \frac{A\,dx}{\sqrt{x^2+A}}$$
$$= \int \sqrt{x^2+A}\,dx - A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|.$$

由这两个关系容易得到公式

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|, \tag{2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|. \tag{3}$$

类似地可推出下列公式:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \tag{4}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}. \tag{5}$$

106. 双曲线的面积

前面的积分出现在求椭圆或双曲线扇形面积的问题中。例如考虑双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

并求由弧 AM、x 轴和纵坐标 MP 围成的曲边梯形 AMP 的面积（见 图 21）。这个面积等于定积分

$$\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{t^2-a^2}\,dt,$$

也就是由公式 (2) 得

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right].$$

但是 $MP = y = (b/a)\sqrt{x^2-a^2}$，而项 $(b/2a)x\sqrt{x^2-a^2}$ 正好是三角形 OMP 的面积。因此，由弧 AM 与矢径 OA, OM 围成的扇形 OAM 的面积 S 为

$$S = \frac{1}{2}ab\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \frac{1}{2}ab\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

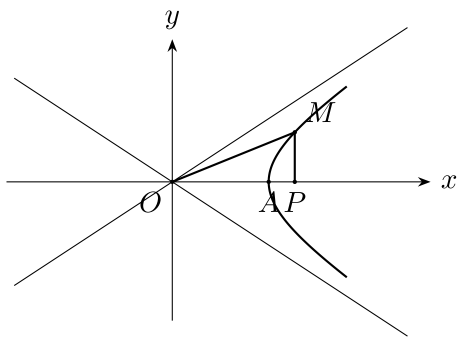


图 21

这个公式使我们能用面积 S 表示双曲线上一点 M 的坐标 x 与 y。事实上，由上式和双曲线方程，容易证明

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=e^{2S/ab},\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=e^{-2S/ab},$$

或

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{2S/ab}+e^{-2S/ab}\right),\qquad y=\frac{b}{2}\left(e^{2S/ab}-e^{-2S/ab}\right).$$

右端出现的函数称为双曲余弦与双曲正弦:

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

所以上述方程可写成

$$x=a\cosh\frac{2S}{ab},\qquad y=b\sinh\frac{2S}{ab}.$$

这些双曲函数具有同三角函数类似的性质。[1]例如，容易推出下列公式:

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,$$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y,$$

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x.$$

同样可证明，椭圆上一点的坐标可以用相应扇形面积表示如下:

$$x=a\cos\frac{2S}{ab},\qquad y=b\sin\frac{2S}{ab}.$$

[1]在 Houel 的 *Recueil des formules numériques* 中可找到这些函数对正自变量的对数表。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在单位半径圆和半轴为一的等轴双曲线的情形下，这些公式分别变为

$$x = \cos 2S, \qquad y = \sin 2S; \qquad x = \cosh 2S, \qquad y = \sinh 2S.$$

显然，双曲函数同等轴双曲线的关系，正如三角函数同圆的关系。

107.　抛物线的求长

试求抛物线 $2py = x^2$ 从顶点 O 到任意点 M 的弧长（见 图 22）。一般公式给出

$$\operatorname{arc} OM = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{t}{p}\right)^2}\, dt = \int_0^x \frac{\sqrt{t^2+p^2}}{p}\, dt,$$

或应用公式 (2)，

$$\operatorname{arc} OM = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}.$$

这个结果中的代数项正好是切线长 MT，因为我们知道 $OT = x/2$，所以

$$MT^2 = y^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{4p^2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(x^2+p^2)}{4p^2}.$$

若连接 T 与焦点 F，则角 MTF 是直角。于是有

$$FT = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+x^2},$$

由此可以推出抛物线的一个有趣性质。

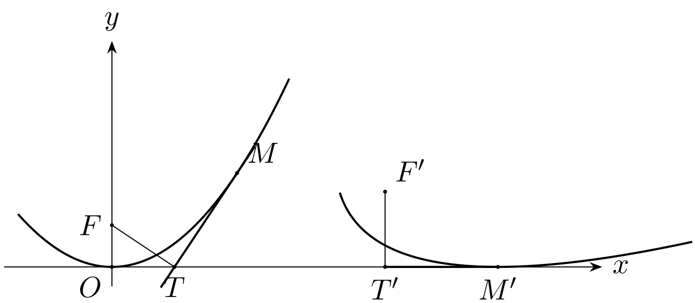


图 22

设抛物线无滑动地沿 x 轴滚动，并求焦点的轨迹；这个焦点被假定同抛物线刚性相连。当抛物线在 M' 处同 x 轴相切时，$OM' = \text{arc}\,OM$。点 T 来到一个位置 T'，使 $M'T' = MT$；焦点 F 在一点 F' 上，这一点通过在平行于 y 轴的直线上取 $T'F' = TF$ 而得到。点 F' 的坐标 X, Y 因而为

$$X = \text{arc}\,OM - MT = \frac{p}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}, \qquad Y = TF = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+x^2},$$

轨迹方程由这两个方程消去 x 得到。由第一个方程可得

$$x + \sqrt{x^2+p^2} = pe^{2X/p},$$

还可添上方程

$$x - \sqrt{x^2+p^2} = -pe^{-2X/p},$$

因为两个左端的乘积等于 $-p^2$。两式相减，得

$$\sqrt{x^2+p^2} = \frac{p}{2}\left(e^{2X/p} + e^{-2X/p}\right),$$

于是所求轨迹方程为

$$Y = \frac{p}{4}\left(e^{2X/p} + e^{-2X/p}\right) = \frac{p}{2}\cosh\frac{2X}{p}.$$

这条曲线称为悬链线，很容易作出。它的形状同抛物线略相似。

108.　有理曲线

现在一般地考虑代数函数的积分。设

$$F(x,y) = 0 \tag{6}$$

是一条代数曲线的方程，$R(x,y)$ 是 x 与 y 的有理函数。如果在 $R(x,y)$ 中把 y 换成方程 (6) 的一个根，所得结果便是单变量 x 的函数；积分

$$\int R(x,y)\,dx$$

称为关于曲线 (6) 的 Abel 积分。当给定曲线和函数 $R(x,y)$ 任意时，这些积分是超越函数。但是在特殊情形，即曲线是有理曲线（unicursal curve），亦即曲

线上一点的坐标可表示为一个变量参数 t 的有理函数时，附属于该曲线的 Abel 积分立即化为有理函数的积分。事实上，设

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t)$$

是曲线用参数 t 表示的方程。取 t 为新的自变量，则积分成为

$$\int R(x,y)\,dx = \int R[f(t),\phi(t)]f'(t)\,dt,$$

而新的被积函数显然是有理函数。

解析几何教材中证明，[2]在这里只含普通二重点的情形，一条 n 次有理曲线共有 $(n-1)(n-2)/2$ 个二重点；反过来，一条具有这么多个普通二重点的 n 次曲线是有理曲线。原文在本节末注中还说明，高阶奇点应按其等价的孤立二重点数计入；用现代术语说，这里计数的是奇点的总 δ-不变量。我只回忆一下如何求坐标关于参数的表达式。给定一条 n 次曲线 C_n，它有

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

个二重点；过这些 δ 个二重点以及 C_n 上任取的 $n-3$ 个普通点，作一族含一个参数的 $n-2$ 次曲线。这些点确实决定这样一个曲线族，因为

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1,$$

而唯一确定一条 $n-2$ 次曲线需要 $(n-2)(n+1)/2$ 个点。设

$$P(x,y) + tQ(x,y) = 0$$

是这个曲线族的方程，其中 t 是任意参数。族中每一条曲线同曲线 C_n 相交于 $n(n-2)$ 个点；其中有若干点同 t 无关，即前面选取的 $n-3$ 个普通点，以及 δ 个二重点，每个二重点作为两个交点计数。但是

$$n - 3 + 2\delta = n - 3 + (n-1)(n-2) = n(n-2) - 1,$$

于是只剩下一个随 t 变化的交点。这个点的坐标是某些一次方程的解，这些方程的系数是 t 的整多项式；因此坐标本身就是 t 的有理函数。也可以不用前面的曲线族，而采用通过这 $(n-1)(n-2)/2$ 个二重点以及任取在 C_n 上的 $2n-3$ 个普通点的 $n-1$ 次曲线族。

[2]例如可参见 Niewenglowski, *Cours de Géométrie analytique*, Vol. II, pp. 99–114.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

若 $n=2$，则 $(n-1)(n-2)/2=0$；因此每一条二次曲线都是有理曲线，正如前面所见。若 $n=3$，则 $(n-1)(n-2)/2=1$；三次有理曲线就是具有一个二重点的三次曲线。以这个二重点为原点，三次曲线方程具有形式

$$\phi_3(x,y)+\phi_2(x,y)=0,$$

其中 ϕ_3 与 ϕ_2 是次数等于其下标的齐次多项式。过二重点的割线 $y=tx$ 同三次曲线相交于唯一一个可变点，其坐标为

$$x=-\frac{\phi_2(1,t)}{\phi_3(1,t)},\qquad y=-\frac{t\phi_2(1,t)}{\phi_3(1,t)}.$$

一条四次有理曲线有三个二重点。为了求曲线上点的坐标，应作过三个二重点和曲线上任意另取一点的一族二次曲线。这个曲线族中每条二次曲线同四次曲线恰相交于一个随参数变化的点。例如，给出交点横坐标的方程，在去掉对应于二重点的因子之后，会化为一次方程，从而给出 x 作为参数的有理函数。y 也可用类似方法求出。

作为例子，考虑双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),$$

它在原点有一个二重点，在两个虚圆点还各有一个二重点。过原点且同双纽线一支相切的圆

$$x^2+y^2=t(x-y)$$

同该曲线相交于唯一一个可变点。合并这两个方程，得

$$t^2(x-y)^2=a^2(x^2-y^2),$$

或除以 $x-y$，得

$$t^2(x-y)=a^2(y+x).$$

最后这个方程表示一条过原点的直线，它同圆相交于原点之外的一点，其坐标为

$$x=\frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\qquad y=\frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

也可用下面的过程更容易地得到这些结果；这个过程可直接用于任何已知一个二重点的四次有理曲线。割线 $y=\lambda x$ 截双纽线于两点，其坐标为

$$x=\frac{\pm a\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2},\qquad y=\lambda x.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

根号下的式子是二次式。因此根据 §105，代换

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=\left(\frac{a}{t}\right)^2$$

可以消去根号。容易证明，这个代换正导出刚才得到的表达式。

注. 当一条平面曲线有更高阶的奇点时，可以证明，每个这样的奇点等价于若干孤立二重点。若一条曲线的奇点等价于 $(n-1)(n-2)/2$ 个孤立二重点，则该曲线是有理曲线。例如，一条 n 次曲线若有一个 $n-1$ 重点，则它是有理曲线，因为过这个重点的割线同该曲线只在一个可变点处相交。

109.　二项微分的积分

在其他根号能够消去的积分中，可以提到下列类型：

$$\int R\big(x,(ax+b)^{1/q}\big)\,dx,\qquad \int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\,dx,$$

$$\int R(x^{\alpha},x^{\alpha'},x^{\alpha''},\ldots)\,dx,$$

其中 R 表示一个有理函数，而指数 $\alpha,\alpha',\alpha'',\ldots$ 都是可公度数。对于第一类，只要令 $ax+b=t^q$ 即可。对于第二类，代换 $ax+b=t^2$ 只留下一个二次式平方根，然后可用第二个代换消去。最后，对于第三类，可令 $x=t^D$，其中 D 是分数 $\alpha,\alpha',\alpha'',\ldots$ 的公分母。

同第三类相联系，可以考虑形如

$$x^m(ax^n+b)^p\,dx$$

的微分，它们称为二项微分。设三个指数 m,n,p 都可公度。如果 p 是整数，则如刚才所说，可借代换 $x=t^D$ 使表达式有理化。为了发现进一步的可积情形，试作代换 $ax^n+b=t$。这给出

$$x=\left(\frac{t-b}{a}\right)^{1/n},\qquad dx=\frac{1}{na}\left(\frac{t-b}{a}\right)^{1/n-1}dt,$$

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{1}{na}\int t^p\left(\frac{t-b}{a}\right)^{(m+1)/n-1}dt.$$

变换后的积分同原来的形式相同，而取代 p 的指数是 $(m+1)/n-1$。所以，当 $(m+1)/n$ 是整数时，积分可以完成。

另一方面，积分也可写成

$$\int x^{m+np}(a+bx^{-n})^p\,dx,$$

由此显然可见，另一种可积情形是

$$\frac{m+np+1}{n}=\frac{m+1}{n}+p$$

为整数的情形。总而言之，只要三个数

$$p,\qquad \frac{m+1}{n},\qquad \frac{m+1}{n}+p$$

中有一个是整数，积分就能完成。当 m,n,p 为有理数时，在其他情形中，该积分不能用有限个初等函数符号表示。

在这些情形下,把积分化为只含两个指数的较简单形式是方便的。令 $ax^n=bt$，得

$$x=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}t^{1/n},\qquad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}t^{1/n-1}dt,$$

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{b^p}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{(m+1)/n}\int t^{(m+1)/n-1}(1+t)^p\,dt.$$

略去常数因子，并令 $q=(m+1)/n-1$，便归结为积分

$$\int t^q(1+t)^p\,dt.$$

可积情形正是三个数 $p,q,p+q$ 中有一个是整数的情形。如果 p 是整数且 $q=r/s$，就应令 $t=u^s$。如果 q 是整数且 $p=r/s$，就应令 $1+t=u^s$。最后，如果 $p+q$ 是整数，则积分可写成

$$\int t^{p+q}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt,$$

而代换 $1+t=tu^s$，其中 $p=r/s$，便消去根号。

例如考虑积分

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$$

这里 $m=1,n=3,p=1/3$，并且 $(m+1)/n+p=1$。所以这是一个可积情形。令 $x^3=t$，积分成为

$$\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}\,dt,$$

再作第二个代换 $1+t=tu^3$ 即可消去根号。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

II. 椭圆积分与超椭圆积分

110.　积分的约化

设 $P(x)$ 是一个 p 次整多项式，并且同它的导数互素。积分

$$\int R\big[x, \sqrt{P(x)}\big]\, dx,$$

其中 R 表示 x 与根式 $y = \sqrt{P(x)}$ 的有理函数；当 p 大于 2 时，这个积分一般不能用初等函数表示。这样的积分是一般 Abel 积分的特殊情形；它们可以分解为若干部分，其中有些部分给出代数函数和对数函数，另有一定数目的积分则产生新的超越函数，这些函数不能用有限个初等函数符号表示。下面来讨论这种约化。

有理函数 $R(x,y)$ 是两个关于 x, y 的整多项式之商。把 y 的任一偶次幂，例如 y^{2q}，换成 $[P(x)]^q$，又把任一奇次幂，例如 y^{2q+1}，换成 $y[P(x)]^q$，显然可以假定这个分式的分子和分母关于 y 都是一次的，即

$$R(x,y) = \frac{A + By}{C + Dy},$$

其中 A, B, C, D 是 x 的整多项式。把分子和分母都乘以 $C - Dy$，并用 $P(x)$ 代替 y^2，便可把它写成

$$R(x,y) = \frac{F + Gy}{K},$$

其中 F, G, K 都是多项式。于是原积分分成两部分；第一部分

$$\int \frac{F}{K}\, dx$$

是有理函数的积分。因此只需考察第二个积分

$$\int \frac{Gy}{K}\, dx,$$

它也可写成

$$\int \frac{M\, dx}{N\sqrt{P(x)}},$$

其中 M, N 是 x 的整多项式。有理分式 M/N 可以分解为一个整式部分 $E(x)$ 与若干部分分式之和：

$$\frac{M}{N} = E(x) + \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \cdots + \frac{A_p}{X_p^p},$$

其中每个多项式 X_i 都同它的导数互素。因此我们只须考察两类积分:

$$Y_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{P(x)}}, \qquad Z_n = \int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}.$$

如果 $P(x)$ 的次数为 p，那么一切积分 Y_m 都可以用最初的 $p-1$ 个积分

$$Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$$

以及若干代数表达式表示出来。

事实上，写成

$$P(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots .$$

于是

$$\frac{d}{dx}\left(x^m\sqrt{P(x)}\right) = mx^{m-1}\sqrt{P(x)} + \frac{x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}} = \frac{2mx^{m-1}P(x) + x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}}.$$

这个表达式分子的次数为 $m+p-1$，最高次项为

$$(2m+p)a_0x^{m+p-1}.$$

对上式两边积分，得到

$$2x^m\sqrt{P(x)} = (2m+p)a_0Y_{m+p-1} + \cdots ,$$

其中没有写出的各项只含下标小于 $m+p-1$ 的 Y 型积分。依次令 $m = 0, 1, 2, \ldots$, 便可相继把积分

$$Y_{p-1}, Y_p, \ldots$$

用代数表达式和 $p-1$ 个积分 $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$ 表示出来。

对于第二类积分，必须区分 X 与 $P(x)$ 互素和不互素两种情形。

1）若 X 与 $P(x)$ 互素，则积分 Z_n 可以约化为一个代数项、若干 Y_k 型积分，以及一个新的积分

$$\int \frac{B\,dx}{X\sqrt{P(x)}},$$

其中 B 是次数低于 X 的多项式。

由于 X 同它的导数 X' 互素，并且也同 $P(x)$ 互素，所以 X^n 同 PX' 互素。因此可以找到两个多项式 λ, μ，使

$$\lambda X^n + \mu X' P = A.$$

所论积分遂分成两部分：

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}} = \int \frac{\lambda\,dx}{\sqrt{P(x)}} + \int \frac{\mu\sqrt{P(x)}\,X'}{X^n}\,dx.$$

第一部分是若干 Y 型积分之和。在第二个积分中，当 $n > 1$ 时作分部积分，取

$$u = \mu\sqrt{P}, \qquad v = -\frac{1}{(n-1)X^{n-1}},$$

便得到

$$\int \frac{\mu\sqrt{P}\,X'}{X^n}\,dx = -\frac{\mu\sqrt{P}}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{2\mu' P + \mu P'}{2X^{n-1}\sqrt{P(x)}}\,dx.$$

新得到的积分同原积分形式相同，只是 X 的指数降低了一。尽可能反复施行这个过程，也就是只要 X 的指数大于一就继续，最后得到形如

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}} = \int \frac{B\,dx}{X\sqrt{P}} + \int \frac{C\,dx}{\sqrt{P}} + \frac{D\sqrt{P}}{X^{n-1}}$$

的结果，其中 B, C, D 都是多项式，并且总可假定 B 的次数低于 X 的次数。

2）若 X 与 P 有公因子 D，则可写

$$X = YD, \qquad P = SD,$$

其中多项式 D, S, Y 两两互素。因此可以找到两个多项式 λ, μ，使

$$A = \lambda D^n + \mu Y^n,$$

从而所论积分可写成

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda\,dx}{Y^n\sqrt{P}} + \int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}}.$$

右端第一个新积分属于刚才讨论的类型。第二个积分

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 D 是 P 的一个因子，可以约化为一个代数项和若干 Y 型积分之和。

事实上，因为 D^n 同乘积 $D'S$ 互素，所以可以找到两个多项式 λ_1, μ_1，使

$$\lambda_1 D^n + \mu_1 D'S = \mu.$$

于是

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\,dx}{\sqrt{P}} + \int \frac{\mu_1 SD'}{D^n\sqrt{P}}\,dx.$$

以 DS 代替 P，把右端第二个积分写成

$$\int \mu_1\sqrt{S}\,\frac{D'}{D^{n+1/2}}\,dx,$$

再作分部积分，取

$$u = \mu_1\sqrt{S}, \qquad v = -\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\frac{1}{D^{n-1/2}},$$

便得到

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\,dx}{\sqrt{P}} - \frac{\mu_1\sqrt{S}}{(n-\frac{1}{2})D^{n-1/2}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{2\mu_1' S + \mu_1 S'}{D^{n-1}\sqrt{P}}\,dx.$$

这又是一个约化公式；但在这里，由于指数 $n-1/2$ 是分数，即使分母中的 D 只有一次幂，也仍可进行约化。最后得到形如

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \frac{K\sqrt{P}}{D^n} + \int \frac{H\,dx}{\sqrt{P}}$$

的表达式，其中 H, K 都是多项式。

综上，积分

$$\int \frac{M\,dx}{N\sqrt{P}}$$

总能约化为若干代数项与下列两类积分之和：

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{P}}, \qquad \int \frac{X_1\,dx}{X\sqrt{P}},$$

这里 $m \le p-2$，X 同它的导数 X' 以及同 P 都互素，并且 X_1 的次数低于 X 的次数。*这种约化只涉及多项式的加法、乘法和除法。*

如果方程 $X=0$ 的根已知，每个有理分式 X_1/X 都可以分解为下列两种形式的部分分式之和：

$$\frac{A}{x-a},\qquad \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

其中 A,B,C 是常数。这样便引出两种新类型：

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},\qquad \int\frac{(Bx+C)\,dx}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]\sqrt{P(x)}}.$$

如果容许 a 取虚数值，这两类可归结为一类，即第一类。这样的积分称为*第三类积分*。当 $m<p/2-1$ 时，Y_m 型积分称为*第一类积分*；当 $m\geq p/2-1$ 时，称为*第二类积分*。第一类积分有一个特征性质：当积分上限无限增大时，以及当上限趋于 $P(x)$ 的一个根时，它们都保持有限（见 §89、§90）。但是，第二类积分与第三类积分之间的本质区别，目前只能暂时不加证明地接受；以后将指出二者真正的区别。

注. 到现在为止，我们没有对多项式 $P(x)$ 的次数 p 作任何假定。如果 p 是奇数，总可以把它提高一次。设 $P(x)$ 是 $2q-1$ 次多项式：

$$P(x)=A_0x^{2q-1}+A_1x^{2q-2}+\cdots+A_{2q-1}.$$

令

$$x=a+\frac{1}{y},$$

其中 a 不是 $P(x)$ 的根。于是

$$\begin{aligned}P(x)&=P(a)+P'(a)\frac{1}{y}+\cdots+\frac{P^{(2q-1)}(a)}{(2q-1)!}\frac{1}{y^{2q-1}}\\&=\frac{P_1(y)}{y^{2q}},\end{aligned}$$

其中 $P_1(y)$ 是 $2q$ 次多项式。因此

$$\sqrt{P(x)}=\frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

而 x 与 $\sqrt{P(x)}$ 的任一有理函数的积分，便化成 y 与 $\sqrt{P_1(y)}$ 的有理函数的积分。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

反过来，如果根式下多项式 $P(x)$ 的次数是偶数 $2q$，并且*已知* $P(x)$ *的一个根*，那么可以把次数降低一。事实上，若 a 是 $P(x)$ 的一个根，仍令 $x = a + 1/y$，便有

$$\begin{aligned} P(x) &= P'(a)\frac{1}{y} + \cdots + \frac{P^{(2q)}(a)}{(2q)!}\frac{1}{y^{2q}} \\ &= \frac{P_1(y)}{y^{2q}}, \end{aligned}$$

其中 $P_1(y)$ 的次数为 $2q-1$，并且

$$\sqrt{P(x)} = \frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q}.$$

因此，变换后积分的被积函数中，除 $\sqrt{P_1(y)}$ 之外不再含有别的根式。

111. 代数可积的情形

我们刚刚看到，形如

$$\int R\big[x, \sqrt{P(x)}\big]\,dx$$

的积分，总可以借助初等运算约化为以下各项之和：一个有理分式的积分，一个形如

$$\frac{G\sqrt{P(x)}}{L}$$

的代数表达式，以及若干第一类、第二类和第三类积分。又因为有理分式积分的有理部分也能用初等运算求出，所以原积分总可化为

$$\int R\big[x, \sqrt{P(x)}\big]\,dx = F\big[x, \sqrt{P(x)}\big] + T,$$

其中 F 是 x 与 $\sqrt{P(x)}$ 的有理函数，而 T 是三类积分之和，再加上一个积分

$$\int \frac{X_1}{X}\,dx;$$

这里 X 同它的导数互素，并且次数高于 X_1。Liouville 证明：如果给定积分能够用代数函数表示，那么它就等于

$$F\big[x, \sqrt{P(x)}\big].$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此必有恒等式

$$R\left[x,\sqrt{P(x)}\right]=\frac{d}{dx}\left\{F\left[x,\sqrt{P(x)}\right]\right\},$$

从而 $T=0$。

> 所以，只用多项式的乘法和除法，就可以判定一个给定积分是否能用代数函数积分；若答案是肯定的，同一过程还会给出这个积分的值。

112.　椭圆积分

如果多项式 $P(x)$ 是二次的，那么根据刚才研究的一般过程，x 与 $\sqrt{P(x)}$ 的有理函数的积分可约化为下列积分的计算：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},\qquad\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},$$

而我们已经知道怎样直接求出它们（见 §105）。

再简单一层的情形是*椭圆积分*，其中 $P(x)$ 是三次或四次多项式。正如上面所见，这两种情形可以互相归约。设 $P(x)$ 是一个四次多项式，系数全为实数，并且它的四个一次因子彼此不同。下面证明，总能找到一个实代换，把 $P(x)$ 化成一个只含偶次项的多项式。

设 a,b,c,d 是 $P(x)$ 的四个根。则存在一个形如

$$Lx'x''+M(x'+x'')+N=0\tag{7}$$

的对合关系，它对 $x'=a,x''=b$ 以及 $x'=c,x''=d$ 都成立。事实上，系数 L,M,N 只须满足两个关系

$$Lab+M(a+b)+N=0,\qquad Lcd+M(c+d)+N=0,$$

而取

$$L=a+b-c-d,\qquad M=cd-ab,\qquad N=ab(c+d)-cd(a+b)$$

显然就满足这些关系。

设 α,β 是这个对合的两个重合点，也就是方程

$$Lx^2+2Mx+N=0$$

的两个根。当

$$(cd-ab)^2-(a+b-c-d)\big[ab(c+d)-cd(a+b)\big]>0,$$

亦即当

$$(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)>0 \tag{8}$$

时，这两个根都是实数。

总可以适当排列 $P(x)$ 的四个根，使条件 (8) 成立。如果四个根全为实数，只须把 a,b 取成其中最大的两个根，这时式中的每个因子都是正的。如果只有两个根为实数，就把 a,b 取成这两个实根，把 c,d 取成一对共轭虚根；这时 $a-c$ 与 $a-d$ 互为共轭虚数，$b-c$ 与 $b-d$ 也互为共轭虚数。最后，如果四个根全为虚数，可以把 a,b 取成一对共轭虚根，把 c,d 取成另一对共轭虚根；这时 (8) 中的因子也两两互为共轭虚数。还应注意，按这些方式选择根时，相应的 L,M,N 都是实数。

方程 (7) 现在可以写成

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0. \tag{9}$$

令

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=y, \qquad \text{即} \qquad x=\frac{\beta y-\alpha}{y-1},$$

便得到

$$P(x)=\frac{P_1(y)}{(y-1)^4},$$

其中 $P_1(y)$ 是一个实系数四次多项式，它的四个根为

$$\frac{a-\alpha}{a-\beta}, \qquad \frac{b-\alpha}{b-\beta}, \qquad \frac{c-\alpha}{c-\beta}, \qquad \frac{d-\alpha}{d-\beta}.$$

由 (9) 显然可知，这四个根两两满足方程 $y'+y''=0$；所以多项式 $P_1(y)$ 不含任何奇次项。

如果 $P(x)$ 的四个根满足 $a+b=c+d$，就有 $L=0$，于是对合的一个重合点在无穷远处。令

$$\alpha=-\frac{N}{2M},$$

方程 (7) 便成为

$$x'-\alpha+x''-\alpha=0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这时只须令 $x=\alpha+y$，便可得到一个不含奇次项的多项式。

所以可以假定 $P(x)$ 已经化为标准形

$$P(x)=A_0x^4+A_1x^2+A_2.$$

于是，略去一个代数项和一个有理函数的积分以后，任一椭圆积分都可以约化为下列各类积分之和：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},\qquad\int\frac{x\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},\qquad\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}.$$

积分

$$u=\int^x\frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

是*第一类椭圆积分*。反过来，如果把 x 看成 u 的函数，这个反函数就称为*椭圆函数*。上列第二个积分通过代换 $x^2=t$ 化成初等积分。第三个积分

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

是 Legendre 的第二类积分。最后有恒等式

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}=\int\frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}}+a\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}}.$$

积分

$$\int\frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

是 Legendre 的第三类积分。

这些积分之所以称为椭圆积分，是因为人们最初在求椭圆弧长的问题中遇到它们。设

$$x=a\cos\phi,\qquad y=b\sin\phi$$

是椭圆上一点的坐标。于是

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi)\,d\phi^2,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

或者，令

$$a^2 - b^2 = e^2 a^2,$$

则

$$ds = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \phi}\, d\phi.$$

所以，给出椭圆弧长的积分在作代换 $t = \cos\phi$ 并相应调换积分限后，成为

$$\begin{aligned} s &= a \int \frac{\sqrt{1 - e^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt \\ &= a \int \frac{1 - e^2 t^2}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - e^2 t^2)}}\, dt. \end{aligned}$$

由此可知，椭圆弧长等于一个第一类积分与一个第二类积分之和。

再考察由下列方程定义的双纽线:

$$x = a^2 \frac{t(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}, \qquad y = a^2 \frac{t(t^2 - a^2)}{t^4 + a^4}.$$

容易算得其弧长元素为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2a^4}{t^4 + a^4}\, dt^2.$$

所以双纽线的弧长由第一类椭圆积分给出。[3]

113. 伪椭圆积分

有时会出现这样的情形：积分

$$\int F\left[x, \sqrt{P(x)}\right] dx,$$

其中 $P(x)$ 是三次或四次多项式，可以表示成代数函数与有限个代数函数的对数之和。这样的积分称为*伪椭圆积分*。下面的一般情形中就会发生这种现象。设

$$Lx'x'' + M(x' + x'') + N = 0 \tag{10}$$

[3]这是 Serret 所发现的一整类曲线的共同性质；参见 Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, Vol. II, p. 264。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

是一个对合关系，它在四次方程 $P(x)=0$ 的四个根之间建立两两对应。若有理函数 $f(x)$ 恒等地满足关系

$$f(x)+f\left(-\frac{Mx+N}{Lx+M}\right)=0, \tag{11}$$

则积分

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx$$

是伪椭圆积分。

设 α,β 是这个对合的两个重合点。正如已经看到的，方程 (10) 可以写成

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0. \tag{12}$$

现在作代换

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=y.$$

这给出

$$dx=\frac{(\alpha-\beta)\,dy}{(1-y)^2},\qquad P(x)=\frac{P_1(y)}{(1-y)^4},$$

因而

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}=\frac{(\alpha-\beta)\,dy}{\sqrt{P_1(y)}},$$

其中 $P_1(y)$ 是一个不含 y 的奇次幂的四次多项式（见 §112）。另一方面，有理分式 $f(x)$ 变成一个有理分式 $\phi(y)$，它满足恒等式

$$\phi(y)+\phi(-y)=0.$$

事实上,由 (12) 相对应的两个 x 值,变换为两个 y 值 y',y'',而它们满足 $y'+y''=0$。显然，$\phi(y)$ 必有形式

$$\phi(y)=y\psi(y^2),$$

其中 ψ 是 y^2 的有理函数。所以所论积分化为

$$\int \frac{y\psi(y^2)\,dy}{\sqrt{A_0y^4+A_1y^2+A_2}},$$

只须再令 $y^2=z$，就把它化成一个初等积分。命题因而得证；剩下的只是实际执行约化。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当多项式 $P(x)$ 为三次时，只要把它的一个根看成无穷远根，定理仍然成立；证明同前面完全一样。

例如，如果方程 $P(x)=0$ 是一个互反方程，那么把根两两交换的一个对合关系是

$$x'x''=1.$$

所以，若有理函数 $f(x)$ 满足关系

$$f(x)+f(1/x)=0,$$

则积分

$$\int\frac{f(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx$$

是伪椭圆积分；依次作两个代换

$$\frac{x-1}{x+1}=y,\qquad y^2=z,$$

便可把它化成初等积分。

再设 $P(x)$ 是三次多项式

$$P(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{k^2}\right).$$

令

$$a=\infty,\qquad b=0,\qquad c=1,\qquad d=\frac{1}{k^2}.$$

存在三个把这些根两两交换的对合关系：

$$x'=\frac{1}{k^2x''},\qquad x'=\frac{1-k^2x''}{k^2(1-x'')},\qquad x'=\frac{1-x''}{1-k^2x''}.$$

因此，若有理函数 $f(x)$ 满足下面三个恒等式之一：

$$f(x)+f\left(\frac{1}{k^2x}\right)=0,$$

$$f(x)+f\left(\frac{1-k^2x}{k^2(1-x)}\right)=0,\qquad f(x)+f\left(\frac{1-x}{1-k^2x}\right)=0,$$

则积分

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

是伪椭圆积分。由此还可导出其他情形。例如令 $x = z^2$，上面的积分变为

$$\int \frac{2f(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

于是，只要 $f(z^2)$ 满足下列恒等式之一，这个新积分也同样是伪椭圆积分：

$$f(z^2) + f\left(\frac{1}{k^2z^2}\right) = 0,$$

$$f(z^2) + f\left(\frac{1-k^2z^2}{k^2(1-z^2)}\right) = 0, \qquad f(z^2) + f\left(\frac{1-z^2}{1-k^2z^2}\right) = 0.$$

第一个情形是 Euler 最先注意到的。[4]

III. 超越函数的积分

114.　正弦与余弦的有理函数的积分

众所周知，$\sin x$ 与 $\cos x$ 都可以用 $\tan(x/2) = t$ 的有理函数表示。因此，这个变量代换把形如

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

的积分化为 t 的有理函数的积分。事实上，

$$x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

于是给定积分变成

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \Phi(t)\,dt,$$

其中 $\Phi(t)$ 是有理函数。例如，

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t|;$$

因而

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

[4] 参见 Hermite 石印本讲义 *Cours*，第 4 版，pp. 25–28。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

积分 $\int dx/\cos x$ 可借代换 $x=\pi/2-y$ 化为前一个积分；这给出

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

前述方法的优点在于它具有一般性；不过常常可以找到一个同样有效而更简单的代换。例如，如果函数 $f(\sin x,\cos x)$ 以 π 为周期，那么它是 $\tan x$ 的有理函数，设为 $F(\tan x)$。因此，代换 $\tan x=t$ 把积分化为

$$\int F(\tan x)\,dx = \int \frac{F(t)\,dt}{1+t^2}.$$

作为例子，考虑积分

$$\int \frac{dx}{A\cos^2 x + B\sin x\cos x + C\sin^2 x + D},$$

其中 A,B,C,D 是任意常数。被积函数显然以 π 为周期；令 $\tan x=t$，则

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\qquad \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2},\qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

所以给定积分变成

$$\int \frac{dt}{A+Bt+Ct^2+D(1+t^2)}.$$

结果的形式将依赖于分母各根的性质。令其中适当的三个系数为零，就得到公式

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x,\qquad \int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \log|\tan x|,\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x.$$

当被积函数形如 $R(\sin x)\cos x$，或形如 $R(\cos x)\sin x$ 时，适当的变量代换是显然的：第一种情形令 $\sin x=t$；第二种情形令 $\cos x=t$。

有时，在采用一般方法以前，先作一次代换以化简积分是有利的。例如，考虑积分

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c},$$

其中 a,b,c 是任意三个常数。设 ρ 是正数，ϕ 是由方程

$$a=\rho\cos\phi,\qquad b=\rho\sin\phi$$

确定的角。于是

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\qquad \cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而给定积分可写成

$$\int \frac{dx}{\rho\cos(x-\phi)+c} = \int \frac{dy}{\rho\cos y + c},$$

其中 $x-\phi=y$。现在采用一般方法，令 $\tan(y/2)=t$，积分便成为

$$\int \frac{2\,dt}{\rho+c+(c-\rho)t^2},$$

其余计算没有困难。按照

$$\rho^2-c^2=a^2+b^2-c^2$$

为正还是为负，结果将有两种不同形式。

积分

$$\int \frac{m\cos x+n\sin x+p}{a\cos x+b\sin x+c}\,dx$$

可以化为前一个积分。令

$$u=a\cos x+b\sin x+c,$$

并确定三个常数 λ,μ,ν，使方程

$$m\cos x+n\sin x+p=\lambda u+\mu\frac{du}{dx}+\nu$$

恒成立。确定这三个数的方程为

$$m=\lambda a+\mu b,\qquad n=\lambda b-\mu a,\qquad p=\lambda c+\nu;$$

其中前两个方程确定 λ 与 μ。按这种方式选定三个常数以后，给定积分可写成

$$\int \frac{\lambda u+\mu\,du/dx+\nu}{u}\,dx=\lambda x+\mu\log|u|+\nu\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}.$$

例。试求定积分

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+e\cos x},\qquad |e|<1.$$

先把它看成不定积分，借助相继代换

$$\tan\frac{x}{2}=t,\qquad t=u\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

依次得到

$$\int \frac{dx}{1+e\cos x} = 2\int \frac{dt}{1+e+(1-e)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\int \frac{du}{1+u^2}.$$

所以不定积分等于

$$\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{x}{2}\right).$$

当 x 从 0 变到 π 时,

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{x}{2}$$

从 0 增大到 $+\infty$，而反正切从 0 变到 $\pi/2$。因此给定定积分等于

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}.$$

115.　约化公式

某些类型的积分也有约化公式。例如，$\tan^{n-1}x$ 的导数公式可写成

$$\frac{d}{dx}\big(\tan^{n-1}x\big) = (n-1)\tan^{n-2}x\,(1+\tan^2 x),$$

由此得到

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx.$$

被积函数中 $\tan x$ 的指数降低了二。反复应用这个公式，最后归结为下面两个积分之一:

$$\int dx = x, \qquad \int \tan x\,dx = -\log|\cos x|.$$

对于 $\int \cot^n x\,dx$ 型积分，相应公式为

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx.$$

一般地，考虑积分

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx,$$

其中 m, n 是任意正整数或负整数。当其中一个整数为奇数时，最好采用上面所给的变量代换。例如，若 $n = 2p + 1$，应令 $\sin x = t$；积分便化为

$$\int t^m (1 - t^2)^p \, dt.$$

因此只须考察 m, n 都为偶数的情形，也就是形如

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx$$

的积分。它可以写成

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m-1} x \cos^{2n} x \sin x \, dx.$$

把 $\cos^{2n} x \sin x \, dx$ 看作

$$-\frac{1}{2n+1} \cos^{2n+1} x$$

的微分，分部积分给出

$$\begin{aligned} I_{m,n} = & -\frac{\sin^{2m-1} x \cos^{2n+1} x}{2n+1} \\ & + \frac{2m-1}{2n+1} \int \sin^{2m-2} x \cos^{2n} x (1 - \sin^2 x) \, dx, \end{aligned}$$

这可写成

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{2m-1} x \cos^{2n+1} x}{2(m+n)} + \frac{2m-1}{2(m+n)} I_{m-1,n}. \tag{A}$$

这个公式使我们能够在不改变第二个指数的情形下降低指数 m。如果 m 为负，把方程 (A) 对 $I_{m-1,n}$ 解出，并以 $1 - m$ 代替 m，便得到类似公式

$$I_{-m,n} = \frac{\sin^{1-2m} x \cos^{2n+1} x}{1-2m} + \frac{2(n-m+1)}{1-2m} I_{1-m,n}. \tag{B}$$

下面两个容易导出的类似公式，使我们能够降低 $\cos x$ 的指数：

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{2m+1} x \cos^{2n-1} x}{2(m+n)} + \frac{2n-1}{2(m+n)} I_{m,n-1}, \tag{C}$$

$$I_{m,-n} = -\frac{\sin^{2m+1} x \cos^{1-2n} x}{1-2n} + \frac{2(m+1-n)}{1-2n} I_{m,-n+1}. \tag{D}$$

反复应用这些公式，可以把 m, n 各自都降到零。唯一不能继续的情形，是得到一个满足 $m + n = 0$ 的积分 $I_{m,n}$；但这样的积分正属于本节开头已经导出约化公式的类型之一。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

116. Wallis 公式

无论指数 m, n 是偶数还是奇数，都存在约化公式。

作为例子，试求定积分

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx,$$

其中 m 是正整数。分部积分给出

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x \sin x \, dx = -\left[\cos x \sin^{m-1} x\right]_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx.$$

注意到 $\cos x \sin^{m-1} x$ 在两个积分限处都为零，便得到

$$I_m = (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m),$$

从而得到递推公式

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \tag{13}$$

反复应用这个公式：若 m 为偶数，给定积分化为 $I_0 = \pi/2$；若 m 为奇数，则化为 $I_1 = 1$。在前一种情形令 $m = 2p$，并依次以 $2, 4, 6, \ldots, 2p$ 代替 m，得到

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \qquad I_4 = \frac{3}{4} I_2, \qquad \ldots, \qquad I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2};$$

把这些方程相乘，得

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2p} \, \frac{\pi}{2}.$$

同样得到

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p+1)}.$$

从这些公式可以推出 Wallis 的一个有趣结果。显然，I_m 的值随 m 增大而减小，因为 $\sin^{m+1} x$ 小于 $\sin^m x$。所以

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1}.$$

把 $I_{2p+1}, I_{2p}, I_{2p-1}$ 换成上面的值，得到新不等式

$$H_p > \frac{\pi}{2} > H_p \frac{2p}{2p+1},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这里为简便起见记

$$H_p=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p-1}.$$

显然，当 p 无限增大时，比值 $\pi/(2H_p)$ 趋近于一。因此，当因子数无限增多时，乘积 H_p 的极限是 $\pi/2$；相继各因子的构成规律是显然的。这就是 Wallis 乘积。

117.　余弦因子乘积的积分

考虑任意多个形如 $\cos(ax+b)$ 的因子的乘积，其中 a,b 是常数，同一个因子可以出现若干次。公式

$$\cos u\cos v=\frac{\cos(u+v)}{2}+\frac{\cos(u-v)}{2}$$

使我们能够把两个这种因子的乘积换成 x 的两个线性函数的余弦之和；因而也能把 n 个因子的乘积换成两个各含 $n-1$ 个因子的乘积之和。反复应用这个公式，最后把给定积分化为形如

$$\sum H\cos(Ax+B)$$

的和，其中每一项都可以立即积分。若 $A\neq 0$，则

$$\int\cos(Ax+B)\,dx=\frac{\sin(Ax+B)}{A}+C;$$

而在特殊情形 $A=0$ 时，

$$\int\cos B\,dx=x\cos B+C.$$

这种变换也适用于特殊乘积

$$\cos^m x\sin^n x,$$

其中 m,n 都是正整数。因为这个乘积可以写成

$$\cos^m x\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

应用前述过程，便得到倍角的正弦与余弦之和，其中每一项都可以立即积分。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

作为例子，试求曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$$

所围成的面积。可以认为它由参数方程

$$x=a\cos^3\theta,\qquad y=b\sin^3\theta$$

给出；当 θ 从 0 变到 2π 时，点走遍整条曲线。闭曲线面积公式

$$A=\frac{1}{2}\int_{(C)}x\,dy-y\,dx$$

给出

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{3ab}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta.$$

但是

$$(\sin\theta\cos\theta)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2\theta=\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta).$$

因此给定曲线的面积为

$$A=\frac{3ab}{16}\left[\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi ab}{8}.$$

现在容易推出下列公式：

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C,$$

$$\int\sin^3 x\,dx=\int\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\,dx=-\frac{3\cos x}{4}+\frac{\cos 3x}{12}+C,$$

$$\int\sin^4 x\,dx=\int\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8}\,dx=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C,$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C,$$

$$\int\cos^3 x\,dx=\int\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\,dx=\frac{3\sin x}{4}+\frac{\sin 3x}{12}+C,$$

$$\int\cos^4 x\,dx=\int\frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8}\,dx=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这些公式中可以看出一条一般规律。积分

$$F(x)=\int_0^x \sin^n u\,du, \qquad \Phi(x)=\int_0^x \cos^n u\,du$$

在 n 为奇数时以 2π 为周期；另一方面，当 n 为偶数时，x 每增加 2π，这些积分就增加一个正常数。这些结论一般成立，先验地也是显然的。事实上，

$$F(x+2\pi)=\int_0^{2\pi} \sin^n u\,du+\int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n u\,du,$$

也就是

$$F(x+2\pi)=\int_0^{2\pi} \sin^n u\,du+\int_0^{x} \sin^n u\,du=F(x)+\int_0^{2\pi} \sin^n u\,du,$$

因为 $\sin u$ 以 2π 为周期。如果 n 为偶数，积分

$$\int_0^{2\pi} \sin^n u\,du$$

显然为正；如果 n 为奇数，同一个积分为零，因为 $\sin(u+\pi)=-\sin u$。对 $\Phi(x)$ 的论证完全相同。

注。由于三角函数可以作多种多样的变换，在计算其他积分时引入三角代换往往很方便。例如，考虑积分

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

令 $x=\tan\phi$，这个积分变成

$$\int \cos\phi\,d\phi=\sin\phi+C.$$

所以回到变量 x，得到

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C,$$

这正是我们在 §105 中已经得到的结果。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

118. 有理函数与指数函数乘积的积分

考虑形如

$$\int R(x)e^{\omega x}\,dx$$

的积分，其中 $R(x)$ 是 x 的有理函数。像前面多次所作的那样，设函数 $R(x)$ 分解为

$$R(x)=E(x)+\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\cdots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

其中 $E(x),A_1,A_2,\ldots,A_p,X_1,\ldots,X_p$ 都是多项式，并且每个 X_i 都与其导数互素。给定积分于是等于若干积分之和：一项是

$$\int E(x)e^{\omega x}\,dx,$$

我们已在 §85 中学会用连续分部积分求它；其余若干项形如

$$\int\frac{Ae^{\omega x}}{X^n}\,dx.$$

当 $n>1$ 时存在一个约化公式。因为 X 与其导数互素，可以确定两个多项式 λ,μ，满足恒等式

$$A=\lambda X+\mu X'.$$

于是

$$\int\frac{Ae^{\omega x}}{X^n}\,dx=\int\frac{\lambda e^{\omega x}}{X^{n-1}}\,dx+\int\frac{\mu X'e^{\omega x}}{X^n}\,dx,$$

而分部积分给出

$$\int\mu e^{\omega x}\frac{X'\,dx}{X^n}=-\frac{1}{n-1}\frac{\mu e^{\omega x}}{X^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{e^{\omega x}(\mu'+\mu\omega)}{X^{n-1}}\,dx.$$

合并这两个公式，所论积分便约化为同一类型而指数 n 降低一的积分。反复应用这个过程，最后得到积分

$$\int\frac{Be^{\omega x}}{X}\,dx,$$

其中总可假定多项式 B 与 X 互素，并且次数低于 X。约化公式不能再用于这个积分；但是，如果 X 的根已知，总能把它化为一种新的超越函数。为明确起见，假定所有根都是实的。于是所论积分可以分解为若干形如

$$\int\frac{\alpha e^{\omega x}}{x-a}\,dx$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的积分。略去一个常数因子，代换

$$x = a + \frac{y}{\omega}, \qquad u = e^y$$

使这个积分可写成下列两种形式中的任一种:

$$\int \frac{e^y\,dy}{y}, \qquad \int \frac{du}{\log u}.$$

后一积分 $\int du/\log u$ 是一个超越函数，称为*对数积分*。

119.　杂项积分

考虑形如

$$\int e^{ax} f(\sin x, \cos x)\,dx$$

的积分，其中 f 是 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的整式函数。这个积分的任一项都形如

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

其中 m, n 是正整数。上面已经看到，乘积 $\sin^m x \cos^n x$ 可以换成倍角的正弦与余弦之和。因此只剩下研究下面两种类型:

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx, \qquad \int e^{ax} \sin bx\,dx.$$

分别对它们作分部积分，得到公式

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx\,dx.$$

所以所论积分的值为

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2},$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

在可以化为前述类型的积分中，还可举出下列各类:

$$\int f(\log x) x^m\,dx, \qquad \int f(\arcsin x)\,dx,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$$\int f(x)\arcsin x\,dx,\qquad \int f(x)\arctan x\,dx,$$

其中 f 表示任意整式函数。在前两种情形中，应以 $\log x$ 或 $\arcsin x$ 为新变量；在后两种情形中，应作分部积分，把 $f(x)\,dx$ 看作另一个多项式 $F(x)$ 的微分，这便会引向已经研究过的积分类型。

习题

1. 求下列各函数的不定积分：

$$\frac{1}{(x^4+1)^2},\qquad \frac{1}{x(x^3+1)^3},\qquad \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3},\qquad \frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}},$$

$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}},\qquad \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}},\qquad \frac{x}{\cos^2 x},$$

$$xe^x\cos x,\qquad \frac{x^{n/2}}{\sqrt{a+x^{n+2}}},\qquad x^{p/q}\tan x.$$

2. 求 Descartes 叶形

$$x^3+y^3-3axy=0$$

的叶环面积。

3. 计算积分 $\int y\,dx$，其中 x, y 满足下列恒等式之一：

$$(x^2-a^2)^2-ay^2(2y+3a)=0,$$

$$y^2(a-x)=x^3,\qquad y(x^2+y^2)=a(y^2-x^2).$$

4. 推导公式

$$\int \sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C,$$

$$\int \sin^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\sin nx}{n}+C,$$

$$\int \cos^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\cos^n x\sin nx}{n}+C,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$$\int \cos^{n-1} x \sin(n+1)x\,dx = -\frac{\cos^n x \cos nx}{n} + C.$$

〔Euler〕

5. 求下列两个伪椭圆积分:

$$\int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}, \qquad \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

6. 把下列积分约化为椭圆积分:

$$\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx(1+x^4)+cx^2(1+x^2)+dx^3}},$$

$$\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx^2(1+x^4)+cx^4}},$$

其中 $R(x)$ 表示有理函数。

7*. 设 a, b, c, d 是四次方程 $P(x)=0$ 的根。存在三个形如

$$x' = -\frac{M_i x'' + N_i}{L_i x'' + M_i}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

的对合关系，它们把这些根两两交换。如果有理函数 $f(x)$ 满足恒等式

$$f(x) + \sum_{i=1}^{3} f\left(-\frac{M_i x + N_i}{L_i x + M_i}\right) = 0,$$

那么积分

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx$$

是伪椭圆的（见 *Bulletin de la Société mathématique*, Vol. XV, p. 106）。

8. $y = Ax^\mu$ 型曲线的求长归结为一个二项微分的积分。讨论可积的各种情形。

9. 若 $a > 1$，证明

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

由此推出公式

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\pi.$$

10. 若 $A>0$ 且 $AC-B^2>0$，证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}\pi\frac{A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n-1/2}}.$$

〔应用 §104 的约化公式。〕

中译者校记（底本原误）。原题只写 $AC-B^2>0$；为使二次式在整条实轴上为正，并使所列实值公式成立，还必须有 $A>0$。例如 $A=C=-1, B=0, n=1$ 时，原条件成立而左端为 $-\pi$，足见这一条件不能省略。

11. 计算定积分

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+2a\cos x+a^2}.$$

12. 推导下列公式:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\log\left(\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}\right),\qquad \alpha\beta>0.$$

中译者校记（底本原误）。原题只写 $\alpha\beta>0$，不足以保证上面的实对数表达式在所有参数范围内都按原样成立。最常用且无歧义的情形是 $|\alpha|<1$、$|\beta|<1$ 且 $\alpha\beta>0$。若 $|\alpha|,|\beta|>1$，应把对数中的比值取绝对值；若一个参数在单位区间内而另一个在外，则须先提取较大参数并改用其倒数。第二式也须避开 $\alpha\beta=1$ 以及使分母为零的端点情形。

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)\,dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}.$$

13*. 推导公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin(m\pi/n)},$$

其中 m, n 是正整数，且 $m<n$。〔把被积函数分解成部分分式。〕

14. 由前一题推出公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi},\qquad 0<\alpha<1.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

15. 令

$$I_{p,q} = \int t^q (t+1)^p \, dt.$$

推出约化公式

$$(p+q+1)I_{p,q} = t^{q+1}(t+1)^p + pI_{p-1,q},$$

$$(p-1)I_{-p,q} = t^{q+1}(t+1)^{1-p} - (2+q-p)I_{-p+1,q},$$

以及两个降低指数 q 的类似公式。

16. 为下列积分导出约化公式：

$$I_n = \int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}, \qquad Z_m = \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

17*. 为积分

$$\int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

导出一个约化公式。由此为定积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

推出一个类似于 Wallis 公式的公式。

18. 定积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$$

是否有有限值?

19. 证明：由焦轴和从焦点引出的矢径所围成的椭圆扇形，其面积为

$$A = \frac{p^2}{2} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{(1+e\cos\omega)^2},$$

其中 p 表示半通径 b^2/a，e 表示离心率。应用一般方法，依次作代换

$$\tan\frac{\omega}{2} = t, \qquad t = u\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

并证明所论面积为

$$A = ab\left(\arctan u - e\frac{u}{1+u^2}\right).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

还要证明，这个表达式可以写成

$$A = \frac{ab}{2}(\phi - e\sin\phi),$$

其中 ϕ 是偏近点角，而 ω 是真近点角。由前面的代换可直接看出

$$u = \tan\frac{\phi}{2}, \qquad \phi = 2\arctan u, \qquad \sin\phi = \frac{2u}{1+u^2},$$

因而最后一个表达式立即由前式得到。

中译者校记（底本原误）。 1904 年英译本此处回引“p. 406”，但该英译卷现存版本的印刷第 406 页并不包含这一关系；本译稿因此不保留一个无法落实的页码跳转，而直接写出所需的半角关系。

20. 求使距离 NT 或三角形 MNT 的面积为常数的曲线（见图 3）。作出曲线的两个分支。〔巴黎 Licence 考试，1880；Toulouse，1882。〕

21*. 令

$$A_n = \frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n\cos(xz)\,dz.$$

推出递推公式

$$A_{n+1} = (2n+1)A_n - x\frac{dA_n}{dx}.$$

由此推出公式

$$A_{2p} = U_{2p}\sin x + V_{2p}\cos x, \qquad A_{2p+1} = U_{2p+1}\sin x + V_{2p+1}\cos x,$$

其中 $U_{2p}, V_{2p}, U_{2p+1}, V_{2p+1}$ 是具有整数系数的多项式，并且 U_{2p} 与 U_{2p+1} 都不含 x 的奇次幂。容易证明这些公式在 $n=1$ 时成立；一般情形由上面的递推公式推出。

A_{2p} 的公式使我们能够证明 π^2 是无理数（按原文术语，即与 1 不可公度）。事实上，假定

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{b}{a},$$

再在 A_{2p} 中以 $\pi/2$ 代替 x，便得到形如

$$H_1 = a^\nu\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{(b/a)^{2p}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 4p}\int_0^1 (1-z^2)^{2p}\cos\frac{\pi z}{2}\,dz$$

的关系，其中 H_1 是整数。但是这样的方程不可能成立，因为当 p 无限增大时，右端趋近于零。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 6 章

二重积分

I. 二重积分；计算方法；Green 定理

120. 二元连续函数

设 $z=f(x,y)$ 是两个自变量 x,y 的函数，它在平面上由闭轮廓 C 围成的区域 A 内部以及轮廓本身上都连续。对于这个函数，可以证明若干同 §70 中为一元连续函数所证明的命题相类似的命题。例如，任给正数 ε，总可以把区域 A 分成若干子区域，使得同一子区域中任意两点 $(x,y),(x',y')$ 处的 z 值之差小于 ε。

我们始终用如下的逐次细分来进行。设通过作一组组分别平行于两条坐标轴、彼此间距都等于 δ 的直线，把区域 A 分成若干子区域。所得的 A 的各个部分，或者是完全位于 C 内部的边长为 δ 的正方形，或者是部分由 C 的一段弧所围成的正方形的一部分。假如上述命题对整个区域 A 不成立，那么它至少也对某一个子区域不成立，设这个子区域为 A_1。以同样方式细分 A_1，并无限继续下去，就得到一列正方形或正方形的一部分

$$A, A_1, \ldots, A_n, \ldots,$$

命题对其中每一个都不成立。区域 A_n 位于两条平行于 y 轴的直线 $x=a_n, x=b_n$ 之间，以及两条平行于 x 轴的直线 $y=c_n, y=d_n$ 之间。当 n 无限增大时，a_n 与 b_n 趋近于同一个极限 λ，c_n 与 d_n 趋近于同一个极限 μ；因为例如数 a_n 从不减小，并且始终小于一个固定数。于是，A_n 的所有点都趋近于一个极限点 (λ,μ)，这个点位于轮廓 C 的内部或轮廓本身上。以下推理同 §70 中的推理相似：如果所陈述的定理不成立，就能证明函数 $f(x,y)$ 在点 (λ,μ) 不连续，这

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

同假设矛盾。

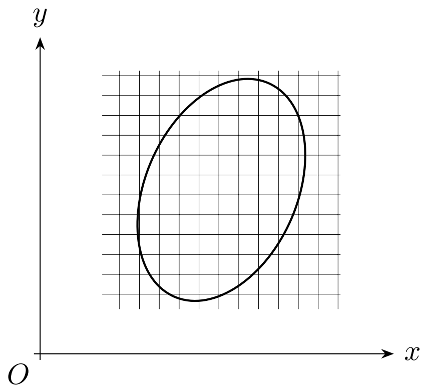


图 23

推论。假设这些平行线取得如此接近，以致任一子区域中任意两个 z 值之差小于 $\varepsilon/2$；并设相邻平行线之间的距离为 η。令 (x, y) 与 (x', y') 是轮廓 C 内部或轮廓上的两点，并且两点间的距离小于 η。这两点或者位于同一子区域中，或者位于具有一个公共顶点的两个不同子区域中。无论哪一种情形，差

$$f(x, y) - f(x', y')$$

的绝对值都不超过 $2\varepsilon/2 = \varepsilon$。因此，任给一个正数 ε，总能找到另一个正数 η，使得

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon,$$

只要位于 A 内或轮廓 C 上的两点 $(x, y), (x', y')$ 之间的距离小于 η。换句话说，任何在 A 内及其边界 C 上连续的函数都是*一致连续的*。

由前面的定理可以像在 §70 中那样证明，每一个在 A 内（包括其边界）连续的函数，在 A 内必定有界。如果 M 是函数在 A 内的上确界，m 是其下确界，则差 $M - m$ 叫作函数的*振幅*。逐次细分法还使我们能够证明，函数在轮廓 C 的内部或其上至少各一次真正取得值 m 与 M。设 a 是一个使 $z = m$ 的点，b 是一个使 $z = M$ 的点，并用一条完全位于 C 内部的折线连接 a 与 b。以从 a 起沿这条折线量得的弧长为参数时，z 是这个参数的连续函数。因此，z 在这条折线上至少一次取得介于 m 与 M 之间的每一个值 μ（§70）。由于可以用无穷多条不同的折线连接 a 与 b，所以函数 $f(x, y)$ 在轮廓 C 内部的无穷多个点处取得介于 m 与 M 之间的每一个值。

如果能够找到一个半径为 l 的圆，完全包围平面上的一个有限区域 A，就说区域 A 在它的一切尺度上都小于 l。如果对于任意预先指定的半径，最终总能找到一个具有该半径的圆，把平面上的一个变区域完全包含在内，就说这个变区域在它的一切尺度上都是无穷小的。例如，边长趋近于零的正方形，或者两条轴都趋近于零的椭圆，在一切尺度上都是无穷小的。另一方面，只有一条边趋近于零的矩形，或者只有一条轴趋近于零的椭圆，并不在一切尺度上都是无穷小的。

121. 二重积分

把平面区域 A 以任意方式分成子区域 $a_1, a_2, \ldots, a_n$；设 ω_i 是子区域 a_i 的面积，M_i, m_i 分别是 $f(x,y)$ 在 a_i 中的上确界与下确界。考察两个和

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i M_i, \qquad s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i m_i.$$

对于 A 的每一种特定分割，这两个和各有一个确定值。所有的和 S 都不小于 $m\Omega$，[1]其中 Ω 是平面区域 A 的面积，m 是 $f(x,y)$ 在区域 A 中的下确界；因此这些和 S 有一个下确界 I。同样，所有的和 s 都不大于 $M\Omega$，其中 M 是 $f(x,y)$ 在区域 A 中的上确界；所以这些和有一个上确界 I'。而且可以像在 §71 中那样证明，任一个和 S 都大于或等于任一个和 s；因此

$$I \geq I'.$$

如果函数 $f(x,y)$ 连续, 那么当每一个子区域在它的一切尺度上都趋近于零时, 和 S 与 s 趋近于同一个极限。事实上, 设 η 是一个正数, 使得在任何一切尺度都小于 η 的 A 的部分中, 函数的振幅小于 ε。如果每一个子区域 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 在它的一切尺度上都小于 η，那么每一个差 $M_i - m_i$ 都小于 ε，从而差 $S - s$ 小于 $\varepsilon\Omega$，其中 Ω 表示 A 的总面积。但

$$S - s = S - I + I - I' + I' - s,$$

并且量 $S - I, I - I', I' - s$ 中没有一个能为负。因此特别有 $I - I' < \varepsilon\Omega$；由于 ε 是任意正数，便有 $I = I'$。而且，通过适当选择 ε，数 $S - I$ 与 $I - s$ 中每一

[1]如果 $f(x,y)$ 是常数 k，则 $M_i = m_i = M = m = k$，并且 $S = s = m\Omega = M\Omega$。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

个都能小于任意预先指定的数。因此，和 S 与 s 有一个共同极限 I，称为函数 $f(x,y)$ 在区域 A 上的*二重积分*。它用符号

$$I=\iint_{(A)} f(x,y)\,dx\,dy$$

表示；区域 A 叫作*积分区域*。

如果 (ξ_i,η_i) 是子区域 a_i 内部或其边界上的任一点，显然和

$$\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\omega_i$$

位于两个和 S 与 s 之间，或者等于其中一个。因此，不论怎样选择点 (ξ_i,η_i)，当各子区域趋近于零时，这个和也以二重积分为极限。

积分第一中值定理可以毫无困难地推广到二重积分。设 $f(x,y)$ 是在 A 中连续的函数，$\phi(x,y)$ 是另一个连续函数，并且在整个 A 中保持同号。为明确起见，假设 $\phi(x,y)$ 在 A 中为正。如果 M,m 是 $f(x,y)$ 在 A 中的上确界与下确界，显然有[2]

$$M\phi(\xi_i,\eta_i)\omega_i \geq f(\xi_i,\eta_i)\phi(\xi_i,\eta_i)\omega_i \geq m\phi(\xi_i,\eta_i)\omega_i.$$

把所有这些不等式相加并转到极限，得到

$$\iint_{(A)} f(x,y)\phi(x,y)\,dx\,dy=\mu\iint_{(A)}\phi(x,y)\,dx\,dy,$$

其中 μ 位于 M 与 m 之间。由于函数 $f(x,y)$ 在区域 A 内（包括边界 C）的某一点 (ξ,η) 处取得值 μ，可把它写成

$$\iint_{(A)} f(x,y)\phi(x,y)\,dx\,dy=f(\xi,\eta)\iint_{(A)}\phi(x,y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

这就是二重积分的中值定理。如果例如 $\phi(x,y)=1$，则右端的积分 $\iint dx\,dy$ 在区域 A 上显然等于该区域的面积 Ω。此时公式 (1) 成为

$$\iint_{(A)} f(x,y)\,dx\,dy=\Omega f(\xi,\eta). \tag{2}$$

[2]如果 $f(x,y)$ 是常数 k，则 $M=m=k$，这些不等式都变成等式；但下面的公式仍成立，并且 $\mu=k$。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

122. 体积

同二重积分这个解析概念相对应的是重要的几何概念——体积。设 $f(x,y)$ 是在闭轮廓 C 内部和轮廓上连续的函数。为明确起见，还假定这个函数为正。设 S 是方程 $z=f(x,y)$ 所表示的曲面的一部分，它由一条曲线 Γ 所围，而 Γ 在 xy 平面上的投影就是轮廓 C。以 E 表示由 xy 平面、曲面 S 以及以 C 为正截面的柱面所围成的空间部分。

把 xy 平面上由轮廓 C 围成的区域 A 以任意方式细分，设 a_i 是由轮廓 c_i 围成的一个子区域，ω_i 是它的面积。以曲线 c_i 为正截面的柱面，从曲面 S 上截出由曲线 γ_i 围成的一部分 s_i。设 p_i,P_i 是 s_i 上到 xy 平面的距离分别为最小与最大的点。通过这两点作平行于 xy 平面的平面，就得到两个具有同一底面积 ω_i 的直柱体，它们的高度分别由函数 $f(x,y)$ 在轮廓 c_i 内的下确界 m_i 与上确界 M_i 给出。相应的下、上柱体体积分别是 $v_i=\omega_i m_i$ 与 $V_i=\omega_i M_i$。[3]因而，前面所考察的和 S 与 s，分别表示这两类柱体体积之和 $\sum V_i$ 与 $\sum v_i$。我们把这两个和的共同极限叫作空间部分 E 的体积。像面积的情形（§78）一样可以指出，这个定义同体积的通常概念相合。

如果曲面 S 有一部分位于 xy 平面之下，只要约定给位于 xy 平面以下的空间部分的体积附以负号，二重积分仍表示一个体积。于是，每一个二重积分都表示体积的代数和，正如单积分表示面积的代数和。单积分中的积分限，在二重积分中由围住积分区域的轮廓所代替。

123. 二重积分的计算

二重积分的计算可以化为依次计算两个单积分。先考察积分区域是矩形 R 的情形；这个矩形由直线

$$x=x_0,\quad x=X,\quad y=y_0,\quad y=Y$$

所围，其中 $x_0<X,y_0<Y$。设用平行于两轴的直线

$$x=x_i,\qquad y=y_k\quad (i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,m)$$

[3]所谓直柱体的体积，我们理解为如下极限：取同高的直棱柱，其底面是内接于柱体正截面的多边形；当这个多边形的每一边都趋近于零时，该直棱柱的体积所趋近的极限。〔这个定义对论证并非必需，但有助于说明这里的一般体积定义同通常概念相合。——英译者〕

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

细分这个矩形。由直线 $x=x_{i-1}, x=x_i, y=y_{k-1}, y=y_k$ 所围成的小矩形 R_{ik} 的面积是

$$(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1}).$$

因此，二重积分是下列和的极限:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_{ik},\eta_{ik})(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1}), \tag{3}$$

其中 (ξ_{ik},η_{ik}) 是 R_{ik} 内部或其任一边上的任一点。

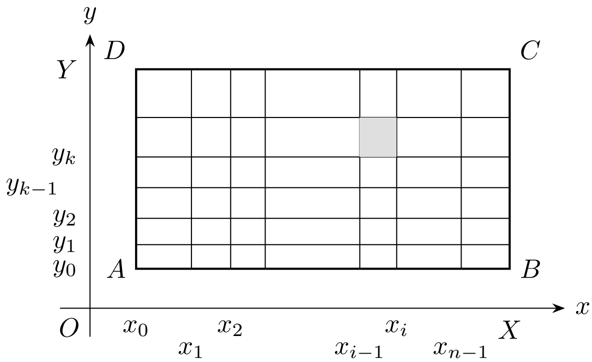


图 24

我们利用点 (ξ_{ik},η_{ik}) 的任意性来简化计算。先注意: 如果 $f(x)$ 是区间 (a,b) 中的连续函数, 并且把区间 (a,b) 以任意方式细分, 那么在每个子区间 (x_{i-1},x_i) 中都能找到一个值 ξ_i，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}). \tag{4}$$

事实上，只需把积分中值定理分别用于各子区间

$$(a,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},b)$$

即可得到这些 ξ_i 值。

现在，和 S 中来自直线 $x=x_{i-1}$ 与 $x=x_i$ 之间那一列矩形的部分为

$$(x_i-x_{i-1})\big[f(\xi_{i1},\eta_{i1})(y_1-y_0)+f(\xi_{i2},\eta_{i2})(y_2-y_1)+\cdots \\ +f(\xi_{ik},\eta_{ik})(y_k-y_{k-1})+\cdots\big].$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

令

$$\xi_{i1} = \xi_{i2} = \cdots = \xi_{im} = x_{i-1},$$

然后选择 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots$，使得和

$$f(x_{i-1}, \eta_{i1})(y_1 - y_0) + f(x_{i-1}, \eta_{i2})(y_2 - y_1) + \cdots$$

等于积分

$$\int_{y_0}^{Y} f(x_{i-1}, y)\, dy,$$

这里在计算积分时把 x_{i-1} 看成常数。对由相邻两条平行于 y 轴的直线所围的每一列矩形都照此处理，最后得到

$$\begin{aligned} S = {} & \Phi(x_0)(x_1 - x_0) + \Phi(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots \\ & + \Phi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \cdots, \end{aligned} \tag{5}$$

其中为简便起见记

$$\Phi(x) = \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy.$$

这个由定积分定义的函数 $\Phi(x)$，其中 x 被看作参数，是 x 的连续函数。当所有区间 $x_i - x_{i-1}$ 都趋近于零时，公式 (5) 表明 S 趋近于定积分

$$\int_{x_0}^{X} \Phi(x)\, dx.$$

所以所论二重积分由公式

$$\iint_{(R)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy \tag{6}$$

给出。换句话说，为计算这个二重积分，应先把 x 看作常数、y 看作变量，在限 y_0 与 Y 之间对函数 $f(x, y)$ 积分；然后再把所得的、只依赖于 x 的函数在限 x_0 与 X 之间积分。

如果按照相反的次序进行，也就是先计算和 S 中来自相邻两条平行于 x 轴的直线之间一行矩形的部分，就得到类似公式

$$\iint_{(R)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

比较这两个公式，得到新公式

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx,$$

称为*累次积分换序*公式（原文称为“积分号下积分公式”）。证明中的一个本质前提是：限 x_0, X, y_0, Y 都是常数，并且函数 $f(x,y)$ 在整个积分区域内连续。

例。设 $z = xy/a$。一般公式给出

$$\begin{aligned}\iint_{(R)} \frac{xy}{a}\,dx\,dy &= \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{xy}{a}\,dy \\ &= \int_{x_0}^{X} \frac{x}{2a}(Y^2 - y_0^2)\,dx = \frac{1}{4a}(X^2 - x_0^2)(Y^2 - y_0^2).\end{aligned}$$

一般地，如果函数 $f(x,y)$ 是一个只依赖于 x 的函数同一个只依赖于 y 的函数的乘积，就有

$$\iint_{(R)} \phi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \left(\int_{x_0}^{X} \phi(x)\,dx\right)\left(\int_{y_0}^{Y} \psi(y)\,dy\right).$$

右端的两个积分彼此完全独立。

Franklin[4] 从这个说明推出了 Chebyshev 若干有趣定理的一个很简单的证明。设 $\phi(x), \psi(x)$ 是区间 (a,b) 中的两个连续函数，其中 $a < b$。那么二重积分

$$\iint [\phi(x) - \phi(y)][\psi(x) - \psi(y)]\,dx\,dy$$

在由直线 $x = a, x = b, y = a, y = b$ 围成的正方形上取值，等于差

$$2(b-a)\int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx - 2\left(\int_a^b \phi(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \psi(x)\,dx\right).$$

但是，如果函数 $\phi(x), \psi(x)$ 总是同时增加或同时减小，或者其中一个总在另一个减小时增加，那么上面二重积分的所有元素都同号。在第一种情形中，两个函数 $\phi(x) - \phi(y)$ 与 $\psi(x) - \psi(y)$ 总是同号；在第二种情形中，它们总是异号。因此，当两个函数 $\phi(x), \psi(x)$ 在整个区间 (a,b) 内都增加或都减小时，有

$$(b-a)\int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx \geq \left(\int_a^b \phi(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \psi(x)\,dx\right).$$

[4] *American Journal of Mathematics*, Vol. VII, p. 77.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

另一方面，当一个函数在整个区间内增加而另一个减小时，有

$$(b-a)\int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx \le \left(\int_a^b \phi(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \psi(x)\,dx\right).$$

若两个函数在一个正长度子区间上都严格单调，且都不是常函数，则相应不等式为严格不等式；一般单调情形必须保留等号的可能性。

中译者校记（底本原误）。原书在上述两式中使用严格不等号；但只要其中一个函数为常数便出现等号，故一般结论应写成非严格不等式。

当 $\phi(x)=\psi(x)$ 时，二重积分的符号也完全确定，因为此时被积函数成为完全平方。因此，无论函数 $\phi(x)$ 怎样，总有

$$(b-a)\int_a^b [\phi(x)]^2\,dx \ge \left[\int_a^b \phi(x)\,dx\right]^2,$$

并且等号只能在 $\phi(x)$ 为常数时成立。

由此可以推出变分法中一个有趣问题的解。设 P, Q 是平面内两个定点，其坐标分别为 $(a, A), (b, B)$。设 $y=f(x)$ 是连接这两点的任意曲线的方程，并假定 $f(x)$ 及其一阶导数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 中连续。问题是: 在所有曲线 $y=f(x)$ 中，找出使积分

$$\int_a^b y'^2\,dx$$

最小的那一条。把刚才的公式中的 $\phi(x)$ 换成 y', 并注意按假设 $f(a)=A, f(b)=B$，就有

$$(b-a)\int_a^b y'^2\,dx \ge (B-A)^2.$$

所以积分的最小值是 $(B-A)^2/(b-a)$；当 y' 为常数，也就是连接两个定点的曲线退化为直线 PQ 时，这个值确实取得。

124.　一般积分区域

现在转向积分区域由任意形状的轮廓所围成的情形。先假设任何一条平行于 y 轴的直线同这个轮廓至多相交于两点。于是可以假定轮廓由两条直线 $x=a, x=b$（$a<b$）以及两段曲线弧 $APB, A'QB'$ 组成；它们的方程分别是

$$Y_1=\phi_1(x), \qquad Y_2=\phi_2(x),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中函数 ϕ_1, ϕ_2 在 a 与 b 之间连续。点 A, A' 可以重合，点 B, B' 也可以重合，或者两对点都重合；例如轮廓是椭圆那样的凸曲线时就是如此。再次用平行于坐标轴的直线细分积分区域 R。这样得到两类子区域：若它是完全位于轮廓内部的矩形，就叫作规则子区域；若它是部分由轮廓弧所围成的矩形的一部分，就叫作不规则子区域。问题仍归结为求和

$$S = \sum f(\xi, \eta)\omega$$

的极限，其中 ω 是任一子区域的面积，(ξ, η) 是该子区域中的一点。

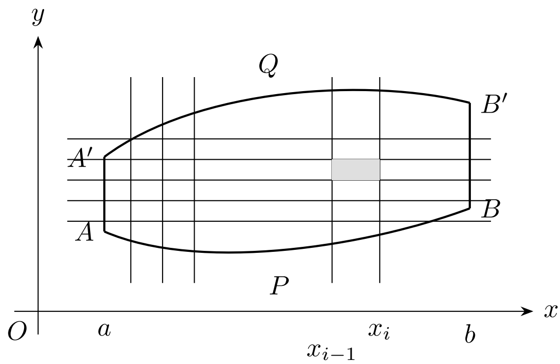


图 25

先计算和 S 中来自相邻平行线 $x = x_{i-1}, x = x_i$ 之间那一列子区域的部分。这些子区域中有若干规则子区域，从一个纵坐标为 $y' \geq Y_1$ 的顶点开始，到一个纵坐标为 $y'' \leq Y_2$ 的顶点为止；此外还有若干不规则子区域。在每一个矩形中适当选择一点 (ξ, η)，像上面一样可知，S 中来自这些规则矩形的部分可以写成

$$(x_i - x_{i-1}) \int_{y'}^{y''} f(x_{i-1}, y)\, dy.$$

假设函数 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 中每一个在每个区间 (x_{i-1}, x_i) 内的振幅都小于 δ，并且每一个差 $y_k - y_{k-1}$ 也小于 δ。于是容易看出，$x = x_{i-1}$ 与 $x = x_i$ 之间所有不规则子区域的总面积小于

$$4\delta(x_i - x_{i-1}),$$

并且 S 中来自这些区域的部分，其绝对值小于

$$4H\delta(x_i - x_{i-1}),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 H 是 $|f(x,y)|$ 在整个积分区域中的一个上界。另一方面，有

$$\int_{y'}^{y''} f(x_{i-1},y)\,dy = \int_{Y_1}^{Y_2} f(x_{i-1},y)\,dy + \int_{y'}^{Y_1} f(x_{i-1},y)\,dy + \int_{Y_2}^{y''} f(x_{i-1},y)\,dy.$$

由于 $|Y_1-y'|$ 与 $|Y_2-y''|$ 都小于 2δ，可以写成

$$\int_{y'}^{y''} f(x_{i-1},y)\,dy = \int_{Y_1}^{Y_2} f(x_{i-1},y)\,dy + 4H\lambda\delta, \qquad |\lambda|<1.$$

因而，S 中来自所考察的这一列子区域的部分可写成

$$(x_i-x_{i-1})\left[\int_{Y_1}^{Y_2} f(x_{i-1},y)\,dy + 8H\theta_i\delta\right],$$

其中 θ_i 位于 -1 与 $+1$ 之间。和

$$8H\delta\sum_i \theta_i(x_i-x_{i-1})$$

的绝对值小于 $8H\delta(b-a)$，并随可以取得任意小的 δ 一同趋近于零。因此，二重积分是下列和的极限：

$$\Phi(a)(x_1-a)+\cdots+\Phi(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})+\cdots,$$

其中

$$\Phi(x)=\int_{Y_1}^{Y_2} f(x,y)\,dy.$$

于是得到公式

$$\iint_{(R)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_{Y_1}^{Y_2} f(x,y)\,dy. \tag{7}$$

在第一次积分中，x 应当看作常数；但是积分限 Y_1,Y_2 本身是 x 的函数，而不是常数。

例。计算函数 xy/a 在由两坐标轴及圆周

$$x^2+y^2-R^2=0$$

围成的四分之一圆内部上的二重积分。x 的积分限是 0 与 R；当 x 固定时，y 从 0 变到 $\sqrt{R^2-x^2}$。所以积分为

$$\begin{aligned}\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{xy}{a}\,dy &= \int_0^R \frac{x}{2a}\left[y^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx\\ &= \int_0^R \frac{x(R^2-x^2)}{2a}\,dx.\end{aligned}$$

最后一个积分的值容易算得为 $R^4/(8a)$。

当积分区域由任意形状的轮廓所围时，可以把它分成若干部分，使每一部分的边界至多在两点被一条平行于 y 轴的直线所截。也可以把它分成若干部分，使每一部分的边界至多在两点被任一平行于 x 轴的直线所截，并且先对 x 积分。例如，考虑一条位于由直线

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

组成的矩形内部的凸闭曲线；曲线上分别有四点 A, B, C, D，在这些点处 x 或 y 取得最小值或最大值。[5]设 $y_1 = \phi_1(x), y_2 = \phi_2(x)$ 分别是两段弧 ACB, ADB 的方程，$x_1 = \psi_1(y), x_2 = \psi_2(y)$ 分别是两段弧 CAD, CBD 的方程。函数 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 在 a 与 b 之间连续，函数 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 在 c 与 d 之间连续。对一个在这个轮廓内部连续的函数 $f(x, y)$，二重积分可以用两种方式计算。令所得两值相等，得到公式

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx. \tag{8}$$

显然，这两个积分中的积分限完全不同。每一条凸闭轮廓都给出一个这样的公式。例如，取由直线 $y = 0, x = a, y = x$ 所围的三角形作为积分区域，就得到归于 Lejeune Dirichlet 的公式

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

125.　与单积分的类比

把积分

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

看作 x 的函数，它的导数是 $f(x)$。二重积分也有一个类似的定理。设 $f(x, y)$ 是在由直线

$$x = a, \quad x = A, \quad y = b, \quad y = B$$

围成的矩形内部连续的函数，其中 $a < A, b < B$。把 $f(x, y)$ 的二重积分取在由直线 $x = a, x = X, y = b, y = Y$ 所围成的矩形上, 其中 $a < X < A, b < Y < B$;

[5]建议读者作图。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

它是可变顶点坐标 X, Y 的函数，即

$$F(X,Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x,y)\,dy.$$

令

$$\Phi(x)=\int_b^Y f(x,y)\,dy,$$

先对 X 求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\Phi(X)=\int_b^Y f(X,y)\,dy.$$

再对 Y 求导，得到公式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y}=f(X,Y). \tag{9}$$

满足方程 (9) 的最一般函数 $u(X,Y)$，显然是把一个满足 $\partial^2 z/\partial X\partial Y=0$ 的函数 z 加到 $F(X,Y)$ 上所得。因此，它具有形式

$$u(X,Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x,y)\,dy+\phi(X)+\psi(Y), \tag{10}$$

其中 $\phi(X),\psi(Y)$ 是两个任意函数（见 §38）。可以确定这两个任意函数，使 $u(X,Y)$ 在 $X=a$ 时化为一个给定函数 $V(Y)$，并在 $Y=b$ 时化为另一个给定函数 $U(X)$；这里两组边界数据在公共角点必须满足相容条件 $U(a)=V(b)$。在前式中先令 $X=a$，再令 $Y=b$，得到两个条件

$$V(Y)=\phi(a)+\psi(Y),\qquad U(X)=\phi(X)+\psi(b),$$

由此

$$\psi(Y)=V(Y)-\phi(a),\qquad \psi(b)=V(b)-\phi(a),$$

$$\phi(X)=U(X)-V(b)+\phi(a),$$

中译者说明。原书没有明说角点相容条件。若 $U(a)\neq V(b)$，就不存在同时满足 $u(X,b)=U(X)$ 与 $u(a,Y)=V(Y)$ 的连续函数。

而公式 (10) 变为

$$u(X,Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x,y)\,dy+U(X)+V(Y)-V(b). \tag{11}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

反过来，如果用任意方法找到了一个满足方程 (9) 的函数 $u(X,Y)$，用同上相似的方法容易证明，二重积分的值由公式

$$\int_a^X dx \int_b^Y f(x,y)\,dy = u(X,Y) - u(X,b) \\ - u(a,Y) + u(a,b) \tag{12}$$

给出。这个公式同 §76 中的基本公式 (6) 类似。

下面的公式在某种意义上类似于分部积分公式。设 A 是平面上由一条或多条任意形状曲线所围成的有限区域。一个在 A 内连续的函数 $f(x,y)$ 在它的最小值 v_0 与最大值 V 之间变化。设想画出等值线

$$f(x,y) = v,$$

其中 v 位于 v_0 与 V 之间；并假设我们能够求出 A 中满足 $f(x,y)$ 位于 v_0 与 v 之间的那一部分的面积。这个面积是一个随 v 增大的函数 $F(v)$，而两条相邻等值线之间的面积为

$$F(v+\Delta v) - F(v) = \Delta v\, F'(v+\theta\Delta v).$$

如果用连接这两条等值线的线段把这部分面积分成无穷小部分，那么在每一部分中都能找到一点 (ξ,η)，使得

$$f(\xi,\eta) = v + \theta\Delta v.$$

因此，二重积分 $\iint f\,dx\,dy$ 中来自这一区域的各元素之和为

$$(v+\theta\Delta v)F'(v+\theta\Delta v)\Delta v.$$

由此，二重积分等于和

$$\sum (v+\theta\Delta v)F'(v+\theta\Delta v)\Delta v$$

的极限，也就是单积分

$$\int_{v_0}^V vF'(v)\,dv = VF(V) - \int_{v_0}^V F(v)\,dv.$$

当积分区域由两条等值线

$$f(x,y) = v_0, \qquad f(x,y) = V$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所围成时，这个方法尤其方便。

例如，考虑二重积分

$$\iint \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

在圆 $x^2+y^2=1$ 的内部取值。令

$$v=\sqrt{1+x^2+y^2},$$

则积分区域由两条等值线 $v=1$ 与 $v=\sqrt{2}$ 所围；函数 $F(v)$ 是半径为 $\sqrt{v^2-1}$ 的圆的面积，故

$$F(v)=\pi(v^2-1).$$

因此，所给二重积分的值为[6]

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2\pi v^2\,dv=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

前面的公式容易推广到二重积分

$$\iint f(x,y)\phi(x,y)\,dx\,dy,$$

此时 $F(v)$ 表示二重积分 $\iint \phi(x,y)\,dx\,dy$ 在积分区域中由等值线 $v=f(x,y)$ 所围成的那一部分上的值。

126. Green 定理

如果函数 $f(x,y)$ 是一个已知函数关于 x 或 y 的偏导数，那么其中一次积分可以立即完成，只留下一个尚待计算的积分。这个非常简单的说明导出一个极为重要的公式，称为 Green 定理。以下假定 P,Q 在闭区域及其边界上连续，并且所用的一阶偏导数在该区域内连续。

先考察二重积分

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy,$$

它取在平面上由轮廓 C 所围成的区域上，并且任一平行于 y 轴的直线同 C 至多相交于两点（见 图 15）。

[6]这个方法的大量应用可见 Catalan 的一篇论文：*Journal de Liouville*, 1st series, Vol. IV, p. 233.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

设 A, B 是 C 上 x 分别取得最小值和最大值的点。位于 Aa 与 Bb 之间的一条平行于 y 轴的直线同 C 相交于两点 m_1, m_2，其纵坐标分别为 y_1, y_2。先对 y 积分后，二重积分可以写成

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy$$
$$= \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx.$$

但是两个积分

$$\int_a^b P(x, y_1)\,dx, \qquad \int_a^b P(x, y_2)\,dx$$

分别是沿弧 Am_1B 与 Am_2B 所取的线积分；所以前式可写成

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_C P\,dx, \tag{13}$$

其中线积分沿轮廓 C 按图中箭头所示方向取；所谓正向，是指沿轮廓前进时积分区域始终位于左侧，在通常直角坐标系中即为逆时针方向。要把公式推广到由任意轮廓围成的区域，应像在 §94 中那样进行：把给定区域分成若干部分，使每一部分满足前面的条件，并把公式用于每一部分。类似地容易得到相应公式

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_C Q\,dy, \tag{14}$$

其中线积分始终按同一方向取。由公式 (14) 减去公式 (13)，得到

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{15}$$

这里二重积分取在轮廓 C 所围成的区域上。这就是 Green 公式；它的应用极其重要。眼下只指出：令 $Q = x, P = -y$，就得到前面 §94 中把闭曲线面积表示为线积分的公式。

II. 变量代换；曲面面积

到目前为止，在计算二重积分时，我们总是假定用平行于两条坐标轴的直线，把积分域细分成无穷小矩形。现在我们要假定用任意两个曲线族来细分积分域。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

127. 预备公式

设 u, v 是某一平面内一点关于一组直角坐标轴的坐标，x, y 是同一平面或另一平面内另一点关于同样选取的一组直角坐标轴的坐标。公式

$$x = f(u, v), \qquad y = \phi(u, v) \tag{16}$$

在两个平面的点之间建立某种对应。我们作如下假设: 1) 函数 $f(u, v)$ 与 $\phi(u, v)$，连同它们的一阶偏导数，对于 uv 平面上位于轮廓 C_1 所围区域 A_1 内部或边界上的一切点 (u, v) 都连续；2）方程 (16) 把 uv 平面的区域 A_1 变为 xy 平面中由轮廓 C 所围的区域 A，并且两个区域之间以及两个轮廓之间都存在一一对应，使 A 的任一点恰好对应于 A_1 的一个点；3）函数行列式

$$\Delta = \frac{D(f, \phi)}{D(u, v)}$$

在 C_1 内部不变号，虽然它可以在 A_1 的某些点处为零。

可能出现两种情形。当点 (u, v) 按正向描绘轮廓 C_1 时，点 (x, y) 或者按正向、或者按反向描绘轮廓 C，而在运动过程中从不改变方向。我们分别称这两种对应为*正向对应*（保向对应）和*反向对应*。

区域 A 的面积 Ω 由沿轮廓 C 正向取得的线积分

$$\Omega = \int_{(C)} x\,dy$$

给出。用 (16) 所定义的新变量 u, v 表示，这个积分成为

$$\Omega = \pm \int_{(C_1)} f(u, v)\,d\phi(u, v),$$

其中新积分沿轮廓 C_1 正向取得；对应为正向时取正号，对应为反向时取负号。对新积分应用 Green 定理，令 $x = u, y = v$，并取

$$P = f\frac{\partial \phi}{\partial u}, \qquad Q = f\frac{\partial \phi}{\partial v},$$

就有

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \Delta = \frac{D(f, \phi)}{D(u, v)}.$$

因而

$$\Omega = \pm \iint_{(A_1)} \frac{D(f, \phi)}{D(u, v)}\,du\,dv,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

再对二重积分应用中值定理，得到

$$\Omega = \pm\Omega_1 \frac{D(f,\phi)}{D(\xi,\eta)}, \tag{17}$$

其中 (ξ,η) 是轮廓 C_1 内部的一点，Ω_1 是 uv 平面中区域 A_1 的面积。显然，应按 Δ 本身为正或为负分别取正号或负号。因此，*对应按 Δ 为正或为负分别是正向的或反向的*。

公式 (17) 还在函数行列式与通常导数之间建立了一个类比。事实上，设区域 A_1 在所有维度上趋近于零，并且它的一切点都趋近于极限点 (u,v)。于是区域 A 也有同样性质，而两个面积之比 Ω/Ω_1 以行列式 Δ 的绝对值为极限。通常导数是两个线性无穷小之比的极限；同样，函数行列式是两个无穷小面积之比的极限。从这个观点看，公式 (17) 就是导数中值公式的对应形式。

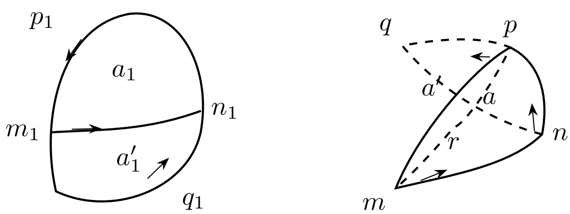


图 26

说明。关于 A 与 A_1 之间对应所作的各项假设并非彼此独立。首先，为了使对应是一一的，Δ 在 uv 平面的区域 A_1 内不变号是必要的。事实上，假设 Δ 沿一条曲线 γ_1 为零，而这条曲线把 A_1 中 Δ 为正的部分与 Δ 为负的部分分开。取 γ_1 的一小段弧 m_1n_1，以及 A_1 中包含这段弧的一个小部分。这个部分由两个区域 a_1 与 a'_1 组成，它们被 m_1n_1 分开（图 26）。

当点 (u,v) 描绘 Δ 为正的区域 a_1 时，点 (x,y) 描绘一个由轮廓 $mnpm$ 所围的区域 a，而两个轮廓 $m_1n_1p_1m_1$ 与 $mnpm$ 同时按正向描绘。当点 (u,v) 描绘 Δ 为负的区域 a'_1 时，点 (x,y) 描绘一个区域 a'；当 $n_1m_1q_1n_1$ 按正向描绘时，a' 的轮廓 $nmqr$ 按反向描绘。因此，区域 a' 必须覆盖区域 a 的一部分。于是，对于公共部分 nrm 中任一点 (x,y)，在 uv 平面中都有两个对应点，它们分别位于线 m_1n_1 的两侧。

例如，考虑变换

$$X = x, \qquad Y = y^2,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

此时 $\Delta = 2y$。如果点 (x, y) 描绘一个包围 x 轴上一段 ab 的闭区域，显然点 (X, Y) 描绘两个都位于 X 轴上方的区域，而这两个区域都以该轴上的同一线段 AB 为边界的一部分。把一张画有直线的纸沿这条直线折叠起来，就能清楚地说明点 (X, Y) 所描绘区域的性质。

Δ 在整个 A_1 内保持同号，并不足以保证一一对应。在例子

$$X = x^2 - y^2, \qquad Y = 2xy$$

中，雅可比行列式 $\Delta = 4(x^2 + y^2)$ 始终为正。但是，若 (r, θ) 与 (R, ω) 分别是点 (x, y) 与 (X, Y) 的极坐标，则变换公式可写成

$$R = r^2, \qquad \omega = 2\theta.$$

当 r 从 a 变到 b（$a < b$），而 θ 从 0 变到 $\pi + \alpha$（$0 < \alpha < \pi/2$）时，点 (R, ω) 描绘一个由半径为 a^2 与 b^2 的两个圆所界的圆环。但是，对于 0 与 2α 之间的每一个角 ω，都有两个对应的 θ 值：一个在 0 与 α 之间，另一个在 π 与 $\pi + \alpha$ 之间。把纸制圆环的一部分重叠起来，就可以实现点 (X, Y) 所描绘的区域。

128. 二重积分的变换：第一种方法

保留上面关于区域 A, A_1 和公式 (16) 所作的假设，设 $F(x, y)$ 是区域 A 内的连续函数。区域 A_1 的任一细分

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

对应于区域 A 的一个细分

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

设 ω_i 与 σ_i 分别是两个对应子区域 a_i 与 α_i 的面积。由公式 (17)，有

$$\omega_i = \sigma_i \left| \frac{D(f, \phi)}{D(u_i, v_i)} \right|,$$

其中 u_i, v_i 是区域 α_i 内某一点的坐标。这个点 (u_i, v_i) 对应于区域 a_i 中的点

$$x_i = f(u_i, v_i), \qquad y_i = \phi(u_i, v_i).$$

因此，令

$$\Phi(u, v) = F[f(u, v), \phi(u, v)],$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

便可写成

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi(u_i, v_i) \left| \frac{D(f, \phi)}{D(u_i, v_i)} \right| \sigma_i.$$

转到极限，得到公式

$$\iint_{(A)} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(A_1)} F[f(u, v), \phi(u, v)] \left| \frac{D(f, \phi)}{D(u, v)} \right| du\, dv. \tag{18}$$

因此，*在二重积分中作变量代换时，应把* x, y *换成它们关于新变量* u, v *的值，并把* $dx\, dy$ *换成* $|\Delta| du\, dv$。新积分域的确定方法我们已经说明过了。

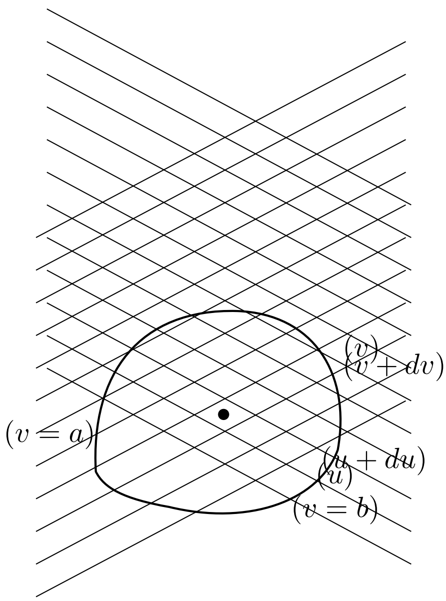


图 27

为了确定计算新二重积分时两次积分所应采用的积分限，一般并不需要作出新积分域 A_1 的轮廓 C_1。事实上，把 u, v 看作一个曲线坐标系，并在公式 (16) 中保持 u, v 中一个不变而让另一个变化，就得到两个曲线族

$$u = 常数, \qquad v = 常数.$$

由前面的假设，区域 A 中任一点恰有这两个曲线族中的各一条曲线通过。为明确起见，假设曲线族 $v =$ 常数 中的一条曲线至多在两点 M_1, M_2 截轮廓 C，而这两点分别对应于 u 的值 u_1, u_2（$u_1 < u_2$）；又假设所有同轮廓 C 相交的 (v)

曲线都位于两条曲线 $v = a$ 与 $v = b$ 之间（$a < b$）。在这种情形，应先对 u 积分：保持 v 不变，让 u 从 u_1 变到 u_2，其中 u_1, u_2 一般都是 v 的函数；然后把所得结果在积分限 a, b 之间积分。因此，二重积分等于

$$\int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} F[f(u,v), \phi(u,v)]|\Delta|\, du.$$

变量代换在本质上就是利用两个曲线族 (u) 与 (v) 来细分积分域。设 ω 是由曲线

$$(u), \quad (u+du), \quad (v), \quad (v+dv)$$

所围成的曲边四边形的面积，其中 du, dv 为正。这个四边形在 uv 平面中对应于一个边长为 du, dv 的矩形。于是由公式 (17),

$$\omega = |\Delta(\xi, \eta)|\, du\, dv,$$

其中 ξ 位于 u 与 $u + du$ 之间，η 位于 v 与 $v + dv$ 之间。表达式

$$|\Delta(u,v)|\, du\, dv$$

叫作坐标系 (u, v) 中的*面积元素*。ω 的精确值为

$$\omega = \{|\Delta(u,v)| + \varepsilon\}\, du\, dv,$$

其中 ε 随 du, dv 一同趋近于零。在求和 $\sum F(x,y)\omega$ 的极限时，可以略去这个无穷小。事实上，由于 $\Delta(u, v)$ 连续，可以把两条 (u) 曲线和两条 (v) 曲线取得足够接近，使每一个 ε 的绝对值都小于任意预先指定的正数。于是和

$$\sum F(x,y)\varepsilon\, du\, dv$$

的绝对值本身也可以小于任意预先指定的正数。更明确地说，若 $|F| \leq K$，区域 A_1 的面积为 Ω_1，并且每一个 $|\varepsilon| < \eta$，那么这个误差和的绝对值不超过 $K\eta\Omega_1$，故随 $\eta \to 0$ 而趋近于零。

129.　例子

1）极坐标。用变换

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

从直角坐标过渡到极坐标。当 ρ 从零变到 $+\infty$、ω 从零变到 2π 时，就得到 xy 平面的一切点。这里 $\Delta = \rho$；所以面积元素为

$$\rho\, d\omega\, d\rho,$$

这一点从几何上也很明显。先计算取遍如下平面区域的二重积分：这个区域由一段弧 AB 以及两条直线 OA, OB 所围，任一向径至多在一点截弧 AB，而 OA, OB 与 x 轴所成的角分别为 ω_1, ω_2（见 图 17）。设

$$R = \phi(\omega)$$

是弧 AB 的方程。在积分域内，ω 从 ω_1 变到 ω_2，而 ρ 从零变到 R。因此函数 $f(x, y)$ 的二重积分为

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_0^R f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\rho\, d\rho.$$

如果弧 AB 是包围原点的闭曲线，就应取 $\omega_1 = 0, \omega_2 = 2\pi$。任意积分域都可以分成若干前述类型的部分。例如，假设原点位于给定凸闭曲线的轮廓 C 外部。设 OA, OB 是从原点向这条曲线所作的两条切线，并设

$$R_1 = f_1(\omega), \qquad R_2 = f_2(\omega)$$

分别是两段弧 ANB 与 AMB 的方程。对于 ω_1 与 ω_2 之间一个给定的 ω 值，ρ 从 R_1 变到 R_2，二重积分的值为

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{R_1}^{R_2} f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\rho\, d\rho.$$

2）*椭圆坐标*。考虑共焦二次曲线族

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1, \tag{19}$$

其中 λ 是任意参数。平面上每一点都有这个曲线族中的两条曲线通过，一条是椭圆，另一条是双曲线；因为对于任意 x, y，方程 (19) 都有一个不小于 c^2 的根 λ，以及另一个不大于 c^2 的非负根 μ；在区域内部有 $0 < \mu < c^2 < \lambda$，边界上则允许等号。由 (19) 以及把其中 λ 换成 μ 所得的类似方程，有

$$x = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}{c}, \qquad 0 \le \mu \le c^2 \le \lambda. \tag{20}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

为了避免歧义，只考虑 xy 平面的第一象限。这个区域同 $\lambda\mu$ 平面中由直线

$$\lambda = c^2, \qquad \mu = 0, \qquad \mu = c^2$$

所界的区域逐点一一对应。

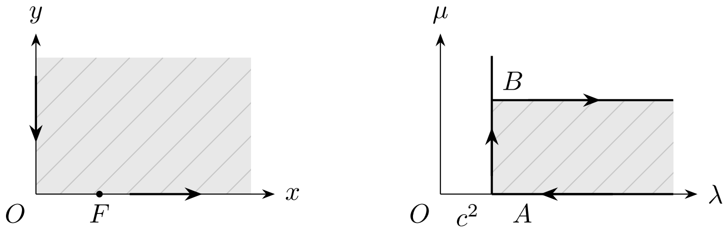


图 28

由公式 (20) 显然可见：当点 (λ, μ) 按箭头所示方向描绘这个区域的边界时，点 (x, y) 按箭头所示方向描绘两条坐标轴 Ox, Oy。因此这个变换是反向的；计算 Δ 也验证了这一点：

$$\Delta = \frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)} = -\frac{1}{4}\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda-c^2)(c^2-\mu)}}.$$

130.　二重积分的变换：第二种方法

现在用另一种只依赖于二重积分计算法的方法，推导一般公式 (18)。不过仍保留上面关于两个区域 A, A_1 中各点对应所作的假设。如果公式对于两个特殊变换

$$\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = \phi(u,v), \end{cases} \qquad \begin{cases} u = f_1(u',v'), \\ v = \phi_1(u',v') \end{cases}$$

成立，那么它对于依次实行这两个变换所得的变换也成立。这由函数行列式的基本性质（§29）立即推出：

$$\frac{D(x,y)}{D(u',v')} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(u',v')}.$$

同样，如果公式对于分别对应于区域 $A_1, B_1, C_1, \ldots, L_1$ 的若干区域 $A, B, C, \ldots, L$ 成立，那么它也对区域

$$A + B + C + \cdots + L$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

成立。最后，当变换只是坐标轴变换

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

时，公式也成立。此时 $\Delta = 1$，而等式

$$\iint_{(A)} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(A')} F(x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,\\ y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)\, dx'\, dy'$$

成立，因为两个积分表示同一个体积。

现在证明公式对特殊变换

$$x = \phi(x', y'), \qquad y = y' \tag{21}$$

成立。这个变换把区域 A 变成区域 A'；后者夹在同样两条平行于 x 轴的直线 $y = y_0$ 与 $y = y_1$ 之间。假设 A 的任一点恰好对应于 A' 的一个点，反之亦然。如果一条平行于 x 轴的直线至多在两点截区域 A 的边界 C，那么对区域 A' 的边界 C' 也同样如此。C 上任意一对纵坐标同为 y 的点 m_0, m_1，对应于轮廓 C' 上两点 m_0', m_1'。不过，这个对应可以是正向的，也可以是反向的。为了区分这两种情形，注意到：如果 $\partial\phi/\partial x'$ 为正，那么 x 随 x' 增大而增大，点 m_0, m_1 与 m_0', m_1' 的位置如 图 29 所示；所以对应为正向。另一方面，如果 $\partial\phi/\partial x'$ 为负，对应就为反向。

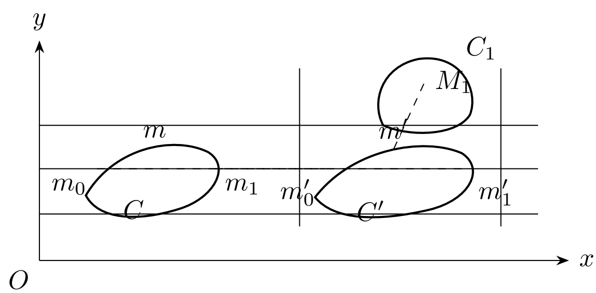


图 29

先考察第一种情形，并设 x_0, x_1, x_0', x_1' 分别是点 m_0, m_1, m_0', m_1' 的横坐标。对通常积分应用变量代换公式，得到

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\, dx = \int_{x_0'}^{x_1'} F[\phi(x', y'), y'] \frac{\partial\phi}{\partial x'}\, dx',$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这里把 y, y' 看作常数。再积分一次，得到

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} F(x,y)\,dx = \int_{y_0}^{y_1} dy' \int_{x_0'}^{x_1'} F[\phi(x',y'),y'] \frac{\partial\phi}{\partial x'}\,dx'.$$

但是在这种情形中，雅可比行列式 Δ 就是 $\partial\phi/\partial x'$；因此前一公式可写成

$$\iint_{(A)} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{(A')} F[\phi(x',y'),y']|\Delta|\,dx'\,dy'.$$

若 $\partial\phi/\partial x'$ 为负，也可以用同样方法建立这个公式；并且它显然适用于任意形状的区域。

完全类似地可以证明，变换

$$x = x', \qquad y = \psi(x',y') \tag{22}$$

导致公式

$$\iint_{(A)} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{(A')} F[x',\psi(x',y')]|\Delta|\,dx'\,dy',$$

其中新积分域 A' 与区域 A 逐点对应。

现在考虑一般变换公式

$$x = f(x_1,y_1), \qquad y = f_1(x_1,y_1), \tag{23}$$

为简便起见，(x,y) 与 (x_1,y_1) 表示同一坐标系中两个对应点 m, M_1 的坐标。设 A, A_1 是分别由轮廓 C, C_1 所围的两个对应区域。再取第三点 m'，它的坐标由 m, M_1 的坐标通过关系

$$x' = x_1, \qquad y' = y$$

给出；点 m' 将描绘一个辅助区域 A'。暂且假定这个区域同 A, A_1 中每一个都逐点对应。六个量 x, y, x_1, y_1, x', y' 满足四个方程

$$x = f(x_1,y_1), \qquad y = f_1(x_1,y_1), \qquad x' = x_1, \qquad y' = y,$$

由此得到关系

$$x' = x_1, \qquad y' = f_1(x_1,y_1), \tag{24}$$

它们定义一个属于 (22) 类型的变换。由方程

$$y' = f_1(x', y_1)$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

得到一个形如 $y_1 = \pi(x', y')$ 的关系；因而可以写成

$$x = f(x', y_1) = \phi(x', y'), \qquad y = y'. \tag{25}$$

给定变换 (23) 就是变换 (24) 与 (25) 的复合；一般公式对这两个变换都成立。因此，它也对变换 (23) 成立。

注。上面假定点 m' 所描绘的区域同 A, A_1 中每一个逐点对应。至少总能通过适当细分使这一点成立。事实上，考虑区域 A_1 中与 A 内平行于 x 轴的直线相对应的曲线。如果这些曲线同一条平行于 y 轴的直线只相交于一点，那么显然 A' 的恰好一个点 m' 对应于 A 的任一给定点 m。因此，只需把区域 A_1 分成足够小的若干部分，使这个条件在每一部分中成立。如果这些曲线本身平行于 y 轴，就先作一次坐标轴变换。

131. 曲面面积

设 S 是曲面上不含奇点、并由轮廓 Γ 所界的一个区域。以任意方式细分 S，设 s_i 是由轮廓 γ_i 所界的一个子区域，m_i 是 s_i 内一点。在点 m_i 作曲面 S 的切平面，并把 s_i 取得足够小，使任何垂直于这个平面的直线至多在一点截 s_i。轮廓 γ_i 在该切平面上的投影是一条曲线 γ_i'；以 σ_i 表示该切平面上由 γ_i' 所围区域的面积。当细分数无限增大，并使每一个子区域在所有维度上都成为无穷小时，和

$$\sum \sigma_i$$

趋近于一个极限；这个极限叫作给定曲面区域 S 的*面积*。

设曲面 S 上一点的直角坐标 x, y, z，由两个可变参数 u, v 通过方程

$$x = f(u, v), \qquad y = \phi(u, v), \qquad z = \chi(u, v) \tag{26}$$

给出，并且曲面区域 S 与 uv 平面中由闭轮廓 C 所界的区域 R 逐点对应。假定函数 f, ϕ, χ 连同它们的一阶偏导数在这个区域中连续。细分 R，设 r_i 是由轮廓 c_i 所界的一个子区域，ω_i 是 r_i 的面积。r_i 在 S 上对应于一个由轮廓 γ_i 所界的子区域 s_i。设 σ_i 是按上面定义的、在相应切平面上的面积；试求比值 σ_i/ω_i 的表达式。

设 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 是曲面 S 在 s_i 内一点

$$m_i(x_i, y_i, z_i)$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

处法线的方向余弦，而该点对应于 r_i 内一点 (u_i, v_i)。取点 m_i 为新原点；取 m_i 处法线以及切平面内两条互相垂直的直线 m_iX, m_iY 为新坐标轴。后两条直线关于旧坐标轴的方向余弦分别为

$$\alpha', \beta', \gamma', \qquad \alpha'', \beta'', \gamma''.$$

设 X, Y, Z 是曲面 S 上一点关于新坐标轴的坐标。由熟知的坐标变换公式，有

$$\begin{aligned}
X &= \alpha'(x - x_i) + \beta'(y - y_i) + \gamma'(z - z_i),\\
Y &= \alpha''(x - x_i) + \beta''(y - y_i) + \gamma''(z - z_i),\\
Z &= \alpha_i(x - x_i) + \beta_i(y - y_i) + \gamma_i(z - z_i).
\end{aligned}$$

当点 (u, v) 描绘轮廓 c_i 时，点 (X, Y) 描绘一条闭曲线；σ_i 就是 XY 平面上由这条闭曲线所围部分的面积。因此，由 §127，

$$\frac{\sigma_i}{\omega_i} = \left| \left.\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} \right|,$$

其中 u_i', v_i' 是 c_i 内某一点的坐标。容易计算得

$$\begin{aligned}
\left.\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') \left.\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')}&\\
+ (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') \left.\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')}&\\
+ (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \left.\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')}&.
\end{aligned}$$

由九个方向余弦之间的熟知关系，这个式子成为

$$\begin{aligned}
\left.\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} = \pm \Bigg\{ \alpha_i \left.\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} + \beta_i \left.\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')}&\\
+ \gamma_i \left.\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} \Bigg\}&.
\end{aligned}$$

这个正负号只反映切平面内两条坐标轴的取向；应用一般公式 (17) 并取绝对值，得到

$$\sigma_i = \omega_i \left| \alpha_i \left.\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} + \beta_i \left.\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} + \gamma_i \left.\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{(u_i', v_i')} \right|.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果这个区域很小，点 (u_i', v_i') 就非常接近点 (u_i, v_i)。写成

$$\left.\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_{(u_i',v_i')} = \left.\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_{(u_i,v_i)} + \varepsilon_i,$$
$$\left.\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_{(u_i',v_i')} = \left.\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_{(u_i,v_i)} + \varepsilon_i',$$
$$\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_i',v_i')} = \left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_i,v_i)} + \varepsilon_i''.$$

于是可写成

$$\sum \sigma_i = \sum \omega_i \left| \alpha_i \left.\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_{(u_i,v_i)} + \beta_i \left.\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_{(u_i,v_i)} + \gamma_i \left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_i,v_i)} \right| + \theta \sum \omega_i \left|\alpha_i\varepsilon_i + \beta_i\varepsilon_i' + \gamma_i\varepsilon_i''\right|, \qquad |\theta| \le 1.$$

因为函数 f, ϕ, χ 的导数在区域 R 中连续，可以假定区域 r_i 已取得足够小，使 $|\varepsilon_i|, |\varepsilon_i'|, |\varepsilon_i''|$ 都小于任意预先指定的数 η。又因方向余弦的绝对值不超过 1，补充项的绝对值必小于 $3\eta\Omega$，其中 Ω 是区域 R 的面积。因此，当区域 s_i（以及 r_i）都按上述方式趋近于零时，这个补充项趋近于零，而和 $\sum \sigma_i$ 趋近于二重积分

$$\iint_{(R)} \left| \alpha \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \beta \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \gamma \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\, dv,$$

其中 α, β, γ 是曲面 S 在点 (u,v) 处法线的方向余弦。

现在计算这些方向余弦。切平面方程（§39）为

$$(X-x)\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + (Y-y)\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + (Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 0,$$

因此

$$\frac{\alpha}{D(y,z)/D(u,v)} = \frac{\beta}{D(z,x)/D(u,v)} = \frac{\gamma}{D(x,y)/D(u,v)} = \pm \left\{ \begin{array}{c} [D(y,z)/D(u,v)]^2 + [D(z,x)/D(u,v)]^2 \\ + [D(x,y)/D(u,v)]^2 \end{array} \right\}^{-1/2}.$$

在最后一个比值中取正号，便得到

$$\alpha\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \beta\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \gamma\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

Lagrange 曾使用过的熟知恒等式

$$\begin{aligned}&(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2\\&\qquad=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2\end{aligned}$$

使根号下的量可以写成 $EG-F^2$，其中

$$E=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\qquad F=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\qquad G=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2. \tag{27}$$

这里求和符号表示把 x 依次换成 y, z，再把所得三项相加。因此，曲面 S 的面积由二重积分

$$A=\iint_{(R)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{28}$$

给出。

函数 E, F, G 在曲面理论中起着重要作用。把 dx, dy, dz 的表达式分别平方后相加，得到

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \tag{29}$$

显然，这些量 E, F, G 不依赖于坐标轴的选择，而只依赖于曲面 S 本身以及自变量 u, v。对于实参数与实曲面，由 Cauchy–Schwarz 不等式总有 $EG-F^2\geq 0$；在这里所假定的无奇点正规参数片上，两条参数切向量线性无关，因而实际上 $EG-F^2>0$。

132. 曲面面积元素

表达式

$$\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

叫作曲面 S 在坐标系 (u, v) 中的*面积元素*。由曲线

$$(u),\quad (u+du),\quad (v),\quad (v+dv)$$

所围的一小块曲面的精确面积为

$$\left(\sqrt{EG-F^2}+\varepsilon\right)du\,dv,$$

其中 ε 随 du, dv 一同趋近于零。和上面一样，项 $\varepsilon\,du\,dv$ 可以略去。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

微分几何中的若干考察也证实了这个结果。事实上，把所考察的曲面部分看成曲面 S 在点 (u,v) 处切平面上的一个小曲边平行四边形，它的面积近似等于两边长度的乘积再乘以两条曲线 (u) 与 (v) 之间夹角的正弦。如果进一步用微分 ds 代替弧的增量，那么由公式 (29)，当 du,dv 取正时，两边长度分别为

$$\sqrt{E}\,du, \qquad \sqrt{G}\,dv.$$

两条曲线 (u) 与 (v) 的切线方向参数分别是

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \text{以及} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}.$$

因此它们之间的夹角 α 由公式

$$\cos\alpha = \frac{\sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

给出，从而

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

形成上述乘积，便得到同前面完全相同的面积元素表达式。$\cos\alpha$ 的公式表明，当且仅当两个曲线族 (u) 与 (v) 彼此正交时，$F=0$。

当曲面 S 退化为平面时，刚才得到的公式化为 §128 中的公式。事实上，令

$$z = \chi(u,v) = 0,$$

就有

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2.$$

由行列式平方的法则，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = EG - F^2.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所以 $\sqrt{EG-F^2}$ 化为 $|\Delta|$。

例。1）设一块曲面的方程为 $z=f(x,y)$，它在 xy 平面上的投影是区域 R；在这个区域中，函数 $f(x,y)$ 连同它的导数

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial f}{\partial y}$$

都连续。取 x,y 为自变量，得到

$$E=1+p^2,\qquad F=pq,\qquad G=1+q^2,$$

所以所求面积由二重积分

$$A=\iint_{(R)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\iint_{(R)}\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}\tag{30}$$

给出，其中 γ 是 z 轴与曲面法线之间的锐角。

2）计算旋转曲面上夹在两个垂直于旋转轴的平面截面之间的部分的面积。取旋转轴为 z 轴，并设 $z=f(x)$ 是母线在 xz 平面内的方程。于是曲面上一点的坐标由方程

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,\qquad z=f(\rho)$$

给出，其中自变量 ρ,ω 是该点在 xy 平面上投影的极坐标。在这种情形中，

$$ds^2=d\rho^2[1+f'(\rho)^2]+\rho^2d\omega^2,\qquad E=1+f'(\rho)^2,\qquad F=0,\qquad G=\rho^2.$$

为了求由半径分别为 ρ_1,ρ_2 的两个平面截面所界的曲面部分的面积，应让 ρ 从 ρ_1 变到 ρ_2（$\rho_1<\rho_2$），让 ω 从零变到 2π。因此所求面积为

$$\begin{aligned}A&=\int_{\rho_1}^{\rho_2}d\rho\int_0^{2\pi}\rho\sqrt{1+f'(\rho)^2}\,d\omega\\&=2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\sqrt{1+f'(\rho)^2}\,d\rho,\end{aligned}$$

从而只须一次求积即可算出。若 s 表示母线的弧长，则

$$ds^2=d\rho^2+dz^2=d\rho^2[1+f'(\rho)^2],$$

前一公式可写成

$$A=\int_{\rho_1}^{\rho_2}2\pi\rho\,ds.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这个结果的几何解释很容易：$2\pi\rho\,ds$ 是一个圆台的侧面积；该圆台的斜高为 ds，平均半径为 ρ。如果把两个距离为无穷小的截面之间的曲面面积，用这样一个圆台的侧面积代替，就恰好得到上面的 A 的公式。

例如，把抛物线 $x^2 = 2pz$ 绕 z 轴旋转所得的旋转抛物面上，从顶点到半径为 r 的圆形平面截面之间那一部分的面积是

$$A = 2\pi \int_0^r \frac{\rho}{p}\sqrt{\rho^2 + p^2}\,d\rho = \frac{2\pi}{3p}\left[(r^2 + p^2)^{3/2} - p^3\right].$$

III. 二重积分的推广；反常积分；曲面积分

133. 反常积分

设 $f(x, y)$ 是一个函数，它在平面上位于某一闭轮廓 Γ 外部的整个区域内连续。把 $f(x, y)$ 的二重积分取遍 Γ 与 Γ 外部另一条闭曲线 C 之间的区域，所得积分有一个有限值。如果无论曲线 C 怎样变化，只要从原点到 C 上最近一点的距离趋于无穷大，这个积分总趋近于同一个极限，那么就把这个极限定义为 $f(x, y)$ 在 Γ 外部整个区域上的二重积分的值。

暂且假设函数 $f(x, y)$ 在 Γ 外部保持同号，例如为正。在这种情形，二重积分的极限与曲线 C 的形状无关。事实上，设

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

是一列闭曲线，每一条都包围前一条，并且到 C_n 上最近一点的距离随 n 一同变为无穷大。如果取遍 Γ 与 C_n 之间区域的二重积分 I_n 趋近于极限 I，那么对于任何另一列满足同样条件的曲线

$$C'_1, C'_2, \ldots, C'_m, \ldots$$

也有同样结论。事实上，若 I'_m 是取遍 Γ 与 C'_m 之间区域的二重积分的值，就可以把 n 取得足够大，使曲线 C_n 完全包围 C'_m；于是

$$I'_m < I_n < I.$$

此外，I'_m 随 m 增大而增大。因此 I'_m 有一个极限 $I' \le I$。用完全相同的方式又可得到 $I \le I'$。所以 $I' = I$，也就是说，这两个极限相等。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

作为例子，考虑一个函数 $f(x,y)$，它在以原点为中心、半径为 r 的圆外部具有形式

$$f(x,y)=\frac{\psi(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

其中分子 $\psi(x,y)$ 的值保持在两个正数 m 与 M 之间。取与上述圆同心的圆作为曲线 C，则把二重积分取遍半径为 r 与 R 的两圆之间的圆环，所得值由定积分

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_r^R \frac{\psi(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)\rho\,d\rho}{\rho^{2\alpha}}$$

给出。因此，它位于下面两个表达式的值之间：

$$2\pi m\int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}},\qquad 2\pi M\int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}.$$

由 §90，只要 $2\alpha-1>1$，也就是 $\alpha>1$，其中出现的单积分就在 R 无限增大时趋近于一个极限；但如果 $\alpha\le 1$，它就随 R 一同变为无穷大。

如果找不到一条闭曲线，使函数 $f(x,y)$ 在它的外部保持同号，那么可以像在 §89 中那样证明：只要积分

$$\iint |f(x,y)|\,dx\,dy$$

本身趋近于一个极限，积分

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

也趋近于一个极限。但是，如果前一个积分变为无穷大，就不能由此断定后一个积分具有与扩张轮廓无关的极限；原文把这种情形称为“不定的”。Cayley 给出的下面这个例子很有趣。令

$$f(x,y)=\sin(x^2+y^2),$$

并先把这个函数积分在由两条坐标轴以及直线 $x=a, y=a$ 围成的边长为 a 的正方形上。这个积分的值是

$$\int_0^a dx\int_0^a \sin(x^2+y^2)\,dy=\int_0^a \sin x^2\,dx\int_0^a \cos y^2\,dy + \int_0^a \cos x^2\,dx\int_0^a \sin y^2\,dy.$$

当 a 无限增大时，由 §91，右端每一个积分都有极限；两类 Fresnel 积分的极限都等于 $\sqrt{\pi/8}$，因而整个右端的极限为 $\pi/4$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

中译者校记（底本原误）。1904 年英译本与现代重排本此处都把每一个 Fresnel 积分的极限排成 $\sqrt{\pi/2}$，并相应把整个右端的极限写成 π。这两个数值彼此相容，但前者比标准 Fresnel 积分的正确值大了 2 倍，后者则大了 4 倍；本译稿据计算订正为 $\sqrt{\pi/8}$ 与 $\pi/4$。

另一方面，把同一个函数的二重积分取遍由两条坐标轴与圆 $x^2+y^2=R^2$ 所围的四分之一圆，所得值等于

$$\int_0^{\pi/2} d\omega \int_0^R \rho \sin \rho^2 \, d\rho = -\frac{\pi}{4}[\cos \rho^2]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-\cos R^2),$$

它在 R 变为无穷大时于零与 $\pi/2$ 之间振荡，并不趋近于任何极限。

对于在一点处或沿一条线变为无穷大的函数 $f(x,y)$，也应以类似方式定义其二重积分。首先，应从积分区域中除去这个点（或这条线）：用一条小轮廓包围该点，或者用一条非常接近这条线的轮廓包围它；随后让前一种轮廓无限缩小，或让后一种轮廓无限接近该线。例如，如果在点 (a,b) 的邻域内，函数 $f(x,y)$ 可写成

$$f(x,y) = \frac{\psi(x,y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha},$$

其中 $\psi(x,y)$ 位于两个正数 m 与 M 之间，那么把 $f(x,y)$ 的二重积分取遍点 (a,b) 周围一个不含其他不连续点的区域，所得值有限的充要条件是 $\alpha<1$。

134. 函数 $B(p,q)$

上面假设轮廓 C_n 在每一个方向上都无限远离。但显然也可以假设只有它的一部分退向无穷远。Cayley 的上述例子就是这种情形；下面的例子也是如此。取函数

$$f(x,y) = 4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2},$$

其中 p,q 都为正。这个函数在第一象限内连续且为正。先把它积分在由两条坐标轴以及直线 $x=a, y=a$ 所围的边长为 a 的正方形上，所得二重积分的值是

$$\int_0^a 2x^{2p-1}e^{-x^2}\,dx \times \int_0^a 2y^{2q-1}e^{-y^2}\,dy.$$

当 a 变为无穷大时，这两个积分各自趋近于一个极限。事实上，由 §92 中函数 $\Gamma(p)$ 的定义，

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt;$$

所以令 $t = x^2$，便得到

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} 2x^{2p-1} e^{-x^2}\, dx. \tag{31}$$

因此，当 a 变为无穷大时，二重积分趋近于极限 $\Gamma(p)\Gamma(q)$。

现在把积分取遍由两条坐标轴与圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围的四分之一圆。用极坐标表示，这个二重积分的值是

$$\int_0^R 2\rho^{2(p+q)-1} e^{-\rho^2}\, d\rho \times \int_0^{\pi/2} 2\cos^{2p-1}\phi\, \sin^{2q-1}\phi\, d\phi.$$

当 R 变为无穷大时，这个乘积趋近于极限

$$\Gamma(p+q)B(p,q),$$

其中定义

$$B(p,q) = \int_0^{\pi/2} 2\cos^{2p-1}\phi\, \sin^{2q-1}\phi\, d\phi. \tag{32}$$

表达这两个极限必定相等这一事实，便得到方程

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q). \tag{33}$$

积分 $B(p,q)$ 叫作第一类 *Euler* 积分。令 $t = \sin^2\phi$，它可写成

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\, dt. \tag{34}$$

公式 (33) 把函数 $B(p,q)$ 的计算化为函数 Γ 的计算。例如，令 $p = q = 1/2$，得到

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \Gamma(1)\int_0^{\pi/2} 2\, d\phi = \pi,$$

所以 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$。于是公式 (31) 给出

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

一般地，令 $q = 1-p$，并取 $0 < p < 1$，可得

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1} \frac{dt}{t}.$$

以后将看到，这个积分的值为 $\pi/\sin p\pi$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

135. 曲面积分

曲面积分的定义同线积分的定义相似。设 S 是曲面的一个区域，由一条或若干条曲线 Γ 围成。我们假定这个曲面具有彼此不同的两个侧面，也就是在所考察区域上可定向；例如，若把一侧涂成红色、另一侧涂成蓝色，就不可能沿一条位于曲面上且不越过任何边界曲线的连续道路，从红色一侧走到蓝色一侧。[7]把 S 想成一个具有一定厚度的物质曲面，并设 m, m' 是曲面两侧彼此很近的两点。在 m 处作曲面的法线，并取不穿入曲面本体的那一半 mn。为简便起见，我们说，法线上这样确定的方向与点 m 所在的曲面侧面相对应。在点 m' 处，对应于曲面另一侧的法线方向同刚才确定的方向相反。

设 $z = \phi(x, y)$ 是给定曲面的方程, 而 S 是该曲面上由轮廓 Γ 围成的一块区域。我们假定任何平行于 z 轴的直线至多在一点截这个曲面，并且函数 $\phi(x, y)$ 在 xy 平面上由 Γ 的投影 C 所围成的区域 A 内连续。显然，这个曲面有两个侧面；同正 z 轴方向所成的角，在一个侧面所对应的法线方向上为锐角，在另一个侧面所对应的法线方向上为钝角。我们把对应法线同正 z 轴所成角为锐角的侧面叫作*上侧*。现在设 $P(x, y, z)$ 是三个变量 x, y, z 的函数，它在包含曲面区域 S 的某个空间区域内连续。如果在这个函数中用 $\phi(x, y)$ 代替 z，就得到只含 x, y 的函数

$$P[x, y, \phi(x, y)].$$

类比于线积分，很自然地把这个函数在区域 A 上的二重积分

$$\iint_{(A)} P[x, y, \phi(x, y)]\, dx\, dy \tag{35}$$

叫作函数 $P(x, y, z)$ 在给定曲面的区域 S 上的*曲面积分*。

假设曲面 S 上一点的坐标 x, y, z 用两个辅助变量 u, v 表示，并且曲面部分 S 与 uv 平面的一个区域 R 逐点一一对应。设 $d\sigma$ 是曲面 S 的面积元素，γ 是正 z 轴同 S 上侧法线之间的锐角。由 §131–§132，前面的二重积分等于

$$\iint_{(R)} P(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma, \tag{36}$$

其中 x, y, z 都应以 u, v 表示。不过，这个新表达式比原来的表达式更一般，因为 $\cos\gamma$ 可以依照所选曲面侧面的不同而取两个值。如上选取锐角时，二重积

[7]构造一个不满足这一条件的曲面十分容易。只要使一张矩形纸片 $ABCD$ 发生变形，并把边 BC 粘到边 AD 上，使点 C 与 A 重合、点 B 与 D 重合即可。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

分 (35) 或 (36) 叫作取遍曲面 S 上侧的曲面积分

$$\iint P(x,y,z)\,dx\,dy. \tag{37}$$

如果把 γ 取成钝角，二重积分的每一个元素都会变号，所得新二重积分就叫作取遍 S 下侧的曲面积分 $\iint P\,dx\,dy$。一般说来，曲面积分 $\iint P\,dx\,dy$ 按它取遍 S 的上侧或下侧，分别等于二重积分 (35) 的正值或负值。

这个定义使我们能够完成单积分与二重积分之间的类比。单积分在互换积分限时变号，而我们以前并没有为二重积分建立类似的性质。采用二重积分的上述推广定义以后，可以说，先前所考察的积分

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

是取遍 xy 平面上侧的曲面积分；同一积分变号以后，则表示取遍其下侧的曲面积分。于是，单积分的两个运动方向，对应于二重积分中 xy 平面的两个侧面。

曲面积分的表达式 (36) 显然不要求任何平行于 z 轴的直线至多在一点截曲面。以同样方式，还可以定义曲面积分

$$\iint Q(x,y,z)\,dy\,dz, \qquad \iint R(x,y,z)\,dz\,dx,$$

以及更一般的积分

$$\iint \big[P(x,y,z)\,dx\,dy + Q(x,y,z)\,dy\,dz + R(x,y,z)\,dz\,dx\big].$$

后一个积分也可以写成

$$\iint [P\cos\gamma + Q\cos\alpha + R\cos\beta]\,d\sigma,$$

其中 α,β,γ 是与所选曲面侧面对应的法线方向的三个方向角。

曲面积分在数学物理中尤其重要。

136. Stokes 定理

设 L 是一条空间曲线，函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 沿 L 连续。于是，沿曲线 L 所取线积分

$$\int_{(L)} \big[P\,dx + Q\,dy + R\,dz\big]$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的定义，同 §93 中对平面曲线上的线积分所给的定义相似；这里不再详述。如果曲线 L 是闭曲线，这个积分显然可以分解为三个在闭平面曲线上所取线积分之和。对其中每一个应用 Green 定理，显然可以用三个二重积分之和来代替这个线积分。引入曲面积分以后，这个结果便能用非常紧凑的形式陈述。

考虑一个双侧曲面片 S；为明确起见，假定它只由一条曲线 Γ 围成。曲面的每一个侧面都对应于沿轮廓 Γ 的一个确定正向。我们采用如下约定：在轮廓的任一点 M，作对应于所考察曲面侧面的那一半法线 Mn，并设想一个观察者头在 n、脚在 M；如果观察者按某一方向运动时，区域 S 位于他的左手一侧，我们就把这个方向叫作正向。因此，曲面的两个侧面对应于沿轮廓 Γ 的两个相反方向。

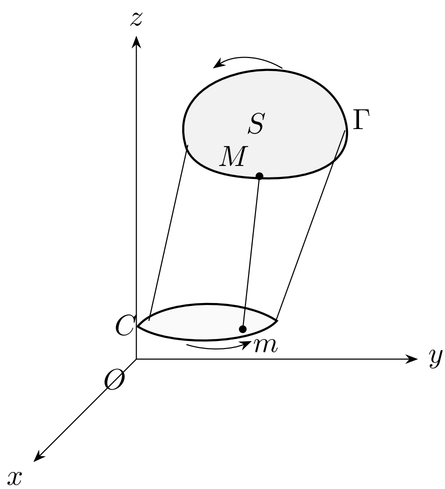


图 30

先考虑曲面上的一块区域 S，并假设任何平行于 z 轴的直线至多在一点截它；再假设三直角坐标架 $Oxyz$ 像图 30那样放置，其中纸面是 yz 平面，而 x 轴伸向观察者。S 的边界 Γ 在 xy 平面上对应于一条闭轮廓 C；这两条曲线同时按图中箭头所示方向描绘。设

$$z = \phi(x, y)$$

是给定曲面的方程，而 $P(x, y, z)$ 是在包含 S 的一个空间区域内连续的函数。那么线积分

$$\int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\, dx$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

同沿平面曲线 C 所取的线积分

$$\int_{(C)} P[x,y,\phi(x,y)]\,dx$$

完全相同。对后一个积分应用 Green 定理（§126）。为明确起见，令

$$\overline{P}(x,y)=P[x,y,\phi(x,y)],$$

则有

$$\frac{\partial\overline{P}(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

其中 α,β,γ 是 S 上侧法线的三个方向角。因此，由 Green 定理，

$$\int_{(C)}\overline{P}(x,y)\,dx=\iint_{(A)}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma},$$

其中二重积分应取遍 xy 平面上由轮廓 C 围成的区域 A。但是，右端正是取遍 S 上侧的曲面积分

$$\iint_{(S)}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma;$$

所以可以写成

$$\int_{(\Gamma)}P(x,y,z)\,dx=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right).$$

如果把曲面积分取遍 S 的另一侧，同时把沿 Γ 所取线积分的方向反过来，这个公式显然仍成立。并且，像 Green 定理一样，无论曲面的形状怎样，它也成立。对 x,y,z 作循环置换，得到下面两个类似公式:

$$\int_{(\Gamma)}Q(x,y,z)\,dy=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy-\frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz\right),$$

$$\int_{(\Gamma)}R(x,y,z)\,dz=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz-\frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx\right).$$

把这三个公式相加，就得到 Stokes 定理的一般形式:

$$\begin{aligned}&\int_{(\Gamma)}\left[P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz\right]\\&=\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx\right].\end{aligned}\tag{38}$$

描绘 Γ 的方向与二重积分所取的曲面侧面，依照上面所作的约定彼此对应。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

IV. 分析与几何应用

137. 体积

如同上面那样，考虑一个空间区域，它由 xy 平面、位于该平面上方的一个曲面 S，以及母线平行于 z 轴的一个柱面所围成。假设这个柱面被平面 $z=0$ 所截得的轮廓，同图 25中所画的轮廓类似：它由两条平行于 y 轴的直线段和两条曲线弧 APB、$A'QB'$ 组成。如果

$$z = f(x, y)$$

是曲面 S 的方程，那么由 §124，所论体积为

$$V = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

现在，积分

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

表示用一个平行于 yz 平面的平面截这个立体所得截面的面积 A。所以前一公式可以写成

$$V = \int_a^b A\, dx. \tag{39}$$

任意方式围成的一个立体的体积，都等于若干个上述类型体积的代数和。例如，为求一个由凸闭曲面围成的立体的体积，可以用一个母线平行于 z 轴的柱面外切于该立体，然后求两个上述类型体积之差。因此，公式 (39) 对位于两个平行平面 $x=a$ 与 $x=b$（$a<b$）之间、并由任意曲面围成的任何立体都成立；其中 A 表示一个平行于这两个给定平面的截面的面积。设用点

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$$

分割区间 (a, b)，并设 $A_0, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ 分别是平面

$$x = a, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \ldots$$

所截得的面积。那么定积分 $\int_a^b A\, dx$ 是和

$$A_0(x_1 - a) + A_1(x_2 - x_1) + \cdots + A_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \cdots$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的极限。这个结果的几何意义很明显。例如，$A_{i-1}(x_i - x_{i-1})$ 表示一个直柱体的体积；它的底面是给定立体被平面 $x = x_{i-1}$ 所截得的截面，而它的高是两个相邻截面之间的距离。因此，给定立体的体积就是这些无穷小柱体体积之和的极限。这同通常关于体积的朴素观念相符。

如果面积 A 已知为 x 的函数，所求体积只须一次求积便可得到。作为例子，求一个旋转体夹在两个垂直于旋转轴的平面之间那一部分的体积。取旋转轴为 x 轴，并设

$$z = f(x)$$

是母线在 xz 平面内的方程。平行于 yz 平面的截面是半径为 $f(x)$ 的圆。因此所求体积由积分

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

给出。

再求椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

被两个平面 $x = x_0$ 与 $x = X$ 所界部分的体积。平行于平面 $x = 0$ 的截面是一个椭圆，其两个半轴为

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

所以所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{x_0}^{X} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= \pi bc \left(X - x_0 - \frac{X^3 - x_0^3}{3a^2}\right). \end{aligned}$$

为求椭球的总体积，应令 $x_0 = -a$、$X = a$，于是得到

$$V = \frac{4\pi abc}{3}.$$

138. 直纹曲面；棱柱体公式

当截面面积 A 是 x 的二次多项式时，体积可以用两个端截面的面积 B, B'、中截面的面积 b，以及两个端截面之间的距离 h 很简单地表示。若中截面就是

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

yz 平面，则

$$V=\int_{-a}^{+a}(lx^2+2mx+n)\,dx=\frac{2la^3}{3}+2na.$$

另一方面,

$$h=2a,\qquad b=n,\qquad B=la^2+2ma+n,\qquad B'=la^2-2ma+n,$$

所以

$$n=b,\qquad a=\frac{h}{2},\qquad 2la^2=B+B'-2b.$$

这些等式给出公式

$$V=\frac{h}{6}\big(B+B'+4b\big), \tag{40}$$

它叫作*棱柱体*公式。

特别地，这个公式对任何由一个直纹曲面和两个平行平面围成的立体都成立；所谓棱柱体就是其中的一个特殊情形。[8]事实上，设一条动直线的方程为

$$y=ax+p,\qquad z=bx+q,$$

其中 a,b,p,q 是变量参数 t 的连续函数；当 t 从 t_0 增加到 T 时，它们都回到各自的初值。这条直线描出一个直纹曲面，而由 §94，平行于平面 $x=0$ 的截面的面积为

$$A=\int_{t_0}^{T}(ax+p)(b'x+q')\,dt,$$

这里 a',b',p',q' 表示 a,b,p,q 关于 t 的导数。即使这些导数在 t_0 与 T 之间有限多个值处不连续，结论仍然成立；当侧面边界由若干直纹曲面的片段组成时，正会出现这种情形。A 的表达式可以写成

$$A=x^2\int_{t_0}^{T}ab'\,dt+x\int_{t_0}^{T}(aq'+pb')\,dt+\int_{t_0}^{T}pq'\,dt,$$

而右端各积分显然都与 x 无关。因此公式 (40) 对给定立体的体积成立。值得注意的是，*同一个公式也给出初等几何中绝大多数立体的体积*。

[8]棱柱体（prismoid）是由任意数目的平面围成的立体，其中有两个平面彼此平行，而所有顶点都位于这两个平面内。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

139.　Viviani 问题

以给定球的一条半径 $OA(=R)$ 为直径作圆 C；求球内位于一个圆柱内部那一部分的体积，这个圆柱的正截面就是圆 C。取球心为原点，则所求体积的四分之一由二重积分

$$\frac{V}{4} = \iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

给出，积分区域是以 OA 为直径的一个半圆。改用极坐标 ρ, ω，角 ω 从 0 变到 $\pi/2$，而 ρ 从 0 变到 $R\cos\omega$。于是

$$\begin{aligned}\frac{V}{4} &= \int_0^{\pi/2} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\, d\rho \\ &= -\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\left[(R^2-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{R\cos\omega} d\omega,\end{aligned}$$

即

$$\frac{V}{4} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left(R^3 - R^3\sin^3\omega\right) d\omega = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

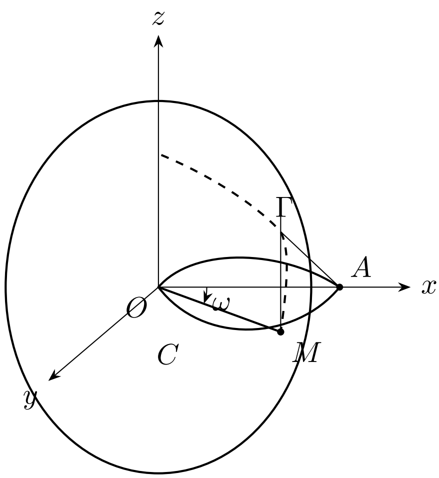


图 31

如果从整个球的体积中，减去刚才求得的体积以及关于 z 轴同它对称的圆柱内那一部分的体积，余下的体积为

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9}R^3.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

再求球面上位于给定圆柱内部那一部分的面积 Ω。由曲面面积公式,

$$\Omega = 4 \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

把 p, q 分别换成 $-x/z, -y/z$，并改用极坐标，得到

$$\begin{aligned}\Omega &= 4 \int_0^{\pi/2} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[-R\sqrt{R^2 - \rho^2}\right]_0^{R\cos\omega} d\omega,\end{aligned}$$

所以

$$\Omega = 4R^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin\omega)\, d\omega = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

从球的总面积中减去两个圆柱所围住的球面面积，余下的面积为

$$4\pi R^2 - 8R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 8R^2.$$

140. 若干特殊定积分的计算

前面所建立的定理，特别是积分号下求导定理，有时使我们不必知道相应的不定积分，就能计算某些定积分。下面给出几个例子。

令

$$A = F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\log(1 + \alpha x)}{1 + x^2}\, dx.$$

积分号下求导公式给出

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\log(1 + \alpha^2)}{1 + \alpha^2} + \int_0^\alpha \frac{x\, dx}{(1 + \alpha x)(1 + x^2)}.$$

把被积函数分解成部分分式，得到

$$\frac{x}{(1 + \alpha x)(1 + x^2)} = \frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\frac{x + \alpha}{1 + x^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha x}\right),$$

所以

$$\int_0^\alpha \frac{x\, dx}{(1 + \alpha x)(1 + x^2)} = -\frac{\log(1 + \alpha^2)}{2(1 + \alpha^2)} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \arctan\alpha.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

于是

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\arctan\alpha + \frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}.$$

注意到 $\alpha = 0$ 时 $A = 0$，可写成

$$A = \int_0^\alpha \frac{\log(1+u^2)}{2(1+u^2)}\,du + \int_0^\alpha \frac{u}{1+u^2}\arctan u\,du.$$

对第一个积分作分部积分，最后得到

$$A = \frac{1}{2}\arctan\alpha\,\log(1+\alpha^2).$$

再考虑函数 x^y。当 x 位于 0 与 1 之间，而 y 位于任意两个正数 a, b 之间时，这个函数连续。因此，由 §123 的一般公式，

$$\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy = \int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx.$$

但是

$$\int_0^1 x^y\,dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{1}{y+1};$$

所以前式右端的值为

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

另一方面，

$$\int_a^b x^y\,dy = \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_a^b = \frac{x^b - x^a}{\log x},$$

从而

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

一般地，设 $P(x,y), Q(x,y)$ 是满足

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

的两个函数，而 x_0, x_1, y_0, y_1 是给定常数。由积分号下求导的一般公式，

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_{y_0}^{y_1} dy\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

也就是

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\big[P(x,y_1)-P(x,y_0)\big]\,dx\\ =\int_{y_0}^{y_1}\big[Q(x_1,y)-Q(x_0,y)\big]\,dy.\end{aligned}\tag{41}$$

Cauchy 从这个公式推出了大量定积分的值。这个公式同 Green 定理也有简单而密切的关系；实质上，它不过是 Green 定理的一个特殊情形。事实上，只须把 Green 定理应用于沿直线

$$x=x_0,\quad x=x_1,\quad y=y_0,\quad y=y_1$$

所围矩形边界取得的线积分

$$\int(P\,dx+Q\,dy),$$

就能得到它。

下面一个例子用一种特殊方法计算定积分。积分

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

在 $|\alpha|\neq 1$ 时有有限值。函数 $F(\alpha)$ 具有下列性质。

1）$F(-\alpha)=F(\alpha)$。事实上,

$$F(-\alpha)=\int_0^{\pi}\log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx;$$

作代换 $x=\pi-y$，便有

$$F(-\alpha)=\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos y+\alpha^2)\,dy=F(\alpha).$$

2）$F(\alpha^2)=2F(\alpha)$。由

$$2F(\alpha)=F(\alpha)+F(-\alpha)$$

可得

$$\begin{aligned}2F(\alpha)&=\int_0^{\pi}\big[\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)+\log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\big]\,dx\\&=\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)\,dx.\end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

再作代换 $2x = y$，得到

$$2F(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\,dy + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \log(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\,dy.$$

在后一积分中再作代换 $y = 2\pi - z$，则

$$\int_{\pi}^{2\pi} \log(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\,dy = \int_0^{\pi} \log(1 - 2\alpha^2\cos z + \alpha^4)\,dz,$$

因而

$$2F(\alpha) = \frac{1}{2}F(\alpha^2) + \frac{1}{2}F(\alpha^2) = F(\alpha^2).$$

由此依次得到

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}F(\alpha^2) = \frac{1}{4}F(\alpha^4) = \cdots = \frac{1}{2^n}F\left(\alpha^{2^n}\right).$$

如果 $|\alpha| < 1$, 那么当 n 无限增大时, α^{2^n} 趋近于零; 由于对数趋近于零, $F(\alpha^{2^n})$ 也趋近于零。所以当 $|\alpha| < 1$ 时,

$$F(\alpha) = 0.$$

如果 $|\alpha| > 1$，令 $\alpha = 1/\beta$。于是

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} \log\left(1 - \frac{2\cos x}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)dx = \int_0^{\pi} \log(1 - 2\beta\cos x + \beta^2)\,dx - \pi\log\beta^2,$$

其中 $|\beta| < 1$。所以在这种情形,

$$F(\alpha) = -\pi\log\beta^2 = \pi\log\alpha^2.$$

最后，借助第四章习题 6* 可以证明 $F(\pm 1) = 0$；因此 $F(\alpha)$ 对一切 α 都连续。

141. $\log\Gamma(n+1)$ 的近似值

为了求定积分的精确值，或者至少求它的近似值，可以采用多种多样的方法。下面给出一个例子。按定义,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$$

函数 $x^n e^{-x}$ 在 $x=n$ 时取得最大值 $n^n e^{-n}$。当 x 从零增到 n 时，$x^n e^{-x}$ 从零增到 $n^n e^{-n}$（$n>0$）；当 x 从 n 增到 $+\infty$ 时，它又从 $n^n e^{-n}$ 减到零。类似地，当 t 从 $-\infty$ 增到零时，函数

$$n^n e^{-n} e^{-t^2}$$

从零增到 $n^n e^{-n}$；当 t 从零增到 $+\infty$ 时，它又从 $n^n e^{-n}$ 减到零。因此，借助代换

$$x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2}, \tag{42}$$

x, t 的值彼此对应，使得当 t 从 $-\infty$ 增到 $+\infty$ 时，x 从零增到 $+\infty$。

还须计算 dx/dt。对 (42) 两边取对数导数，得到

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x-n}.$$

由 (42) 还有

$$t^2 = x - n - n\log\left(\frac{x}{n}\right).$$

为简便起见，令 $x=n+z$；再用带余项的 Taylor 定理把 $\log(1+z/n)$ 展开到两项。把这个展开式代入 t^2 的表达式，得到

$$\begin{aligned} t^2 &= z - n\left[\frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2(1+\theta z/n)^2}\right] \\ &= \frac{nz^2}{2(n+\theta z)^2}, \end{aligned}$$

其中 $\theta=\theta(t)$ 随 t（等价地随 x）而定，并且在每一点都有 $0<\theta(t)<1$。由此依次得到

$$\frac{n}{z} + \theta = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

以及

$$\frac{2tx}{x-n} = 2t\left(\frac{n}{z}+1\right) = 2\left[\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\theta)t\right].$$

于是应用变量代换公式，

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) = 2n^n e^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \\ + 2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)t\,dt. \end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第一个积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

至于第二个积分，由于我们不知道 θ，虽不能精确计算，却至少能把它的值夹在两个固定界限之间。它在 $-\infty$ 与零之间的每一个微元都为负，在零与 $+\infty$ 之间的每一个微元都为正；而且这两部分积分的绝对值分别都小于

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2n}\,n^n e^{-n}\left(\sqrt{\pi} + \frac{\omega}{\sqrt{2n}}\right), \qquad -1 < \omega < 1. \tag{43}$$

当 n 很大时，$\omega/\sqrt{2n}$ 很小。因此，若把

$$\Gamma(n+1) \approx n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$$

取作 $\Gamma(n+1)$ 的近似值，相对误差很小，尽管绝对误差可能相当大。对 (43) 两边取对数，得到

$$\log\Gamma(n+1) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \varepsilon, \tag{44}$$

其中当 n 很大时，ε 很小。略去 ε，便得到一个叫作 $\log\Gamma(n+1)$ 的*渐近值*的表达式。这个公式使我们对阶乘的数量级有了一个概念。

142.　d'Alembert 定理

累次积分换序公式（原文称“积分号下积分公式”）适用于在积分矩形内连续的任何函数 $f(x,y)$。因此，如果按两种不同的积分次序计算 $f(x,y)$ 得到不同结果，就可以断定 $f(x,y)$ 至少在积分区域的一点不连续。Gauss 从这个事实推出了 d'Alembert 定理的一个优美证明。

设 $F(z)$ 是 z 的一个 m 次多项式。为明确起见，先假定它的全部系数都为实数。若常数项 $A_m = 0$，则 $z = 0$ 已经是一个根；所以下面只需考察 $A_m \neq 0$ 的情形。把 z 换成

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

并分离实部与虚部，得到

$$F(z) = P + iQ,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中

$$P = A_0\rho^m \cos m\omega + A_1\rho^{m-1}\cos(m-1)\omega + \cdots + A_m,$$

$$Q = A_0\rho^m \sin m\omega + A_1\rho^{m-1}\sin(m-1)\omega + \cdots + A_{m-1}\rho\sin\omega.$$

在 $P^2+Q^2\neq 0$ 的区域内，可局部选取

$$V = \arctan\frac{P}{Q}$$

的一个连续分支。不同分支只相差常数，所以下列导数是单值的:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{Q\,\dfrac{\partial P}{\partial\rho} - P\,\dfrac{\partial Q}{\partial\rho}}{P^2+Q^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial\omega} = \frac{Q\,\dfrac{\partial P}{\partial\omega} - P\,\dfrac{\partial Q}{\partial\omega}}{P^2+Q^2}.$$

无需实际完成计算，也显然可知混合二阶导数具有形式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega} = \frac{M}{(P^2+Q^2)^2},$$

其中 M 是 ρ,ω 的连续函数。这个二阶导数只可能在 P,Q 同时为零的 ρ,ω 值处不连续，也就是说，只可能在方程 $F(z)=0$ 的根处不连续。

所以，如果能证明对于某个给定的 R，两个积分

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}\,d\rho, \qquad \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}\,d\omega \tag{45}$$

不相等，就可以断定方程 $F(z)=0$ 至少有一个绝对值小于 R 的根。但第二个积分恒为零，因为

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}\,d\omega = \left[\frac{\partial V}{\partial\rho}\right]_{\omega=0}^{\omega=2\pi},$$

而 $\partial V/\partial\rho$ 是 ω 的一个以 2π 为周期的函数。

以同样方式计算第一个积分，得到

$$\int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}\,d\rho = \left[\frac{\partial V}{\partial\omega}\right]_{\rho=0}^{\rho=R}.$$

由于 $A_m\neq 0$，在 $\rho=0$ 时 $P=A_m, Q=0$，并且 P,Q 对 ω 的导数都为零；因而 $\partial V/\partial\omega = 0$。另一方面，容易证明

$$\frac{\partial V}{\partial\omega} = \frac{-mA_0^2\rho^{2m}+\cdots}{A_0^2\rho^{2m}+\cdots},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中未写出的各项关于 ρ 的次数都低于 $2m$，而分子中没有不含 ρ 的项。当 ρ 无限增大时，右端关于 ω 一致地趋近于 $-m$；这是因为低次项的系数都是有界的三角多项式。因此可以把 R 取得足够大，使得在 $\rho = R$ 时

$$\frac{\partial V}{\partial \omega} = -m + \varepsilon_R(\omega), \qquad |\varepsilon_R(\omega)| < m \quad (0 \le \omega \le 2\pi).$$

于是

$$\int_0^{2\pi} \left[-m + \varepsilon_R(\omega)\right] d\omega < 0,$$

所以 (45) 中第一个积分不可能为零。这就证明了 d'Alembert 定理。对一般复系数多项式，只须先乘以一个非零常数使首项系数成为正实数，再分离实部与虚部；同一主项估计仍然成立。

习题

1. 在直角坐标中，悬链线由方程

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

定义。在它的任一点作切线，并延长至与 x 轴相交于点 T。把整个图形绕 x 轴旋转；求悬链线弧 AM（A 为悬链线顶点）所扫成的面积与切线段 MT 所扫成的面积之差：

1）把它表示为点 M 的横坐标的函数；

2）把它表示为点 T 的横坐标的函数。

〔巴黎 Licence 考试，1889〕

2. 在通常的三直角坐标系中，按如下方式生成一个直纹曲面：平面 zOA 绕 x 轴旋转；同时，位于这个平面内的母线 D 同 z 轴成一个正切为 λ 的定角，并在 OA 上截得线段

$$OC = \lambda a \theta,$$

其中 a 是给定长度，θ 是平面 zOx 与 zOA 之间的角。

1）求由这个直纹曲面以及平面 xOy, zOx, zOA 所围立体的体积，其中后两个平面之间的角 $\theta < 2\pi$；

2）求由平面 xOy, zOx, zOA 所界曲面部分的面积。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

〔巴黎 Licence 考试，1882 年 7 月〕

3. 求由 xy 平面、柱面

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

以及直角坐标方程为

$$\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$$

的椭圆抛物面所围立体的体积。

〔巴黎 Licence 考试，1882〕

4. 求由共焦二次曲线族

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$$

中分别令

$$\lambda = \frac{c^2}{3}, \quad \frac{2c^2}{3}, \quad \frac{4c^2}{3}, \quad \frac{5c^2}{3}$$

所确定的四条曲线围成的曲边四边形面积。

〔Besançon Licence 考试，1886〕

5. 考虑曲线

$$y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x),$$

其中 x, y 是一点的直角坐标，并且 x 从 $\pi/4$ 变到 $5\pi/4$。求：

1）这条曲线与 x 轴之间的面积；

2）把这条曲线绕 x 轴旋转所得立体的体积；

3）同一立体的侧面积。

〔Montpellier Licence 考试，1898〕

6. 在通常的直角坐标平面内，设 A, B 是 y 轴上任意两点，AMB 是连接 A, B 的任意曲线；它同直线段 AB 一起围成面积为预先给定的量 S 的区域 $AMBA$。求沿曲线 AMB 取得的定积分

$$\int \left[\phi(y)e^x - my\right]dx + \left[\phi'(y)e^x - m\right]dy$$

的值，其中 m 是常数，而函数 $\phi(y)$ 及其导数 $\phi'(y)$ 都连续。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

〔Nancy Licence 考试，1895〕

7. 用两种不同方法计算二重积分

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin ax \, dy,$$

证明当 $a \neq 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \text{符号与 } a \text{ 同号.}$$

8. 求旋转椭球面或旋转双曲面夹在两个垂直于旋转轴的平面之间那一部分的侧面积。

9*. 求三个半轴互不相等的椭球的面积。总面积 A 的一半由二重积分

$$\frac{A}{2} = \iint \sqrt{\frac{1 - \dfrac{a^2 - c^2}{a^4} x^2 - \dfrac{b^2 - c^2}{b^4} y^2}{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}} \, dx \, dy$$

给出，积分区域是椭圆

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

的内部。在把这个二重积分约化为椭圆积分的各种方法中，最简单的方法之一由 Catalan 给出，它采用 §125 中所用的变换。把二重积分的被积函数记作 v，并令 v 从 1 变到 $+\infty$，容易证明：这个二重积分等于当 l 变为无穷大时下列差的极限：

$$\frac{\pi abl(l^2 - 1)}{\sqrt{\left(l^2 - 1 + \dfrac{c^2}{a^2}\right)\left(l^2 - 1 + \dfrac{c^2}{b^2}\right)}} - \pi ab \int_1^l \frac{(v^2 - 1) \, dv}{\sqrt{\left(v^2 - 1 + \dfrac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2 - 1 + \dfrac{c^2}{b^2}\right)}}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这个表达式是不定式；但可以写成

$$\int_1^l \frac{v^2\,dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}$$
$$=\left[\frac{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}{v}\right]_1^l$$
$$+\int_1^l \frac{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}.$$

所以容易看出，上述极限等于

$$\pi ab\left[\frac{c^2}{ab}+\int_1^{+\infty}\frac{dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\int_1^{+\infty}\frac{dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right].$$

10*. 从半轴为 a, b, c 的椭球中心向椭球的切平面作垂线，则垂足轨迹曲面的面积，等于半轴分别为

$$\frac{bc}{a},\qquad \frac{ac}{b},\qquad \frac{ab}{c}$$

的椭球面积。

〔William Roberts, *Journal de Liouville*, Vol. XI, 1st series, p. 81〕

11. 用两种不同方法计算函数

$$(x-y)^n f(y)$$

在由直线

$$y = x_0, \qquad y = x, \qquad x = X$$

围成的三角形内部的二重积分，从而建立公式

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\,dy = \int_{x_0}^{X} \frac{(X-y)^{n+1}}{n+1} f(y)\,dy.$$

由此推出下列 $(n+1)$ 重积分公式（各层积分的上限是上一层的积分变量）：

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{x_0}^{t_{n-1}} dt_n \int_{x_0}^{t_n} f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\,dy. \end{aligned}$$

中译者校记（底本原误）。1904 年英译本与现代重排本都把右端分母排作 $(n-1)!$，并且反复使用同一个字母 x 作各层哑变量，容易混淆。由前一二重积分公式逐层迭代，或同下一个加权重复积分公式比较，分母应为 $n!$。本译稿据此订正，并把各层积分变量显式区分。

用同样方法推出

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} t_1\,dt_1 \int_{x_0}^{t_1} t_2\,dt_2 \cdots \int_{x_0}^{t_{n-1}} t_n\,dt_n \int_{x_0}^{t_n} f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n} \int_{x_0}^{x} (x^2-y^2)^n f(y)\,dy, \end{aligned}$$

并用积分号下求导法验证这些公式。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 7 章

多重积分；全微分的积分

I. 多重积分；变量代换

143. 三重积分

设 $F(x, y, z)$ 是三个变量 x, y, z 的函数，并且对于有限空间区域 (E) 中的一切点 M 都连续；点 M 的直角坐标为 (x, y, z)，区域 (E) 由一个或若干个闭曲面围成。把这个区域分成若干子区域

$$(e_1), (e_2), \ldots, (e_n),$$

它们的体积分别为 $v_1, v_2, \ldots, v_n$；再设 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是子区域 (e_i) 中任一点 m_i 的坐标。那么，当子区域 (e_i) 的数目无限增多，并使这些子区域的直径的最大值趋近于零时，和

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i \tag{1}$$

趋近于一个极限。这个极限叫作函数 $F(x, y, z)$ 遍及区域 (E) 的*三重积分*，用符号

$$\iiint_{(E)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{2}$$

表示。证明这个极限存在，实际上只须重复前面关于二重积分所给出的证明。

三重积分出现在力学的各种问题中，例如求一个立体的质量或重心。设区域 (E) 充满一种非均匀物质，并设 $\mu(x, y, z)$ 是任一点处的密度；也就是说，以点 (x, y, z) 为心的一个无穷小球内所含的质量与该球体积之比的极限。如果 μ_1

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

与 μ_2 分别是 μ 在子区域 (e_i) 中的最大值与最小值，那么这个子区域内的质量显然介于 $\mu_1 v_i$ 与 $\mu_2 v_i$ 之间；因而它等于

$$v_i \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i),$$

其中 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是子区域 (e_i) 内适当选取的一点。于是总质量等于遍及区域 (E) 的三重积分

$$\iiint_{(E)} \mu \, dx \, dy \, dz.$$

三重积分的计算可以化为依次计算三个单积分。先假定区域 (E) 是由六个平面

$$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y, \quad z = z_0, \quad z = Z$$

围成的长方体。用平行于三个坐标面的平面把 (E) 分成较小的长方体。其中一个小长方体的体积为

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})(z_l - z_{l-1}),$$

而我们须求和

$$S = \sum_i \sum_k \sum_l F(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})(z_l - z_{l-1}) \tag{3}$$

的极限；这里点 $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ 是相应长方体内的任一点。

先计算 S 中来自由四个平面

$$x = x_{i-1}, \quad x = x_i, \quad y = y_{k-1}, \quad y = y_k$$

所界那一列小长方体的部分, 并把所有点 $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ 取在直线 $x = x_{i-1}, y = y_{k-1}$ 上。这一列长方体给出和

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})\big[F(x_{i-1}, y_{k-1}, \zeta_1)(z_1 - z_0) + \cdots\big].$$

如同在 §123 中一样，可以选择各个 ζ，使方括号内的量等于单积分

$$\Phi(x_{i-1}, y_{k-1}) = \int_{z_0}^{Z} F(x_{i-1}, y_{k-1}, z) \, dz.$$

于是只须再求和

$$\sum_i \sum_k (x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) \Phi(x_{i-1}, y_{k-1})$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的极限。但这个极限正是函数 $\Phi(x,y)$ 遍及由直线

$$x=x_0,\quad x=X,\quad y=y_0,\quad y=Y$$

所成矩形的二重积分

$$\iint \Phi(x,y)\,dx\,dy.$$

因此三重积分等于

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \Phi(x,y)\,dy,$$

或者把 $\Phi(x,y)$ 换成它的值，等于

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} F(x,y,z)\,dz. \tag{4}$$

这个符号的意义十分清楚。在第一次积分时，x 与 y 应看作常量。所得结果是 x,y 的函数；然后把 x 看作常量，以 y 为变量，在限 y_0 与 Y 之间积分。第二次积分的结果仅为 x 的函数，最后一步是在限 x_0 与 X 之间对此函数积分。

显然，计算的次序同三个字母的排列数一样多，即共有六种。例如，三重积分也等于

$$\int_{z_0}^{Z} dz \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} F(x,y,z)\,dy = \int_{z_0}^{Z} \Psi(z)\,dz,$$

其中 $\Psi(z)$ 表示函数 $F(x,y,z)$ 遍及由直线 $x=x_0, x=X, y=y_0, y=Y$ 所成矩形的二重积分。也可以从和 S 中来自由两个平面 $z=z_{l-1}$ 与 $z=z_l$ 所界那一层长方体的部分出发，重新得到这个公式。适当选择点 (ξ,η,ζ)，这一层对 S 的贡献为

$$\Psi(z_{l-1})(z_l-z_{l-1}),$$

其余推理同上。

144. 一般区域上的三重积分

现在考虑一个以任意方式围成的空间区域，并把它分成若干子区域，使平行于某一适当选定的固定直线的任一直线，同围住任一子区域的曲面至多相交于两点。显然不失一般性，可以只考虑这样的情形：平行于 z 轴的直线同边界曲面至多相交于两点。边界曲面上的各点投影到 xy 平面上，得到闭轮廓 C 所

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

围的区域 A。对 C 内每一点 (x, y)，边界曲面上有两点同它对应，这两点的 z 坐标为

$$z_1 = \phi_1(x, y), \qquad z_2 = \phi_2(x, y).$$

我们假定函数 ϕ_1, ϕ_2 在 C 内连续，并且 $\phi_1 < \phi_2$。

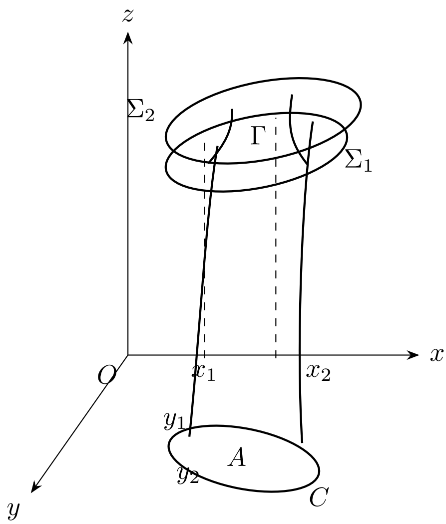


图 32

现在用平行于各坐标面的平面分割所考察的区域。有些分块是长方体的一部分。由四个平面

$$x = x_{i-1}, \quad x = x_i, \quad y = y_{k-1}, \quad y = y_k$$

所界那一列小块对和 (1) 的贡献，由 §124，等于

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) \left[\int_{z_1}^{z_2} F(x_{i-1}, y_{k-1}, z)\, dz + \varepsilon_{ik} \right],$$

其中，只要把这些平行平面取得充分接近，$|\varepsilon_{ik}|$ 就可以小于任意预先指定的数 ε。和

$$\sum_i \sum_k \varepsilon_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})$$

以零为极限。因此，所论三重积分等于遍及轮廓 C 所围区域 (A) 的二重积分

$$\iint_{(A)} \Phi(x, y)\, dx\, dy,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中函数 $\Phi(x,y)$ 由方程

$$\Phi(x,y)=\int_{z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz$$

定义。

如果平行于 y 轴的直线同轮廓 C 至多相交于两点, 而这两点的坐标分别为

$$y=\psi_1(x),\qquad y=\psi_2(x),$$

同时 x 从 x_1 变到 x_2，那么三重积分也可以写成

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz. \tag{5}$$

限 z_1,z_2 同时依赖于 x,y；限 y_1,y_2 只是 x 的函数；最后，限 x_1,x_2 是常量。像二重积分一样，可以颠倒积分次序，但对于不同的积分次序，各积分限一般完全不同。

注。设 $\Psi(x)$ 是由二重积分

$$\Psi(x)=\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz$$

给出的 x 的函数；这个二重积分遍及给定区域被横坐标为 x、平行于 yz 平面的平面所截得的截面。公式 (5) 可以写成

$$\int_{x_1}^{x_2}\Psi(x)\,dx.$$

这正是从由两个平面 $x=x_{i-1}$ 与 $x=x_i$ 所界的一层子区域出发时得到的结果。适当选择点 (ξ,η,ζ)，这一层对总和的贡献为

$$\Psi(x_{i-1})(x_i-x_{i-1}).$$

例。求三重积分

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz$$

遍及球 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限中的八分之一部分时的值。若先对 z 积分，再对 y 积分，最后对 x 积分，积分限如下：当 x,y 已给定时，z 从零变到

$\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；当 x 已给定时，y 从零变到 $\sqrt{R^2-x^2}$；而 x 本身从零变到 R。因此所求积分为

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz.$$

依次得到

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}(R^2-x^2)y - \frac{1}{6}y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2}.$$

于是只须计算定积分

$$\frac{1}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^{3/2}\,dx;$$

作代换 $x = R\cos\phi$，它变成

$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} R^4 \sin^4\phi\,d\phi.$$

所以由 §116，原三重积分的值为 $\pi R^4/16$。

145.　变量代换

设

$$\begin{cases} x = f(u,v,w), \\ y = \phi(u,v,w), \\ z = \psi(u,v,w) \end{cases} \tag{6}$$

是若干变换公式，它们在区域 (E) 的各点同另一区域 (E_1) 的各点之间建立一一对应。我们把 u, v, w 看作一点关于另一组直角坐标轴的直角坐标；这组坐标轴一般不同于原来那一组。如果函数 $F(x,y,z)$ 在区域 (E) 中处处连续，则恒有

$$\begin{aligned} \iiint_{(E)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(E_1)} & F\big(f(u,v,w), \phi(u,v,w), \psi(u,v,w)\big) \\ & \times \left|\frac{D(f,\phi,\psi)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw. \end{aligned} \tag{7}$$

这就是三重积分的变量代换公式；两个积分分别遍及区域 (E) 与 (E_1)。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

为证明公式 (7) 总是成立，先注意：如果它对两个或若干个特殊变换成立，那么根据函数行列式的熟知性质（§29），它对于依次施行这些变换所得的复合变换也成立。如果这个公式适用于若干空间区域，它也适用于把这些区域合在一起所得的区域。现在像二重积分的情形一样，先证明公式适用于只改变一个自变量、其余自变量都不变的变换，例如

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = \psi(x', y', z'). \tag{8}$$

设两点 $M(x, y, z)$ 与 $M'(x', y', z')$ 都以同一组直角坐标轴为参照，并且平行于 z 轴的直线同围住区域 (E) 的曲面至多相交于两点。公式 (8) 在这个曲面同围住区域 (E') 的另一个曲面之间建立对应。以平行于 z 轴的直线为母线、同时外切于这两个曲面的柱面，同平面 $z = 0$ 相交于闭曲线 C。轮廓 C 内区域 A 的每一点 m，都是第一个曲面上两点 m_1, m_2 的投影；这两点的 z 坐标分别为 z_1, z_2。它同时也是第二个曲面上两点 m_1', m_2' 的投影；这两点的 z' 坐标分别为 z_1', z_2'。选择记号使

$$z_1 < z_2, \qquad z_1' < z_2'.$$

公式 (8) 把点 m_1 变成点 m_1'，或者变成点 m_2'。只须考察 $\partial\psi/\partial z'$ 的符号，就能区别这两种情形。

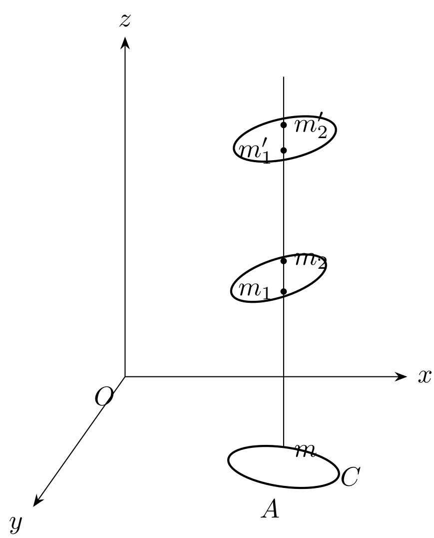


图 33

如果 $\partial\psi/\partial z'$ 为正，则 z 随 z' 增大而增大，点 m_1, m_2 分别变成点 m_1', m_2'。另一方面，如果 $\partial\psi/\partial z'$ 为负，则 z 随 z' 增大而减小，m_1, m_2 分别变成 m_2', m_1'。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在前一种情形中有

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x,y,z)\,dz = \int_{z_1'}^{z_2'} F\big[x,y,\psi(x,y,z')\big]\frac{\partial\psi}{\partial z'}\,dz',$$

而在后一种情形中有

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x,y,z)\,dz = -\int_{z_1'}^{z_2'} F\big[x,y,\psi(x,y,z')\big]\frac{\partial\psi}{\partial z'}\,dz'.$$

无论哪一种情形，都可以写成

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x,y,z)\,dz = \int_{z_1'}^{z_2'} F\big[x,y,\psi(x,y,z')\big]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|\,dz'. \tag{9}$$

现在把等式 (9) 的两端分别在区域 A 上取二重积分。左端的二重积分

$$\iint_{(A)} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} F(x,y,z)\,dz$$

正是函数 $F(x,y,z)$ 遍及区域 (E) 的三重积分。类似地，等式 (9) 右端的二重积分，等于函数

$$F\big[x',y',\psi(x',y',z')\big]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|$$

遍及区域 (E') 的三重积分；只须分别把 x,y 换成 x',y'，这一点立即可见。因此在这个特殊情形中有

$$\iiint_{(E)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(E')} F\big[x',y',\psi(x',y',z')\big]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|\,dx'\,dy'\,dz'.$$

但在这里，行列式 $D(x,y,z)/D(x',y',z')$ 就化为 $\partial\psi/\partial z'$。所以公式 (7) 对变换 (8) 成立。

其次，公式 (7) 也适用于如下类型的变换：

$$x = f(x',y',z'),\qquad y = \phi(x',y',z'),\qquad z = z', \tag{10}$$

其中变量 z 保持不变。假设公式 (10) 在两个区域 (E) 与 (E') 的各点之间建立一一对应；特别地，任一平行于 xy 平面的平面在 (E) 与 (E') 内分别截得的截面 R, R' 也一一对应。于是由二重积分的变换公式有

$$\begin{aligned}\iint_{(R)} F(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_{(R')} & F\big[f(x',y',z'),\phi(x',y',z'),z'\big] \\ & \times\left|\frac{D(f,\phi)}{D(x',y')}\right|\,dx'\,dy'.\end{aligned} \tag{11}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这个等式的两端都只是变量 $z = z'$ 的函数。再把两端在 z 能于区域 (E) 中变化的限 z_1, z_2 之间积分，就得到

$$\iiint_{(E)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(E')} F\big[f(x',y',z'), \phi(x',y',z'), z'\big] \times \left|\frac{D(f,\phi)}{D(x',y')}\right| dx'\,dy'\,dz'. \tag{12}$$

而在这个情形中

$$\frac{D(x,y,z)}{D(x',y',z')} = \frac{D(x,y)}{D(x',y')}.$$

所以公式 (7) 对变换 (10) 也成立。

现在说明任意变量代换

$$x = f(x_1,y_1,z_1), \qquad y = \phi(x_1,y_1,z_1), \qquad z = \psi(x_1,y_1,z_1) \tag{13}$$

都可以由前面两类变换复合而得。事实上，令

$$x' = x_1, \qquad y' = y_1, \qquad z' = z.$$

于是 (13) 的最后一个方程可以写成

$$z' = \psi(x',y',z_1),$$

从而

$$z_1 = \pi(x',y',z').$$

所以方程 (13) 可以用下列六个方程代替:

$$\begin{aligned} x &= f\big[x',y',\pi(x',y',z')\big], \\ y &= \phi\big[x',y',\pi(x',y',z')\big], \\ z &= z', \end{aligned} \tag{14}$$

以及

$$x' = x_1, \qquad y' = y_1, \qquad z' = \psi(x_1,y_1,z_1). \tag{15}$$

我们已经看到，一般公式 (7) 对变换 (14) 与 (15) 分别成立，因而它也对变换 (13) 成立。

读者容易证明，还可以把一般变换 (13) 分解成三个形如 (8) 的变换。

146. 体积元素

在公式 (7) 中令 $F(x,y,z)=1$，便得到

$$\iiint_{(E)} dx\,dy\,dz = \iiint_{(E_1)} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

左端是区域 (E) 的体积。对右端积分应用中值定理，得到关系

$$V = V_1 \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|_{(\xi,\eta,\zeta)}, \tag{16}$$

其中 V_1 是 (E_1) 的体积，而 ξ,η,ζ 是 (E_1) 内某一点的坐标。这个公式同第六章的公式 (17) 完全类似。它表明，函数行列式是两个对应无穷小体积之比的极限。

若在 (6) 中给变量 u,v,w 中任一个指定常值，而让另两个变化，就得到三个曲面族

$$u = 常量, \qquad v = 常量, \qquad w = 常量.$$

借助它们可以把区域 (E) 分成类似于前面所用长方体的子区域；每个子区域由六个曲面片围成。由曲面

$$(u), (u+du), (v), (v+dv), (w), (w+dw)$$

所界的一个这样的子区域，其体积由 (16) 为

$$\Delta V = \left[\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| + \varepsilon\right] du\,dv\,dw,$$

其中 du, dv, dw 是正增量，而 ε 同 du, dv, dw 一起为无穷小。正如已经多次说明的那样（§128），项 $\varepsilon\,du\,dv\,dw$ 可以略去。乘积

$$dV = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \tag{17}$$

是无穷小量 ΔV 的主部，叫作曲线坐标系 (u,v,w) 中的*体积元素*。

设 ds^2 是同一坐标系中的线元平方。由 (6),

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw,$$

对 dy, dz 也有类似公式。平方后相加，得到

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= H_1 du^2 + H_2 dv^2 + H_3 dw^2 + 2F_1\,dv\,dw + 2F_2\,du\,dw + 2F_3\,du\,dv, \end{aligned} \tag{18}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这里采用记号

$$H_1=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\qquad H_2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\qquad H_3=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2,$$

$$F_1=\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},\qquad F_2=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w},\qquad F_3=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

像往常一样，符号 $\sum$ 表示依次把 x 换成 y,z，并把所得各项相加。

体积元素的公式很容易由这个线元公式推出。事实上，按照通常的法则把函数行列式平方，得到

$$\begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}=M, \tag{19}$$

因而体积元素等于

$$dV=\sqrt{M}\,du\,dv\,dw.$$

特别考察十分重要的情形: 坐标曲面 $(u),(v),(w)$ 构成一个三重正交系; 也就是说，通过空间任一点的三个曲面两两正交相交。两两曲面交线在该点的切线构成一个三直角三面角。因此必有

$$F_1=F_2=F_3=0,$$

而这些条件也是充分的。于是 dV 与 ds^2 的公式化为简单形式

$$ds^2=H_1du^2+H_2dv^2+H_3dw^2,\qquad dV=\sqrt{H_1H_2H_3}\,du\,dv\,dw. \tag{20}$$

这些公式也可由无穷小几何中的若干考虑推出。设 du,dv,dw 都很小，用一个由平面所围成的微小长方体来代替上面定义的小子区域。略去高阶无穷小后，这个长方体相邻的三条棱可以分别取为

$$\sqrt{H_1}\,du,\qquad \sqrt{H_2}\,dv,\qquad \sqrt{H_3}\,dw.$$

公式 (20) 表明，线元和体积元素分别等于这个长方体的对角线和体积。类似地，一个面的面积

$$\sqrt{H_1H_2}\,du\,dv$$

表示曲面 (w) 的面积元素。

作为例子，考察到球极坐标的变换

$$x=\rho\sin\theta\cos\phi,\qquad y=\rho\sin\theta\sin\phi,\qquad z=\rho\cos\theta, \tag{21}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 ρ 表示点 $M(x,y,z)$ 到原点的距离，θ 表示 OM 同 z 轴正向所成的角，而 ϕ 表示 OM 在 xy 平面上的投影同 x 轴正向所成的角。为遍历空间中的一切点，只须令 ρ 从零变到 $+\infty$，θ 从零变到 π，ϕ 从零变到 2π。由 (21) 得

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\phi^2, \tag{22}$$

从而

$$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi. \tag{23}$$

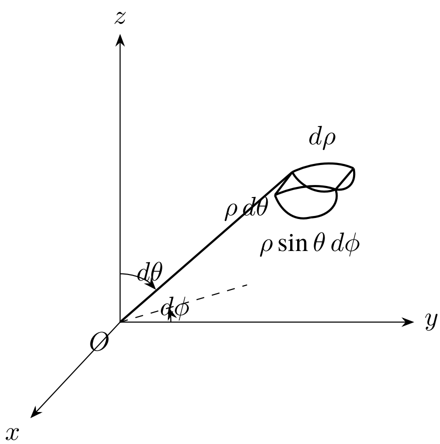


图 34

不过，这些公式不作任何计算也能得到。三个曲面族 $(\rho), (\theta), (\phi)$ 分别是以原点为心的同心球面、以 z 轴为旋转轴且顶点在原点的旋转圆锥面，以及通过 z 轴的平面。它们显然构成一个三重正交系；从图中可以看出，基本子区域的三个尺度为

$$d\rho, \qquad \rho\, d\theta, \qquad \rho \sin\theta\, d\phi.$$

公式 (22) 与 (23) 立即由此得到。

设闭曲面 S 围成一个含原点的区域，并且从原点出发的任一射线同 S 至多相交于一点。要用变量 ρ, θ, ϕ 计算遍及该区域的三重积分，应令 ρ 从零变到 R，其中 $R = R(\theta, \phi)$ 是曲面方程；令 θ 从零变到 π，而 ϕ 从零变到 2π。例如，这个曲面所围的体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta\, d\rho.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第一次积分总能作出，因而可写成

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{R^3 \sin\theta}{3}\, d\theta.$$

有时也使用柱坐标 r, ω, z，它们由方程

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = z$$

定义。显然

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + dz^2, \qquad dV = r\, d\omega\, dr\, dz.$$

147. 椭圆坐标

由方程

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} - 1 = 0, \qquad a > b > c > 0, \tag{24}$$

表示的曲面，其中 λ 是变量参数，构成一个共焦二次曲面族。空间中每一点都通过这个曲面族中的三个曲面：一个椭球面、一个双叶双曲面和一个单叶双曲面。事实上，方程 (24) 总有一个根 λ_1 位于 b, c 之间，另一个根 λ_2 位于 a, b 之间，第三个根 λ_3 大于 a。这三个根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 叫作直角坐标为 (x, y, z) 的点的*椭圆坐标*。

这个曲面族中任意两个曲面都正交相交。例如，在 (24) 中依次令 $\lambda = \lambda_1$ 与 $\lambda = \lambda_2$，把所得两个方程相减，再除以 $\lambda_1 - \lambda_2$，便得到

$$\frac{x^2}{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)} + \frac{z^2}{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 - c)} = 0, \tag{25}$$

它表明两个曲面 (λ_1) 与 (λ_2) 彼此正交。

为了把 x, y, z 表示成 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的函数，注意恒等式

$$\begin{aligned}(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) &- x^2(\lambda - b)(\lambda - c)\\ &- y^2(\lambda - c)(\lambda - a) - z^2(\lambda - a)(\lambda - b)\\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

恒成立。在这个恒等式中依次令 $\lambda = a, b, c$，得到

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(\lambda_3 - a)(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}{(a-b)(a-c)}, \\[2ex] y^2 = \dfrac{(\lambda_3 - b)(\lambda_2 - b)(b - \lambda_1)}{(a-b)(b-c)}, \\[2ex] z^2 = \dfrac{(\lambda_3 - c)(\lambda_2 - c)(\lambda_1 - c)}{(a-c)(b-c)}. \end{cases} \tag{26}$$

于是取对数微分，得到

$$dx = \frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - a} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - a} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - a}\right),$$

$$dy = \frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - b} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - b} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - b}\right),$$

$$dz = \frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - c} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - c} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - c}\right).$$

把平方相加，由 (25) 及类似关系，含 $d\lambda_1 d\lambda_2$、$d\lambda_2 d\lambda_3$、$d\lambda_3 d\lambda_1$ 的各项必定消失。因此 $d\lambda_1^2$ 的系数为

$$M_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(\lambda_1 - a)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)^2} + \frac{z^2}{(\lambda_1 - c)^2}\right],$$

或者用 (26) 代入 x, y, z 并化简，得到

$$M_1 = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)(\lambda_1 - c)}. \tag{27}$$

$d\lambda_2^2$ 与 $d\lambda_3^2$ 的系数 M_2, M_3，分别由这个表达式对各字母作循环置换得到。因此体积元素为

$$dV = \sqrt{M_1 M_2 M_3}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3. \tag{α}$$

148.　Dirichlet 积分

考察三重积分

$$\iiint x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s\, dx\, dy\, dz,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

积分区域是由四个平面

$$x=0,\qquad y=0,\qquad z=0,\qquad x+y+z=1$$

所成四面体的内部。令

$$x+y+z=\xi,\qquad y+z=\xi\eta,\qquad z=\xi\eta\zeta,$$

其中 ξ,η,ζ 是三个新变量。这些公式也可以写成

$$\xi=x+y+z,\qquad \eta=\frac{y+z}{x+y+z},\qquad \zeta=\frac{z}{y+z},$$

而反变换为

$$x=\xi(1-\eta),\qquad y=\xi\eta(1-\zeta),\qquad z=\xi\eta\zeta.$$

当 x,y,z 全为正且 $x+y+z<1$ 时，ξ,η,ζ 全都介于零与一之间。反过来，如果 ξ,η,ζ 全都介于零与一之间，那么 x,y,z 全为正且 $x+y+z<1$。所以这个四面体变成一个立方体。

为计算函数行列式，引入辅助变换

$$X=\xi,\qquad Y=\xi\eta,\qquad Z=\xi\eta\zeta;$$

于是

$$x=X-Y,\qquad y=Y-Z,\qquad z=Z.$$

因此函数行列式为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}\frac{D(X,Y,Z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\xi^2\eta.$$

原三重积分遂变成

$$\int_0^1 d\xi\int_0^1 d\eta\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s\eta^{q+r+1}(1-\eta)^p\zeta^r(1-\zeta)^q\,d\zeta.$$

被积函数是一个 ξ 的函数、一个 η 的函数和一个 ζ 的函数的乘积。因此三重积分可以写成

$$\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s\,d\xi\times\int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p\,d\eta$$
$$\times\int_0^1 \zeta^r(1-\zeta)^q\,d\zeta,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

或者引入 Γ 函数（参见公式 (33)），写成

$$\frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \times \frac{\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \times \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)}.$$

约去公因子，最后得到原三重积分的值

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \tag{28}$$

中译者说明。对实参数而言，上述积分及三个 Beta 积分收敛，须有

$$p > -1, \qquad q > -1, \qquad r > -1, \qquad s > -1.$$

原书没有明写这一条件；若作复参数推广，则相应要求各参数的实部大于 -1。

149.　Green 定理

可以为三重积分推出一个同 §126 的公式 (15) 完全类似的公式。先考察一个闭曲面 S，任何平行于 z 轴的直线同它至多相交于两点；再考察函数 $R(x, y, z)$，并假定它和 $\partial R/\partial z$ 在这个曲面内部处处连续。曲面 S 的所有点投影到 xy 平面上，得到由闭轮廓 C 围成的区域 A。对于 C 内区域 A 的每一点，S 上有两点同它对应，这两点的 z 坐标为

$$z_1 = \phi_1(x, y), \qquad z_2 = \phi_2(x, y).$$

曲面 S 因而分成两个不同的部分 S_1, S_2。我们假定 $z_1 < z_2$。

现在考察遍及闭曲面 S 所围区域的三重积分

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

先对 z 在限 z_1, z_2 之间积分（§144），得到

$$R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1).$$

所以原三重积分等于区域 A 上的二重积分

$$\iint_{(A)} \left[R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)\right] dx\, dy.$$

但是，二重积分

$$\iint_{(A)} R(x, y, z_2)\, dx\, dy$$

等于取遍曲面 S_2 上侧的曲面积分（§135）

$$\iint_{(S_2)} R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

类似地，$R(x, y, z_1)$ 的二重积分变号后，等于取遍 S_1 下侧的曲面积分

$$\iint_{(S_1)} R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

把这两个积分相加，可以写成

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

其中曲面积分应取遍曲面 S 的整个外侧。

利用前面在类似情形中已经多次使用的方法，可以把这个公式推广到由任意形状曲面围成的区域。再对字母 x, y, z 作置换，得到类似公式

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint P(x, y, z)\, dy\, dz,$$

$$\iiint \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint Q(x, y, z)\, dz\, dx.$$

把这三个公式相加，最后得到三重积分的一般 Green 定理:

$$\begin{aligned} &\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \\ &\quad = \iint P(x, y, z)\, dy\, dz + \iint Q(x, y, z)\, dz\, dx + \iint R(x, y, z)\, dx\, dy, \end{aligned} \tag{29}$$

其中各曲面积分同上面一样，都应取遍边界曲面的外侧。

例如，依次令

$$P = x,\ Q = R = 0; \qquad Q = y,\ P = R = 0; \qquad R = z,\ P = Q = 0,$$

便可看出，由 S 围成的立体的体积，等于下面任一个曲面积分:

$$\iint x\, dy\, dz, \qquad \iint y\, dz\, dx, \qquad \iint z\, dx\, dy.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

150. 多重积分

前面为二重积分和三重积分所给出的纯解析定义，可以推广到任意多个变量。这里只简述一般过程。

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 n 个自变量。为简便起见，我们说这些变量的一组值

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$$

表示 n 维空间中的一点。任一方程

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

如果左端是连续函数，就说它表示一个曲面；如果 F 是一次函数，就说这个方程表示一个平面。考察所有坐标满足某些形如

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{30}$$

的不等式的点。我们说这些点的全体在 n 维空间中构成一个区域 D。如果对于这个区域内的一切点，每个坐标 x_i 的绝对值都小于某个固定数，就说区域 D 是有限的。如果定义 D 的不等式具有形式

$$x_1^0 \leq x_1 \leq X_1, \qquad x_2^0 \leq x_2 \leq X_2, \qquad \ldots \qquad x_n^0 \leq x_n \leq X_n, \tag{31}$$

我们就把这个区域叫作一个矩形棱柱体（即 n 维矩形体），并把 n 个正量

$$X_i - x_i^0$$

叫作这个矩形棱柱体的尺度。最后，如果在区域 D 的某一点，(30) 中至少有一个函数 ψ_i 消失，就说该点位于区域的边界上。

现在设 D 是有限区域，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是在这个区域内连续的函数。用平行于各平面

$$x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

的平面把 D 分成若干子区域，并考察这些平面所确定、完全位于区域 D 内的任一个棱柱体。设

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$$

是这个矩形棱柱体的尺度，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 是其中某一点的坐标。那么，对完全位于区域 D 内的一切矩形棱柱体所组成的和

$$S = \sum f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n \tag{32}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

有如下性质：当矩形棱柱体的数目无限增多，并使每一个矩形棱柱体的一切尺度都趋近于零时，这个和趋近于一个极限 I。我们把极限 I 叫作函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在区域 D 上的 n 重积分，并用符号

$$I = \int\int \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

表示。

一个 n 重积分的计算可以化为依次计算 n 个单积分。为一般地说明这一点，只须证明：如果这个结论对 $(n-1)$ 重积分成立，那么它也对 n 重积分成立。为此，考察 D 中任一点

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

暂且略去变量 x_n，点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ 显然在 $(n-1)$ 维空间中描出一个区域 D'。假设对于 D' 内任一点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$，$D$ 的边界上恰有两点同它对应，它们的坐标分别为

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(1)}), \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(2)}),$$

其中 $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}$ 是在区域 D' 内关于 $n-1$ 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 的连续函数。如果这个条件不满足，就把区域 D 分成足够小的若干区域，使每个部分区域都满足它。

现在考察区域 D 中对应于同一点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ 的那一列矩形棱柱体。像在 §124 的类似情形中那样，容易证明，和 S 中来自这一列矩形棱柱体的部分是

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_{n-1} \left[\int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n + \varepsilon \right],$$

其中，只要把各量 Δx_i 取得充分小，$|\varepsilon|$ 就可以小于任意正数。若令

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n, \tag{33}$$

则积分 I 显然等于和

$$\sum \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_{n-1}$$

的极限；也就是说，等于区域 D' 上的 $(n-1)$ 重积分

$$I = \int\int \cdots \int \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \cdots dx_{n-1}. \tag{34}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

既然已经假定这一法则对 $(n-1)$ 重积分成立，由数学归纳法显然可知它一般成立。

也可以采用另一种方法。考察所有满足坐标 x_n 取固定值的点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$。于是点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ 在 $(n-1)$ 维空间中描出一个区域 δ；容易证明，n 重积分 I 也等于

$$I = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} \theta(x_n)\, dx_n, \tag{35}$$

其中 $\theta(x_n)$ 是遍及区域 δ 的 $(n-1)$ 重积分

$$\int\int\cdots\int f\, dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

不论采用哪一种方法，各次积分的限都依赖于区域 D 的性质，并且对于不同的积分次序一般也不同。只有一种例外：D 是由不等式

$$x_1^0 \leq x_1 \leq X_1, \qquad \ldots \qquad x_n^0 \leq x_n \leq X_n$$

定义的矩形棱柱体。这时多重积分具有形式

$$I = \int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0}^{X_2} dx_2 \cdots \int_{x_n^0}^{X_n} f\, dx_n,$$

而积分次序可以任意置换，不会改变每个变量所对应的积分限。

变量代换公式也可以推广到 n 重积分。设

$$x_i = \phi_i(x_1', x_2', \ldots, x_n'), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{36}$$

是若干变换公式，它们在区域 D' 的点 $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ 同区域 D 的点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 之间建立一一对应。那么有

$$\begin{aligned}
&\int\int\cdots\int_{(D)} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \\
&\quad = \int\int\cdots\int_{(D')} F(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \left| \frac{D(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)}{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')} \right| dx_1' \cdots dx_n'.
\end{aligned} \tag{37}$$

证明同前面各个类似情形中的证明相同。这里只简述论证。

1) 如果公式 (37) 对两个变换分别成立，那么它也对依次施行这两个变换所得的复合变换成立。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

2) 任意变量代换都可由以下两类变换复合而得:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x_{n-1}', \\ &x_n = \phi_n(x_1', x_2', \ldots, x_n'), \end{aligned} \tag{38}$$

以及

$$\begin{aligned} &x_1 = \psi_1(x_1', \ldots, x_n'), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1', \ldots, x_n'), \\ &x_n = x_n'. \end{aligned} \tag{39}$$

3) 由于给定的 n 重积分可以写成 (34) 的形式，公式 (37) 对形如 (38) 的变换成立。由于多重积分还可以写成第二种形式 (35)，同一公式也对形如 (39) 的任何变换成立。这些结论建立在如下假设上：公式 (37) 对 $(n-1)$ 重积分成立。通常的数学归纳法便建立了一般公式。

作为例子，求定积分

$$I = \int\int \cdots \int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)^{\beta} \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 是若干正的常量，积分遍及由不等式

$$0 \le x_1, \quad 0 \le x_2, \quad \ldots, \quad 0 \le x_n, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le 1$$

定义的区域 D。变换

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= \xi_1, \\ x_2 + \cdots + x_n &= \xi_1 \xi_2, \\ &\vdots \\ x_n &= \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \end{aligned}$$

把 D 变成由不等式

$$0 \le \xi_1 \le 1, \quad 0 \le \xi_2 \le 1, \quad \ldots, \quad 0 \le \xi_n \le 1$$

定义的新区域 D'。像在 §148 中一样，容易证明函数行列式的值为

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} = \xi_1^{n-1} \xi_2^{n-2} \cdots \xi_{n-1}.$$

新的被积函数因而具有形式

$$\begin{aligned} &\xi_1^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + n - 1} \xi_2^{\alpha_2 + \cdots + \alpha_n + n - 2} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \\ &\qquad \times (1 - \xi_1)^{\beta} (1 - \xi_2)^{\alpha_1} \cdots (1 - \xi_n)^{\alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

于是同前面一样，原积分可以用 Γ 函数表示：

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)\cdots\Gamma(\alpha_n+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta+n+1)}. \tag{40}$$

中译者说明。原书为简便假定这些参数为正；同一计算在更一般的实参数范围

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta > -1$$

内仍成立，这也正是相应多重积分在各边界面附近收敛的条件。

II. 全微分的积分

151. 一般方法

设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 是两个自变量 x,y 的两个函数。一般说来，表达式

$$P\,dx + Q\,dy$$

并不是 x,y 的某一个函数的全微分。事实上，我们已经看到，方程

$$du = P\,dx + Q\,dy \tag{41}$$

等价于两个彼此不同的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \tag{42}$$

把第一个方程对 y 微分，把第二个方程对 x 微分，可见 $u(x,y)$ 必须同时满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

因此，要存在满足这些要求的函数 $u(x,y)$，必要条件是恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{43}$$

成立。

这个条件在上述局部构造所适用的矩形邻域内也是充分的。事实上，使 (42) 中第一个方程成立的函数 $u(x,y)$ 有无穷多个；它们全由公式

$$u = \int_{x_0}^{x} P(\xi,y)\,d\xi + Y$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

给出，其中 x_0 是任意常量，而 Y 是 y 的任意函数。要使这个函数 $u(x,y)$ 满足方程 (41)，充要条件是它关于 y 的偏导数等于 $Q(x,y)$；也就是说，必须有

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(\xi,y)}{\partial y}\,d\xi + \frac{dY}{dy} = Q(x,y).$$

但是，由所假定的关系 (43)，

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(\xi,y)}{\partial y}\,d\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(\xi,y)}{\partial \xi}\,d\xi = Q(x,y) - Q(x_0,y).$$

所以前一个关系化为

$$\frac{dY}{dy} = Q(x_0,y).$$

这个方程的右端与 x 无关。因此，满足它的 y 的函数也有无穷多个，并且全由

$$Y = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\eta)\,d\eta + C$$

给出；这里 y_0 是 y 的任意一个值，C 是任意常量。于是，满足方程 (41) 的函数 $u(x,y)$ 有无穷多个，它们全由公式

$$u = \int_{x_0}^{x} P(\xi,y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\eta)\,d\eta + C \tag{44}$$

给出，并且彼此只相差一个加性常量 C。

中译者说明。这里的构造是局部的，或者是在包含所用水平、竖直线段的矩形（更一般地，星形或单连通）区域内进行的。在有孔区域中，条件 (43) 只保证局部存在势函数；全局单值性还要排除非零周期，正是 §153 所讨论的问题。

例如，考虑一对函数

$$P = \frac{x+my}{x^2+y^2}, \qquad Q = \frac{y-mx}{x^2+y^2},$$

它们满足条件 (43)。令 $x_0 = 0, y_0 = 1$，则 u 的公式给出

$$u = \int_{0}^{x} \frac{\xi+my}{\xi^2+y^2}\,d\xi + \int_{1}^{y} \frac{d\eta}{\eta} + C.$$

作出所指示的积分，得到

$$u = \frac{1}{2}\left[\log(\xi^2+y^2)\right]_0^x + m\left[\arctan\frac{\xi}{y}\right]_0^x + \log y + C,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

或者化简为

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + m \arctan\frac{x}{y} + C.$$

这个写法是在例如 $y > 0$ 的区域内选定 arctan(x/y) 的连续分支后得到的；在其他不穿过原点的单连通区域内，应相应选取连续的辐角分支（中间的对数写作 $\log|y|$）。

前述方法可以推广到任意多个自变量。这里只对三个变量写出论证。设 P, Q, R 是 x, y, z 的三个函数。于是全微分方程

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{45}$$

等价于三个彼此不同的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \tag{46}$$

分别用两种方法计算三个导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

便得到函数 u 存在所必需的三个条件：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{47}$$

反过来，假定这些方程成立。由其中第一个方程，存在无穷多个函数 $u(x, y, z)$，使它们关于 x, y 的偏导数分别等于 P, Q；这些函数全由

$$u = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y, z)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta, z)\,d\eta + Z$$

给出，其中 Z 表示 z 的任意函数。要使偏导数 $\partial u/\partial z$ 等于 R，充要条件是

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(\xi, y, z)}{\partial z}\,d\xi + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x_0, \eta, z)}{\partial z}\,d\eta + \frac{dZ}{dz} = R$$

成立。利用已经假定成立的关系 (47)，这个条件化为

$$R(x, y, z) - R(x_0, y, z) + R(x_0, y, z) - R(x_0, y_0, z) + \frac{dZ}{dz} \\ = R(x, y, z),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

或者

$$\frac{dZ}{dz} = R(x_0, y_0, z).$$

因此，满足方程 (45) 的函数 $u(x, y, z)$ 有无穷多个，它们全由公式

$$\begin{aligned} u = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y, z)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta, z)\,d\eta \\ + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, \zeta)\,d\zeta + C \end{aligned} \tag{48}$$

给出，其中 x_0, y_0, z_0 是三个任意数值，C 是任意常量。

152. 积分 $\int P\,dx + Q\,dy$

同一个问题还可以从另一种观点来处理；这种观点使我们对问题看得更深入，并且导出新的结果。设 $P(x, y), Q(x, y)$ 是两个函数，它们连同一阶偏导数，在由单一闭轮廓 C 围成的区域 A 内连续。区域 A 也可能包含整个平面；在这种情形，应设想轮廓 C 已退到无穷远处。沿完全位于 A 内的任意路径 D 所取的线积分

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

一般依赖于积分路径。先来求这个积分只依赖于路径两端点 (x_0, y_0) 与 (x_1, y_1) 的坐标所需的条件。设 M, N 是区域 A 内任意两点，L, L' 是连接这两点、且除端点外彼此不相交的任意两条路径。合在一起，它们构成一个闭轮廓。沿 L, L' 所取的线积分要有相同的值，显然充要条件是：沿这两条曲线所成的闭轮廓、始终按同一方向绕行时，积分等于零。因此，所讨论的问题完全等价于下面的问题：在什么条件下，线积分

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

沿区域 A 内任意闭轮廓所取时都等于零?

这个问题的答案由 Green 定理立即得到：

$$\int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy, \tag{49}$$

其中 C 是完全位于 A 内的任意闭轮廓，二重积分遍及 C 的全部内部。显然，如果函数 P, Q 满足方程

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{43'}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

左端的线积分总是消失。这个条件也是必要的。事实上，若

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在区域 A 内不恒为零，那么因为它是连续函数，必定可以找到一个足够小的区域 a，使它在 a 内符号不变；但这时，由 (49)，沿 a 的边界所取的线积分就不会等于零。

若条件 (43’) 恒成立，则沿连接同两点 M,N 的两条路径 L,L' 所取的积分值相等，只要两条路径在 M,N 之间不相交。即使这两条路径在 M,N 之间相交任意多次，结论仍然成立，这一点也容易看出。因为在这种情形，只须把沿 L,L' 所取的积分值分别同沿第三条路径 L'' 所取的值比较；L'' 除 M,N 外同前两条路径都不相交。

现在设积分路径的一个端点是固定点 (x_0,y_0)，另一个端点是 A 内的动点 (x,y)。于是沿任意路径所取的积分

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy \tag{50}$$

只依赖于动端点的坐标 (x,y)。这个函数的偏导数恰好是 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$。例如，

$$F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=\int_x^{x+\Delta x} P(\xi,y)\,d\xi,$$

因为可以设想积分路径先从 (x_0,y_0) 到 (x,y)，再从 (x,y) 沿一条平行于 x 轴的直线到 $(x+\Delta x,y)$；沿后一段有 $dy=0$。应用中值定理，可写成

$$F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x,\qquad 0<\theta<1.$$

令 Δx 趋近于零，得到 $F'_x=P$。类似地，$F'_y=Q$。因此，线积分 $F(x,y)$ 满足全微分方程 (41)；这个方程的一般积分，是在 $F(x,y)$ 上加一个任意常量所得的函数。

这个新公式比公式 (44) 更一般，因为积分路径仍可以任意选取。由新公式很容易推出 (44)。为免混淆，设两个端点的坐标为 (x_0,y_0) 与 (x_1,y_1)，并取积分路径为两条直线 $x=x_0$ 与 $y=y_1$。沿第一条直线，$x=x_0,dx=0$，而 y 从 y_0 变到 y_1；沿第二条直线，$y=y_1,dy=0$，而 x 从 x_0 变到 x_1。因此，积分 (50) 等于

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(x_0,y)\,dy+\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_1)\,dx,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

它同 (44) 只在记号上不同。

不过，选择另一条积分路径也许更有利。设

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t)$$

是连接 (x_0, y_0) 与 (x_1, y_1) 的一条曲线的方程，并设当点 (x, y) 沿曲线从一个端点走到另一个端点时，t 连续地从 t_0 变到 t_1。于是

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy = \int_{t_0}^{t_1} \bigl[P(x,y)f'(t) + Q(x,y)\phi'(t)\bigr]\,dt,$$

右端只剩下一次求积。例如，如果路径是一条直线，就应令

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \qquad y = y_0 + t(y_1 - y_0),$$

并令 t 从 0 变到 1。

反过来，若已知方程 (41) 的一个特解 $\Phi(x, y)$，则线积分由公式

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = \Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0)$$

给出；这同第四章公式 (5) 类似。

153. 周期

还可以研究更一般的情形。首先，Green 定理适用于由若干轮廓围成的区域。为明确起见，考察由一个外轮廓 C 以及位于它内部的两个轮廓 C', C'' 所围成的区域 A（图 35）。设 P, Q 是两个函数，它们连同一阶偏导数在这个区域中连续。(轮廓 C', C'' 内部的区域不应看作区域 A 的部分；关于 P, Q 在这些区域内的情形不作任何假设。)

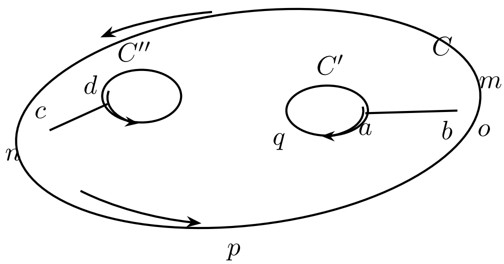


图 35

用横截线 ab 与 cd 把轮廓 C', C'' 同轮廓 C 连接起来。这样得到一个闭轮廓

$$abmcdndcpbaqa,$$

记作 Γ，它可以一笔描完。把 Green 定理应用于这个轮廓所围的区域；由横截线 ab, cd 产生的线积分彼此抵消，因为每条横截线都按相反方向走过两次。因此

$$\int P\,dx + Q\,dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

其中线积分应沿区域 A 的全部边界，即沿三个轮廓 C, C', C''，分别按图中箭头指示的方向取；这些方向都使区域 A 始终位于行进方向的左侧。

若函数 P, Q 在区域 A 中满足关系

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

则二重积分消失，所得关系可以写成

$$\int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(C')} P\,dx + Q\,dy + \int_{(C'')} P\,dx + Q\,dy, \tag{51}$$

其中每一个线积分都按上面指定的方向取。

现在回到由单一轮廓 C 围成的区域 A。设 P, Q 是满足

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

的两个函数；它们连同一阶偏导数，除 A 内有限多个点以外处处连续，而在这些例外点中，P, Q 至少有一个不连续。为明确起见，设 A 内有三个不连续点 a, b, c。用一个小圆围住每一点，再用一条割线把每个小圆同轮廓 C 连接起来（图 36）。于是，沿不穿过任何割线的曲线，从固定点 (x_0, y_0) 到动点 (x, y) 所取的积分

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

在每一点都有确定的值。因为轮廓 C、这些小圆以及割线合成一个可以一笔描完的单一轮廓，正如上面所讨论的情形一样。我们把这样的路径叫作*直接路径*，并把沿它从 $M_0(x_0, y_0)$ 到 $M(x, y)$ 所取的线积分值记作 $F(x, y)$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

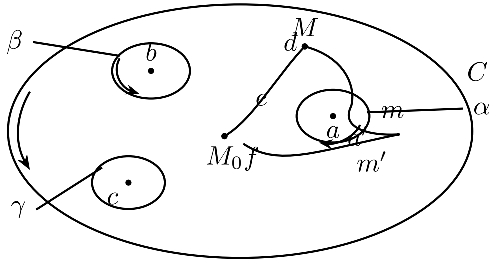


图 36

从 M_0 到一点 a' 的直线段（a' 到 a 的距离为无穷小）、以 a 为心且半径为 aa' 的圆周、以及直线段 $a'M_0$ 所组成的路径，叫作一个*环行回路*。沿一个环行回路所取的线积分

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

化为沿上述圆周所取的线积分。若 P, Q 中有一个在点 a 处为无穷大，则后一积分一般不为零；但它与圆的半径无关。它等于某个常量 $\pm A$，正负号对应于沿圆周的两个方向。类似地，分别用 $\pm B, \pm C$ 表示沿环绕另外两个奇点 b, c 的环行回路所取的积分值。

现在，连接 M_0 与 M 的任意路径都可以化为若干环行回路与一条从 M_0 到 M 的直接路径的组合。例如，路径 M_0mdefM 可以化为路径

$$M_0mdM_0, \qquad M_0deM_0, \qquad M_0efM_0, \qquad M_0fM$$

的组合。路径 M_0mdM_0 又可化为环绕奇点 a 的一个环行回路；其余两个也一样。最后，路径 M_0fM 等价于一条直接路径。因此，不论积分路径怎样，线积分的值都具有形式

$$F_1(x, y) = F(x, y) + mA + nB + pC, \tag{52}$$

其中 m, n, p 可以是任意整数（包括零）。量 A, B, C 叫作这个线积分的*周期*。显然，这个积分是变量 x, y 的一个允许无穷多个不同确定值的函数，而这种不定性的来源也已经清楚。

注。一旦画出割线 $a\alpha, b\beta, c\gamma$，函数 $F(x, y)$ 在整个割开后的区域 A 内便成为一个确定定义的函数。不过应当注意，位于同一割线两侧的两点 m, m' 处的函数值之差

$$F(m) - F(m')$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

未必为零。沿围绕奇点 a 的环行回路，有

$$A=\int_{M_0}^{m}+\int_{m}^{m'}+\int_{m'}^{M_0}.$$

把它改写为

$$\int_{M_0}^{m}=\int_{M_0}^{m'}+A+\int_{m'}^{m}.$$

当 m, m' 从割线两侧趋向同一点时，跨过无穷小线段的积分 $\int_{m'}^{m}$ 趋于零，所以

$$F(m)-F(m')=A.$$

因此，沿整条割线 $a\alpha$，差 $F(m)-F(m')$ 是常量且等于 A。对其余各条割线也有类似命题。

例。线积分

$$\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

只有一个奇点，即原点。为求相应的周期，沿圆 $x^2+y^2=\rho^2$ 积分。在这个圆上，

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,\qquad x\,dy-y\,dx=\rho^2\,d\omega.$$

所以周期等于

$$\int_0^{2\pi}d\omega=2\pi.$$

这也很容易直接验证，因为在不穿过所选割线的区域内，被积式局部等于 $\arctan(y/x)$（即辐角）的全微分。

154.　两个方程的公共根

设 X, Y 是变量 x, y 的两个函数，它们连同一阶偏导数，在由单一闭轮廓 C 围成的区域 A 内连续，并假定 X, Y 在轮廓 C 上不同时为零。表达式

$$\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}$$

满足可积性条件，因为在 $X^2+Y^2\neq 0$ 的任一局部区域内，它是 $\arctan(Y/X)$（适当选择连续分支）的微分。因此，沿轮廓 C 的正向所取的线积分

$$\int_{(C)}\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}\tag{53}$$

在被积式中 dx, dy 的系数于 C 内保持连续时消失；也就是说，只要两条曲线 $X=0, Y=0$ 在这个轮廓内部没有公共点，积分便为零。但若两条曲线在 C 内有若干公共点 $a, b, c, \ldots$，则积分的值等于同一积分分别沿以 $a, b, c, \ldots$ 为心的小圆圆周所取的值之和。

设 (α, β) 是其中一个公共点的坐标。假定函数行列式

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$$

不为零；也就是说，两条曲线 $X=0, Y=0$ 在该点不相切。于是可以以 (α, β) 为心作一个半径充分小的圆 c，使点 (X, Y) 描出原点 $(0,0)$ 附近的一个小平面区域；这个区域由一个轮廓 γ 围成，并且同圆 c 逐点对应（§25 与 §127）。

当点 (x, y) 沿圆 c 的圆周按正向走一周时，点 (X, Y) 沿轮廓 γ 按正向或负向走一周，取决于圆 c 内函数行列式的符号为正还是为负。但沿 c 的圆周所取的定积分，等于 $\arctan(Y/X)$ 在一周内的改变量，即 $\pm 2\pi$。对所有根作同样推理，得到

$$\int_{(C)} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = 2\pi(P-N), \tag{54}$$

其中 P 表示两曲线公共点中函数行列式 $D(X, Y)/D(x, y)$ 为正的点数，N 表示该行列式为负的点数。

左端的定积分也等于绕 C 一周时 $\arctan(Y/X)$ 的改变量；也就是说，等于点 (x, y) 沿轮廓 C 运动时函数 Y/X 的指标。如果 X, Y 是多项式，而轮廓 C 由有限多段有理曲线弧组成，那么问题化为计算一个或若干个有理函数的指标，而这只涉及初等运算（§77）。此外，不论函数 X, Y 怎样，我们总能近似计算定积分 (54)，并使误差小于 π；这已经完全足够，因为右端总是 2π 的整数倍。

除非函数行列式在 C 内符号不变，公式 (54) 并不给出两条曲线公共点的确切数目。Picard 最近的工作补全了这一研究的结果。[1]

155. 前述结果的推广

前几节的结果可以不作本质改变地推广到空间中的线积分。设 P, Q, R 是三个函数，它们连同一阶偏导数，在由单一闭曲面 S 围成的空间区域 (E) 内连续。先来确定线积分

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{55}$$

[1]Picard, *Traité d'Analyse*, Vol. II.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

只依赖于积分路径两端点 (x_0, y_0, z_0) 与 (x, y, z) 所需的条件。这等价于问：在什么条件下，同一个积分沿任意闭路 Γ 所取时消失？由 Stokes 定理（§136），上述线积分等于曲面积分

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx,$$

积分遍及以 Γ 为边界的一个曲面 Σ。在每条闭路都能在 (E) 内张成一片曲面的条件下，要使这个曲面积分为零，充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{56}$$

若这些条件成立，U 就是变量 x, y, z 的一个函数，它的全微分为

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

并且在区域 (E) 内为单值函数。为了求任一点处的 U 值，积分路径可以任意选择。

中译者说明。上述全局结论隐含了拓扑条件，例如区域 (E) 单连通，或者每条闭路都能在 (E) 内张成曲面。一般有孔区域中，方程 (56) 只保证局部恰当；沿非零同伦闭路仍可能出现周期。

若函数 P, Q, R 满足方程 (56)，但其中至少有一个在 (E) 内一条或若干条曲线的所有点上变为无穷大，就可推出同 §153 类似的结果。例如，若 P, Q, R 中有一个在一条闭曲线 γ 的所有点上变为无穷大，则积分 U 有一个周期；这个周期等于沿一条闭轮廓所取的线积分值，而该闭轮廓恰好一次穿过以 γ 为边界的一个曲面 σ。

还可以研究同上面针对线积分提出的问题完全类似的曲面积分问题。设 A, B, C 是三个函数，它们连同一阶偏导数，在由单一闭曲面 S 围成的空间区域 (E) 内连续。设 Σ 是 (E) 内以任意形状轮廓 Γ 为边界的一个曲面。那么曲面积分

$$I = \iint_{(\Sigma)} A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy \tag{57}$$

一般既依赖于曲面 Σ，也依赖于轮廓 Γ。要使积分只依赖于 Γ，显然充要条件是：沿 (E) 内任意闭曲面所取的积分值都等于零。Green 定理（§149）立即给出这个结论成立的条件。事实上，我们知道，给定二重积分遍及任意闭曲面时，等于遍及该曲面所围区域的三重积分

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

要使后一积分对 (E) 内任意区域都消失，显然必须有

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0. \tag{58}$$

这个条件在任意两片跨越曲面的并集能在 (E) 内围成一个体积的条件下也是充分的。

中译者说明。在有空腔的区域中，散度为零只保证局部存在向量势；不同同调类的闭曲面还可能带有非零通量周期。下述构造以及“只依赖边界”的全局结论，应在相应的单连通或可缩区域条件下理解。

Stokes 定理给出这一事实的一个简便验证。若 A,B,C 是满足方程 (58) 的三个函数，总可以用无穷多种方式确定另外三个函数 P,Q,R，使

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=A,\qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=B,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=C. \tag{59}$$

首先，只要这些方程有解，它们就有无穷多个解；因为若把 P,Q,R 分别换成

$$P+\frac{\partial\lambda}{\partial x},\qquad Q+\frac{\partial\lambda}{\partial y},\qquad R+\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

方程保持不变，其中 λ 是 x,y,z 的任意函数。其次，令 $R=0$，方程 (59) 中前两个给出

$$P=\int_{z_0}^{z}B(x,y,\zeta)\,d\zeta+\phi(x,y),\qquad Q=-\int_{z_0}^{z}A(x,y,\zeta)\,d\zeta+\psi(x,y),$$

其中 $\phi(x,y),\psi(x,y)$ 是 x,y 的任意函数。把这些值代入 (59) 中最后一个方程，得到

$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)d\zeta+\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}=C(x,y,z),$$

或者利用 (58)，得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}=C(x,y,z_0).$$

函数 ϕ,ψ 中仍可任意选取一个。

确定了函数 P,Q,R 以后，由 Stokes 定理，曲面积分等于线积分

$$\int_{(\Gamma)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

而后者显然只依赖于轮廓 Γ。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

习题

1. 求三重积分

$$\iiint \left[5(x-y)^2+3az-4a^2\right]dx\,dy\,dz$$

遍及由不等式

$$x^2+y^2-az<0,\qquad x^2+y^2+z^2-2a^2<0$$

定义的空间区域时的值。

〔Montpellier，1895 年 Licence 考试〕

2. 求曲面

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2b^2(x^2+y^2)z}{a^2x^2+b^2y^2}$$

的面积，以及同一曲面所围立体的体积。

3. 研究函数

$$F(X,Y,Z)=\int_{x_0}^{X}dx\int_{y_0}^{Y}dy\int_{z_0}^{Z}f(x,y,z)\,dz$$

作为 X,Y,Z 的函数所具有的性质。推广 §125 的结果。

4. 求曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^3=3a^3xyz$$

所围立体位于第一卦限部分的体积。

5. 把多重积分

$$\iint\cdots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}F(x_1+x_2+\cdots+x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

化为一个单积分；积分遍及由不等式

$$0\le x_1,\quad 0\le x_2,\quad \ldots,\quad 0\le x_n,\qquad x_1+x_2+\cdots+x_n\le a$$

定义的区域 D。

〔按 §148 的方法进行；为保证边界处通常意义下的收敛，可假定 $\alpha_i>-1$，并对 F 作相应可积性假设。〕

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

6. 把多重积分

$$\iint\cdots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}F\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\right]dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

化为一个单积分；积分遍及由不等式

$$0\le x_1,\quad 0\le x_2,\quad \ldots,\quad 0\le x_n,$$
$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\le 1$$

定义的区域 D。这里通常取 $a_i>0$, $p_i>0$, $\alpha_i>-1$，并假定 F 使所得积分收敛。

7*. 推导公式

$$\iint\cdots\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)},$$

其中多重积分遍及由不等式

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$$

定义的区域 D。

8*. 推导公式

$$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}F(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\phi+c\sin\theta\sin\phi)$$
$$\times\sin\theta\,d\phi=2\pi\int_{-1}^{1}F(uR)\,du,$$

其中 a,b,c 是三个任意常量，而

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

〔Poisson〕

〔先注意，给定二重积分等于取遍球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的某个曲面积分；然后在一个新的坐标系中，把平面 $ax+by+cz=0$ 取作 xy 平面。〕

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

9*. 设 $\rho = F(\theta, \phi)$ 是一个闭曲面的极坐标方程。证明该曲面所围立体的体积等于二重积分

$$\frac{1}{3}\iint \rho\cos\gamma\, d\sigma,$$

积分遍及整个曲面；其中 $d\sigma$ 表示面积元素，γ 表示矢径同外法线所成的角。

10*. 考察椭球（取 $0 < b < c < \mu$）

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

并用椭圆坐标 ν, ρ 确定其曲面上任一点的位置；也就是说，把 μ 看作未知量时，ν, ρ 是上式另外两个根（参见 §147）。把公式 (29) 应用于这个椭球的体积，得到等式

$$\int_0^b d\rho \int_b^c \frac{(\nu^2 - \rho^2)\sqrt{(c^2 - \rho^2)(c^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(b^2 - \rho^2)(\nu^2 - b^2)}}\, d\nu = \frac{\pi}{b} c^2 (c^2 - b^2).$$

类似地，公式 (α) 给出

$$\int_0^b d\rho \int_b^c \frac{(\nu^2 - \rho^2)\, d\nu}{\sqrt{(b^2 - \rho^2)(c^2 - \rho^2)(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

〔Lamé〕

11. 求函数 $P(x, y), Q(x, y)$，假定它们连同偏导数都连续，并且线积分

$$\int P(x + \alpha, y + \beta)\, dx + Q(x + \alpha, y + \beta)\, dy$$

沿任意闭轮廓所取时，与常量 α, β 无关，而只依赖于轮廓本身。

〔Paris，1900 年 7 月 Licence 考试〕

12*. 考察由方程

$$\begin{cases} x = f(x', y', z'), \\ y = \phi(x', y', z'), \\ z = \psi(x', y', z') \end{cases}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

定义的点变换。当点 (x',y',z') 描出曲面 S' 时，点 (x,y,z) 描出曲面 S。设 α,β,γ 是曲面 S 的法线方向角，α',β',γ' 是曲面 S' 上对应法线的方向角，而 $d\sigma, d\sigma'$ 是两曲面的对应面积元素。证明公式

$$\cos\gamma\, d\sigma = \pm d\sigma'\left\{\frac{D(x,y)}{D(y',z')}\cos\alpha' + \frac{D(x,y)}{D(z',x')}\cos\beta' + \frac{D(x,y)}{D(x',y')}\cos\gamma'\right\}.$$

13*. 直接推导公式 (16)。

〔体积 V 可表示成曲面积分

$$V = \iint_{(S)} z\cos\gamma\, d\sigma,$$

然后可以利用恒等式

$$\frac{D(f,\phi,\psi)}{D(x',y',z')} = \frac{\partial}{\partial x'}\left\{\psi\frac{D(f,\phi)}{D(y',z')}\right\} + \frac{\partial}{\partial y'}\left\{\psi\frac{D(f,\phi)}{D(z',x')}\right\} + \frac{\partial}{\partial z'}\left\{\psi\frac{D(f,\phi)}{D(x',y')}\right\},$$

这个恒等式很容易验证。〕

第 8 章

无穷级数

I. 实常数项级数；一般性质；收敛判别法

156. 定义与一般原理

数列。关于级数的初等性质，在大学代数和初等微积分的各种教科书中都有讨论。这里我们只迅速回顾这些初等讨论中的要点。

首先考虑一个无穷数列

$$s_0, \qquad s_1, \qquad s_2, \qquad \ldots, \qquad s_n, \qquad \ldots, \tag{1}$$

其中每一个量都有确定的位置，先后次序已经固定。若当指标 n 趋于无穷时，s_n 趋近于一个极限，就说这个数列*收敛*。凡不收敛的数列都称为*发散*。发散可以有两种情形：s_n 最终变成并始终保持大于任意预先指定的量；或者，尽管 s_n 不变为无穷大，它仍不趋近于任何极限。

> 一个数列收敛的充要条件是：任给一个预先指定的正数 ϵ，总存在一个正整数 n，使得对任意正整数 p，差 $s_{n+p} - s_n$ 的绝对值都小于 ϵ。

先证明这个条件是必要的。若当 n 趋于无穷时 s_n 趋近于极限 s，则总能找到一个数 n，使得各差

$$s - s_n, \qquad s - s_{n+1}, \qquad \ldots, \qquad s - s_{n+p}, \qquad \ldots$$

的绝对值都小于 $\epsilon/2$。于是，无论 p 取何值，$s_{n+p} - s_n$ 的绝对值都小于 $2\epsilon/2 = \epsilon$。

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

为了证明逆命题，我们引入 Cauchy 提出的一个极其重要的概念。假定数列 (1) 每一项的绝对值都小于某个正数 N。于是，$-N$ 与 $+N$ 之间的全体数可以分成下面两类。如果数列 (1) 中有无穷多项大于某个给定的数，就说这个数属于 A 类；如果数列中只有有限多项大于这个给定的数，就说它属于 B 类。显然，$-N$ 与 $+N$ 之间的每个数都属于这两类之一，并且 A 类中的每个数都小于 B 类中的任意一个数。设 S 是 A 类诸数的上确界；显然，它同时也是 B 类诸数的下确界。Cauchy 把这个数 S 称为数列 (1) 各项的*最大极限*（*la plus grande des limites*）；现代通常称它为该数列的*上极限*。[1]这个数 S 必须同数列各项的上确界（§68）仔细区别。例如，对数列

$$1, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{3}, \qquad \dots, \qquad \frac{1}{n}, \qquad \dots,$$

各项的上确界是 1，而上极限（最大极限）是 0。

Cauchy 所取的名称很容易说明其合理性。无论正数 ϵ 取得多小，数列 (1) 中总有无穷多项位于 $S-\epsilon$ 与 $S+\epsilon$ 之间。现在考虑一个递减的正数列

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots,$$

其通项 ϵ_n 趋近于零。对这个数列中的每个数 ϵ_i，从数列 (1) 中选取一项 α_i，使它位于 $S-\epsilon_i$ 与 $S+\epsilon_i$ 之间。这样便从 (1) 中选出一个子数列

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots,$$

它趋近于 S。另一方面，由 S 的定义本身可知，不可能从数列 (1) 中选出一个这样的子数列，使它趋近于一个大于 S 的极限。每当原数列收敛时，它的极限显然就是 S 本身。

现在假定，对任意给定的正数 ϵ，通过适当选择 n，无论 p 取何值，数列 (1) 中两项之差 $s_{n+p}-s_n$ 的绝对值都能小于 ϵ。先取例如 $\epsilon=1$，便知从某一项起的所有项都落在一个固定有界区间内；再把开头有限多项并入考虑，可见整个数列有界，所以上极限确实存在。对一般的 ϵ，s_n 以后的所有项都位于 $s_n-\epsilon$ 与 $s_n+\epsilon$ 之间。设 S 是这个数列各项的上极限。由刚才的论证，可以从 (1) 中选出一个以 S 为极限的子数列。由于这个子数列从某一项起的每一项都位于 $s_n-\epsilon$ 与 $s_n+\epsilon$ 之间，显然 $S-s_n$ 的绝对值至多等于 ϵ。现在任取数列 (1) 中指标 $m>n$ 的一项 s_m。则

$$s_m - S = (s_m - s_n) + (s_n - S),$$

[1]Cauchy, *Résumés analytiques de Turin*, 1833（*Collected Works*, 第 2 辑，第 X 卷，p. 49）。这个定义可以推广到任意一个有上确界的数集。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而右端的绝对值必小于 2ϵ。由于 ϵ 是任意预先指定的正数，所以当指标 m 无限增大时，通项 s_m 趋近于 S。

注。如果 S 是数列 (1) 各项的上极限，那么每个大于 S 的数都属于 B 类，每个小于 S 的数都属于 A 类；数 S 本身则可以属于任一类。

157.　从数列过渡到级数

给定任意无穷数列

$$u_0,\qquad u_1,\qquad u_2,\qquad \ldots,\qquad u_n,\qquad \ldots,$$

由这些项组成的级数

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{2}$$

称为*收敛*的，如果它的逐次部分和数列

$$S_0=u_0,\qquad S_1=u_0+u_1,\qquad \ldots,\qquad S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

收敛。设 S 是后一数列的极限，也就是当 n 无限增大时和 S_n 所趋近的极限：

$$S=\lim S_n=\lim\sum_{i=0}^{n}u_i.$$

于是 S 叫作上述级数的*和*，并用符号等式

$$S=u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$$

表示这种关系。不收敛的级数称为*发散级数*。

显然, 判定级数收敛还是发散, 等价于判定其逐次部分和数列 $S_0,S_1,S_2,\ldots$ 收敛还是发散。反过来，数列

$$s_0,s_1,s_2,\ldots,s_n,\ldots$$

收敛或发散，恰好同级数

$$s_0+(s_1-s_0)+(s_2-s_1)+\cdots+(s_n-s_{n-1})+\cdots$$

收敛或发散相一致；因为这个级数前 $n+1$ 项之和 S_n 正好等于给定数列的通项 s_n。我们将经常使用这一说明。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

级数 (2) 同删去其最初 p 项后所得的级数

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+n} + \cdots \tag{3}$$

同敛散。事实上，设 S_n（$n > p$）是级数 (2) 前 $n+1$ 项之和，Σ_{n-p} 是级数 (3) 前 $n-p+1$ 项之和，则差

$$S_n - \Sigma_{n-p} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1}$$

与 n 无关。因此，若 S_n 趋近于极限，则 Σ_{n-p} 也趋近于极限，反之亦然。所以，在判定级数收敛还是发散时，可以任意删去开头有限多项。

设 S 是一个收敛级数的和，S_n 是前 $n+1$ 项之和，而 R_n 是删去前 $n+1$ 项后所得级数的和:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} + \cdots .$$

显然总有

$$S = S_n + R_n.$$

一般说来，不可能求出一个收敛级数的和 S。若以其前 $n+1$ 项之和 S_n 作为 S 的近似值，则所犯误差正好等于 R_n。由于当 n 趋于无穷时 S_n 趋近于 S，误差 R_n 趋近于零；所以至少在理论上，总可以把所取项数选得足够大，使以 S_n 代替 S 所犯的误差小于任意预先指定的数。要估计所得近似的精度，只须知道 R_n 的一个上界。显然，在实际数值计算中容易使用的，只是那些余项 R_n 趋近于零相当迅速的级数。

若干性质直接由收敛定义推出。我们只列出其中几条。

1) 若把一个给定级数的每一项都乘以同一个非零常量 k，所得新级数同原级数同敛散；若原级数收敛于 S，新级数的和就是 kS。

2) 给定两个收敛级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots , \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots ,$$

其和分别为 S, S'。逐项相加所得的新级数

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots$$

收敛，并且其和为 $S + S'$。对 p 个收敛级数逐项相加，也有同样的定理。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

3) 改变一个级数中有限多项的值，不影响它的收敛或发散。事实上，这种改变只会使某一项以后的全部部分和增加或减少同一个常量。

4) 把任意无穷数列的一般收敛准则应用于级数，便得到 Cauchy 的一般收敛准则：[2]

一个级数收敛的充要条件是：任给一个预先指定的正数 ϵ，总存在一个整数 n，使得从 u_{n+1} 开始的任意有限多个相继项之和，其绝对值都小于 ϵ。事实上，

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

特别地，通项

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

在 n 趋于无穷时必须趋近于零。

Cauchy 判别准则是完全一般的，但实际应用时往往很困难。它本质上只是极限概念本身的展开。下面回顾最常用于判别级数敛散的实用法则。这些法则没有一个适用于一切情形，但把它们合在一起，已经足以处理实际遇到的大多数情形。

158.　正项级数

我们先研究一类极其重要的级数，即各项全为正数的级数。在这样的级数中，部分和 S_n 随 n 增大而增大。因此，级数收敛的充分条件是：对一切 n，S_n 始终小于某个固定的数。判定这种级数收敛性的最一般方法，是把所给级数同已经研究过的级数作比较。下面的命题是这种方法的基础。

1) 如果一个给定正项级数的每一项都小于或等于某个已知收敛的正项级数的对应项，那么所给级数收敛。因为所给级数前 n 项之和 S_n 显然小于第二个级数的总和 S'，所以 S_n 趋近于一个小于 S' 的极限 S。

2) 如果一个给定正项级数的每一项都大于或等于某个已知发散的正项级数的对应项，那么所给级数发散。因为所给级数前 n 项之和不小于第二个级数前 n 项之和，故随 n 无限增大而无限增大。

[2] Cauchy, *Exercices de mathématiques*, 1827。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

还可以利用下面的引理比较两个级数。设

$$(U) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots ,$$

$$(V) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

是两个正项级数。如果级数 (U) 收敛，并且从某一项起总有

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

那么级数 (V) 也收敛。如果级数 (U) 发散，并且从某一项起总有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

那么级数 (V) 也发散。

为了证明第一个断言，假定当 $n > p$ 时总有

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

由于把一个级数的每一项都乘以同一常量并不改变其收敛性，而相邻两项之比也保持不变，所以可以假定 $v_p < u_p$。于是显然有

$$v_{p+1} < u_{p+1}, \qquad v_{p+2} < u_{p+2}, \qquad \ldots .$$

因此级数 (V) 必收敛。第二个断言的证明完全类似。

给定一个已知收敛或发散的正项级数，要判定另一个正项级数收敛还是发散，可以使用上面任意一组命题：或者直接比较两个级数的各项，或者比较它们相邻两项之比。

159.　Cauchy 判别法与 d'Alembert 判别法

最简单的比较级数是公比为 r 的等比级数。若 $r < 1$，它收敛；若 $r > 1$，它发散。把一个给定正项级数同等比级数比较，得到下述由 Cauchy 提出的判别法。

若一个正项级数通项 u_n 的 n 次方根 $\sqrt[n]{u_n}$，从某一项起始终小于某个小于 1 的固定数，则级数收敛。若 $\sqrt[n]{u_n}$ 从某一项起始终大于 1，则级数发散。

事实上，在第一种情形中，

$$\sqrt[n]{u_n} < k < 1,$$

从而 $u_n < k^n$。所以从某一项起，所给级数每一项都小于某个公比小于 1 的等比级数的对应项。在第二种情形中，

$$\sqrt[n]{u_n} > 1,$$

从而 $u_n > 1$；于是通项不趋近于零。

每当 $\sqrt[n]{u_n}$ 趋近于极限时，这个判别法都可应用。事实上，可以作如下陈述。

> 若当 n 趋于无穷时 $\sqrt[n]{u_n}$ 趋近于极限 l，则 $l < 1$ 时级数收敛，$l > 1$ 时级数发散。

当 $l = 1$ 时仍不能判定；但若 $\sqrt[n]{u_n}$ 在趋近于 1 时始终大于 1，级数显然发散。

再把一个给定正项级数相邻两项之比同等比级数相邻两项之比比较，便得到 d'Alembert 判别法。

> 若一个正项级数中，从某一项起每一项同前一项之比始终小于某个小于 1 的固定数，则级数收敛；若这个比从某一项起始终大于 1，则级数发散。

由此立刻得到如下推论。

> 若当 n 趋于无穷时，u_{n+1}/u_n 趋近于极限 l，则 $l < 1$ 时级数收敛，$l > 1$ 时级数发散。

唯一不能判定的是 $l = 1$ 的情形；即使在这种情形中，如果 u_{n+1}/u_n 在趋近于 1 时始终大于 1，级数也是发散的。

一般说明。Cauchy 判别法比 d'Alembert 判别法更一般。假定一个给定级数从某一项起，每一项都小于某个递减等比级数的对应项；也就是说，对一切大于某个固定整数 p 的 n，通项 u_n 都小于 Ar^n，其中 A 是常量而 $r < 1$。于是

$$\sqrt[n]{u_n} < r\sqrt[n]{A},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

右端在 n 趋于无穷时趋近于 r。因此，若 k 是 r 与 1 之间的一个固定数，则从某一项起有

$$\sqrt[n]{u_n} < k.$$

所以在所有这种情形中，Cauchy 判别法都可以应用。然而，无论在级数中走到多远，u_{n+1}/u_n 仍可能取到大于 1 的值。例如，考虑级数

$$1 + r|\sin a| + r^2|\sin 2a| + \cdots + r^n|\sin na| + \cdots ,$$

其中 $0 < r < 1$，a 是任意常量。在这种情形,

$$\sqrt[n]{u_n} = r\sqrt[n]{|\sin na|} \leq r,$$

而在分母不为零时，比值

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r\frac{|\sin(n+1)a|}{|\sin na|}$$

在一般情形中，当 n 无限增大时可以取得无穷多个大于 1 的值；若某个分母为零，则比值判别法本身在该处也不能照常使用。

不过，保留 d'Alembert 判别法仍有好处，因为在许多情形中它使用起来更方便。例如，当 $x > 0$ 时，对正项级数

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n} + \cdots ,$$

任一项同前一项之比为 $x/(n+1)$，当 n 趋于无穷时它趋近于零；而若要直接判定

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}}$$

在 n 趋于无穷时的情形，就需要作一些考察。

在应用上述某个判别法证明了给定级数的每一项都小于递减等比级数

$$A, \qquad Ar, \qquad Ar^2, \qquad \ldots, \qquad Ar^n, \qquad \ldots$$

的对应项以后，很容易求出以级数前 n 项之和（即取到相应等比级数的 Ar^{n-1} 项）代替级数总和时误差的一个上界。这个误差必小于等比级数

$$Ar^n + Ar^{n+1} + Ar^{n+2} + \cdots = \frac{Ar^n}{1-r}$$

的和。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 u_{n+1}/u_n 与 $\sqrt[n]{u_n}$ 都趋近于极限时，这两个极限必然相同。事实上，考虑辅助级数

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots, \tag{4}$$

其中 $x > 0$。在这个级数中，任一项同前一项之比趋近于 lx，其中 l 是 u_{n+1}/u_n 的极限。因此，级数 (4) 在 $x < 1/l$ 时收敛，在 $x > 1/l$ 时发散。若把 $\sqrt[n]{u_n}$ 的极限记作 l'，则

$$\sqrt[n]{u_n x^n} = x \sqrt[n]{u_n}$$

趋近于 $l'x$；所以级数 (4) 在 $x < 1/l'$ 时收敛，在 $x > 1/l'$ 时发散。为了使两个判别法不产生矛盾，显然必须有 $l = l'$。例如，若 $l > l'$，取 x 在 $1/l$ 与 $1/l'$ 之间，则按 Cauchy 判别法，级数 (4) 收敛，而按 d'Alembert 判别法，同一个级数对同一个 x 值又应发散。

更一般地，只要 u_{n+1}/u_n 趋近于极限 l，$\sqrt[n]{u_n}$ 就趋近于同一个极限。[3]事实上，设从某一项起，各比值

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

都位于 $l - \epsilon$ 与 $l + \epsilon$ 之间；其中 ϵ 是一个正数，只要把 n 取得充分大，它就可以任意小。于是有

$$u_n^{1/(n+p)} (l - \epsilon)^{p/(n+p)} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{1/(n+p)} (l + \epsilon)^{p/(n+p)}.$$

当 n 固定而 p 无限增大时，这个双重不等式最左端与最右端分别趋近于 $l - \epsilon$ 与 $l + \epsilon$。所以，对一切大于某个适当整数的 m，都有

$$l - \epsilon < \sqrt[m]{u_m} < l + \epsilon.$$

由于 ϵ 是任意指定的数，便有

$$\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{u_m} = l.$$

应当注意，逆命题不成立。例如考虑数列

$$1, \quad a, \quad ab, \quad a^2 b, \quad a^2 b^2, \quad \ldots, \quad a^n b^{n-1}, \quad a^n b^n, \quad \ldots,$$

其中 a, b 是两个不同的正数。任一项同前一项之比交替等于 a 与 b，而当 n 无限增大时，$\sqrt[n]{u_n}$ 趋近于极限 $\sqrt{ab}$。

[3]Cauchy, *Cours d'Analyse*。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

上面的命题还可用来确定若干不定式中出现的表达式的极限。例如，显然

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}$$

随 n 无限增大而无限增大，因为比值 $n!/(n-1)! = n$ 随 n 无限增大而无限增大。同样可以证明，当 n 无限增大时，

$$\sqrt[n]{n} \qquad 和 \qquad \sqrt[n]{\log n}$$

都趋近于极限 1。

160. 上极限的应用

Cauchy 把前一个判别法表述成更一般的形式。设 u_n 是一个正项级数的通项，并考虑序列

$$\sqrt{u_1}, \quad \sqrt[2]{u_2}, \quad \sqrt[3]{u_3}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{u_n}, \quad \ldots. \tag{5}$$

若这个序列的各项没有上界，则通项 u_n 不趋近于零，给定级数因而发散。若序列 (5) 的全部项都小于某个固定数，令 ω 为这些项的上极限。

级数 $\sum u_n$ 在 $\omega < 1$ 时收敛，在 $\omega > 1$ 时发散。

为证明定理的第一部分，取一个位于 ω 与 1 之间的数 $1-\alpha$。由上极限的定义，序列 (5) 中只有有限多项大于 $1-\alpha$。所以可以找到一个正整数 p，使对一切 $n > p$ 都有

$$\sqrt[n]{u_n} < 1-\alpha.$$

于是级数 $\sum u_n$ 收敛。另一方面，若 $\omega > 1$，取一个位于 1 与 ω 之间的数 $1+\alpha$。那么序列 (5) 中有无穷多项大于 $1+\alpha$，因而有无穷多个 n 使 $u_n > 1$。所以在这种情形中级数 $\sum u_n$ 发散。$\omega = 1$ 的情形仍不能判定。

161. Cauchy 积分判别法

若 u_{n+1}/u_n 与 $\sqrt[n]{u_n}$ 都趋近于 1，而又不在趋近过程中始终大于 1，那么 d'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法都不能判定级数收敛还是发散。此时必须选取另一个具有同样特征、但已知收敛或发散的级数作为比较级数。下述命题是

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

Cauchy 在研究定积分时发现的；当上述判别法失效时，它常能判定给定级数的敛散性。

设 $\phi(x)$ 在 x 大于某个数 a 时为正，并且当 x 经过 a 后继续增大时单调递减，而在 x 无限增大时趋近于零。于是 x 轴是曲线 $y=\phi(x)$ 的一条渐近线，而定积分

$$\int_a^l \phi(x)\,dx$$

在 l 无限增大时可能趋近于有限极限，也可能不趋近于有限极限。级数

$$\phi(a)+\phi(a+1)+\cdots+\phi(a+n)+\cdots \tag{6}$$

在上述积分趋近于有限极限时收敛，在上述积分不趋近于有限极限时发散。

事实上，考虑一组底均为 1、高分别为

$$\phi(a),\quad \phi(a+1),\quad \ldots,\quad \phi(a+n)$$

的矩形。由于这些矩形都伸到曲线 $y=\phi(x)$ 之外，所以它们面积之和显然大于由 x 轴、曲线 $y=\phi(x)$ 以及两条纵线 $x=a$、$x=a+n$ 围成的面积，即

$$\phi(a)+\phi(a+1)+\cdots+\phi(a+n)>\int_a^{a+n}\phi(x)\,dx.$$

另一方面，考虑内接于曲线下方、底同为 1、高分别为

$$\phi(a+1),\quad \phi(a+2),\quad \ldots,\quad \phi(a+n)$$

的矩形。这些矩形面积之和显然小于曲线下的面积，因而可以写成

$$\phi(a)+\phi(a+1)+\cdots+\phi(a+n)<\phi(a)+\int_a^{a+n}\phi(x)\,dx.$$

所以，若积分 $\int_a^l \phi(x)\,dx$ 在 l 无限增大时趋近于极限 L，则和

$$\phi(a)+\cdots+\phi(a+n)$$

始终小于 $\phi(a)+L$。于是这个和趋近于一个极限，级数 (6) 收敛。反之，若积分 $\int_a^{a+n}\phi(x)\,dx$ 在 n 无限增大时无限增大，则由上面第一个不等式，同样可知和

$$\phi(a)+\phi(a+1)+\cdots+\phi(a+n)$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

也无限增大；所以在这种情形中级数 (6) 发散。

例如，考虑函数 $\phi(x) = 1/x^\mu$，其中 $\mu > 0$，并取 $a = 1$。这个函数满足定理的一切条件，而积分

$$\int_1^l x^{-\mu}\,dx$$

在 l 无限增大时趋近于极限，当且仅当 $\mu > 1$。所以级数

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \cdots$$

在 $\mu > 1$ 时收敛，在 $\mu \leq 1$ 时发散。

再考虑函数

$$\phi(x) = \frac{1}{x(\log x)^\mu},$$

其中 $\log x$ 表示自然对数，μ 是正数，并取 $a = 2$。当 $\mu \neq 1$ 时，

$$\int_2^l \frac{dx}{x(\log x)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}\left[(\log l)^{1-\mu} - (\log 2)^{1-\mu}\right].$$

若 $\mu > 1$，右端趋近于有限极限；若 $\mu < 1$，右端随 l 无限增大。在特殊情形 $\mu = 1$ 中，也容易用类似方法证明积分无限增大。因此级数

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu} + \frac{1}{3(\log 3)^\mu} + \cdots + \frac{1}{n(\log n)^\mu} + \cdots$$

在 $\mu > 1$ 时收敛，在 $\mu \leq 1$ 时发散。

更一般地，以

$$\frac{1}{n \log n\ \log^2 n \cdots \log^{p-1} n\,(\log^p n)^\mu}$$

为通项的级数，在 $\mu > 1$ 时收敛，在 $\mu \leq 1$ 时发散。这里 $\log^2 n$ 表示 $\log\log n$，$\log^3 n$ 表示 $\log\log\log n$，等等。当然，整数 n 只取足够大的值，使

$$\log n, \quad \log^2 n, \quad \log^3 n, \quad \ldots, \quad \log^p n$$

都为正；所考察级数中缺少的那些项以零补上。这个定理很容易用类似于上面的论证来证明。例如，当 $\mu \neq 1$ 时，函数

$$\frac{1}{x \log x\ \log^2 x \cdots \log^{p-1} x\,(\log^p x)^\mu}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

是

$$\frac{(\log^p x)^{1-\mu}}{1-\mu}$$

的导数，而后一个函数趋近于有限极限，当且仅当 $\mu > 1$。

Cauchy 积分判别法还有另一类应用。假设函数 $\phi(x)$ 满足上面所加的条件，并考虑和

$$\phi(n) + \phi(n+1) + \cdots + \phi(n+p),$$

其中 n, p 是两个允许无限增大的整数。若以 $\phi(n)$ 为通项的级数收敛，则上述和趋近于零，因为它是两个部分和 S_{n+p+1} 与 S_n 之差，而二者都趋近于级数的和。但若这个级数发散，则不能作出这样的结论。回到上面的几何解释，得到双重不等式

$$\int_n^{n+p} \phi(x)\,dx < \phi(n) + \phi(n+1) + \cdots + \phi(n+p) < \phi(n) + \int_n^{n+p} \phi(x)\,dx.$$

当 n 无限增大时，$\phi(n)$ 趋近于零，所以所考察之和的极限，同定积分

$$\int_n^{n+p} \phi(x)\,dx$$

的极限相同；而这个极限依赖于 n, p 变为无穷大的方式。

例如，和

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$

的极限同定积分

$$\int_n^{n+p} \frac{dx}{x} = \log\left(1 + \frac{p}{n}\right)$$

的极限相同。显然，这个积分趋近于极限，当且仅当比值 p/n 趋近于极限。若 α 是这个比值的极限，则如同我们已在 §49 中看到的，上述和趋近于 $\log(1+\alpha)$。

最后，和

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}$$

的极限同定积分

$$\int_n^{n+p} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{n+p} - \sqrt{n}\right)$$

的极限相同。为了使这个表达式趋近于极限，必须使比值 $p/\sqrt{n}$ 趋近于某个极限 α。此时上述表达式可以写成

$$\frac{2p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} = \frac{2p/\sqrt{n}}{\sqrt{1+p/n} + 1},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

显然它的极限为 α。

162. 对数判别法

取级数

$$\sum \frac{1}{n^{\mu}}$$

作为比较级数，Cauchy 得到一个新的收敛判别法，它同使用 $\sqrt[n]{u_n}$ 的判别法完全类似。

若从某一项以后，表达式

$$\frac{\log(1/u_n)}{\log n}$$

始终大于某个大于 1 的固定数，则级数收敛。若从某一项以后，这个表达式始终小于 1，则级数发散。

若当 n 无限增大时，$\log(1/u_n)/\log n$ 趋近于极限 L，则 $L>1$ 时级数收敛，$L<1$ 时级数发散。$L=1$ 的情形仍不能判定。

为了证明定理的第一部分，注意不等式

$$\log \frac{1}{u_n} > k \log n$$

等价于

$$\frac{1}{u_n} > n^k, \qquad \text{或} \qquad u_n < \frac{1}{n^k}.$$

因为 $k>1$，级数必然收敛。同样，若

$$\log \frac{1}{u_n} < \log n,$$

便有 $u_n > 1/n$，因而级数必然发散。

只要给定级数从某一项以后，每一项分别小于级数

$$\frac{A}{n^{\mu}}, \qquad \frac{A}{(n+1)^{\mu}}, \qquad \frac{A}{(n+2)^{\mu}}, \qquad \ldots,$$

的对应项，其中 A 为常因子而 $\mu>1$，这个判别法就能判定给定级数收敛还是发散。事实上，若

$$u_n < \frac{A}{n^{\mu}},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

则

$$\log u_n + \mu \log n < \log A,$$

或者

$$\frac{\log(1/u_n)}{\log n} > \mu - \frac{\log A}{\log n}.$$

右端在 n 无限增大时趋近于 μ。若 K 是介于 1 与 μ 之间的数，则从某一项以后有

$$\frac{\log(1/u_n)}{\log n} > K.$$

类似地，取级数

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^{\mu}}, \qquad \sum \frac{1}{n \log n\, (\log^2 n)^{\mu}}, \qquad \cdots$$

作为比较级数，便得到一列无穷多个收敛判别法。它们可以机械地从前一个判别法得到：在前述判别法的陈述中，先把表达式 $\log(1/u_n)/\log n$ 换成

$$\frac{\log[1/(nu_n)]}{\log^2 n},$$

再换成

$$\frac{\log[1/(nu_n \log n)]}{\log^3 n},$$

如此等等。[4]这些判别法适用于越来越一般的情形。事实上，很容易证明，若某个级数的收敛或发散能由其中一个判别法确定，那么后面的每一个判别法也都能确定它的敛散性。也可能发生这样的情形：不论把这些试验性判别法推进到多远，没有一个能够判定级数收敛还是发散。Du Bois-Reymond[5] 和 Pringsheim[6] 确实分别给出了收敛级数和发散级数的例子，对这些级数，上述任何对数判别法都不能判定其敛散性。这个结果在理论上极其重要；但这种类型的收敛级数显然收敛得非常缓慢，在涉及数值计算的问题中，它们似乎几乎不可能有任何实际应用。[7]

[4]参见 Bertrand, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, 第 I 卷，p. 238；*Journal de Liouville*, 第 1 辑，第 VII 卷，p. 35。

[5]*Ueber Convergenz von Reihen*（*Crelle's Journal*, 第 LXXVI 卷，p. 85, 1873）。

[6]*Allgemeine Theorie der Divergenz*（*Mathematische Annalen*, 第 XXXV 卷，1890）。

[7]据作者说，在 du Bois-Reymond 所给的某个收敛级数例子中，为了仅仅得到级数总和的一半，所需项数竟等于用立方毫米表示的地球体积。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

163. Raabe 或 Duhamel 判别法

仍采用同样的比较级数，但现在不比较通项本身，而比较相邻两项之比；这样得到一些新的判别法。诚然，它们没有前面的判别法一般，却往往更容易在实际中应用。例如，考虑正项级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots , \tag{7}$$

其中 u_{n+1}/u_n 趋近于 1，并且始终小于 1。于是可以写成

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n},$$

其中当 n 无限增大时 α_n 趋近于零。把这个比值同

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$$

比较，便得到下述判别法；它先由 Raabe[8]发现，后来又由 Duhamel[9]发现。

> 若从某一项起，乘积 $n\alpha_n$ 始终大于某个大于 1 的固定数，则级数收敛；若从某一项起，同一个乘积始终小于 1，则级数发散。

定理的第二部分立即可得。因为从某一项起 $n\alpha_n < 1$，所以

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{n}{n+1},$$

即 u_{n+1}/u_n 大于调和级数相邻两项之比。因此所给级数发散。

为了证明第一部分，假定从某一项起总有

$$n\alpha_n > k > 1.$$

取 μ 为 1 与 k 之间的一个数，即 $1 < \mu < k$。若从某一项起，u_{n+1}/u_n 小于级数通项 $1/n^{\mu}$ 的相邻两项之比 $[n/(n+1)]^{\mu}$，则所给级数必收敛。所需不等式为

$$\frac{1}{1+\alpha_n} < \frac{1}{(1+1/n)^{\mu}}. \tag{8}$$

[8] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Vol. X, 1832。

[9] *Journal de Liouville*, Vol. IV, 1838。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

利用 Taylor 定理把 $(1+1/n)^\mu$ 展开到 $1/n^2$ 项，可把这个不等式写成

$$1+\frac{\mu}{n}+\frac{A_n}{n^2}<1+\alpha_n,$$

其中当 n 无限增大时，A_n 始终小于某个固定数。化简后得到

$$\mu+\frac{A_n}{n}<n\alpha_n.$$

左端在 n 无限增大时趋近于 μ。所以，当 n 足够大时，左端小于 $n\alpha_n$，从而证明了不等式 (8)。因此级数收敛。

若当 n 无限增大时乘积 $n\alpha_n$ 趋近于极限 L，即可应用上述法则：$L>1$ 时级数收敛，$L<1$ 时级数发散。当 $L=1$ 时仍不能判定；但若 $n\alpha_n$ 在趋近于 1 时始终小于 1，级数便发散。

若乘积 $n\alpha_n$ 以 1 为极限，可以把 u_{n+1}/u_n 同级数

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu}+\cdots+\frac{1}{n(\log n)^\mu}+\cdots$$

相邻两项之比比较；该级数在 $\mu>1$ 时收敛，在 $\mu<1$ 时发散。所给级数相邻两项之比可以写成

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+1/n+\beta_n/n},$$

其中当 n 无限增大时 β_n 趋近于零。若从某一项起，乘积 $\beta_n\log n$ 始终大于某个大于 1 的固定数，则级数收敛；若从某一项起，同一个乘积始终小于 1，则级数发散。

中译者校记（现代重排本误排）。现代 LaTeX 重排本在此把分母末项误排成 $\beta_n/(n\log n)$,并把下一层本应为 $(1+\gamma_n)/(n\log n)$ 的项误排成 $1/(n\log n)+\gamma_n/(n\log n\ \log^2 n)$。这些排法同紧接着的 Taylor 展开和原证明不相容。本译稿依据 1904 年英译本恢复为 β_n/n，并相应恢复下文公式。

为了证明定理的第一部分，假定

$$\beta_n\log n>k>1.$$

取 μ 为 1 与 k 之间的一个数。若从某一项起有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n(\log n)^\mu}{(n+1)[\log(n+1)]^\mu}, \tag{9}$$

则级数必收敛。这个不等式可以写成

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}>\frac{n+1}{n}\left[1+\frac{\log(1+1/n)}{\log n}\right]^{\mu}.$$

对右端应用 Taylor 定理并化简，得到

$$\beta_n \log n>\mu(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{A_n}{n\log n},$$

其中当 n 无限增大时，A_n 始终小于某个固定数。乘积

$$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

在 n 无限增大时趋近于 1；事实上，由 Taylor 定理可以写成

$$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1+\theta_n}{2n},\qquad \theta_n\longrightarrow 0. \tag{10}$$

所以上述不等式右端趋近于 μ。由于左端大于 k，而 $k>\mu$，故当 n 足够大时该不等式成立。

定理的第二部分可通过把 u_{n+1}/u_n 同通项为 $1/(n\log n)$ 的级数相邻两项之比作比较来证明。要证明的不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)}$$

可以写成

$$\beta_n\log n<(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

由 (10) 可见，右端通过大于 1 的值趋近于 1。由于左端不超过 1，所以当 n 足够大时该不等式成立。

由上述命题可得推论: 若当 n 无限增大时，乘积 $\beta_n\log n$ 趋近于极限 L，则 $L>1$ 时级数收敛，$L<1$ 时级数发散。$L=1$ 时仍不能判定；但若 $\beta_n\log n$ 始终小于 1，级数便发散。

若 $\beta_n\log n$ 通过大于 1 的值趋近于 1，同理可以写成

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+1/n+(1+\gamma_n)/(n\log n)},$$

其中当 n 无限增大时 γ_n 趋近于零。于是，通过考察乘积 $\gamma_n\log^2 n$，可以证明同上面完全类似的定理；此后还可继续作同样的推进。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

推论。若一个正项级数中任一项同前一项之比可写成

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{r}{n} + \frac{H_n}{n^{1+\nu}},$$

其中 ν 是正数，r 是常量，而当 n 无限增大时 H_n 的绝对值始终小于某个固定数，则 $r > 1$ 时级数收敛，而在其余一切情形中级数发散。

事实上，若令

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n},$$

则有

$$n\alpha_n = \frac{r - H_n/n^\nu}{1 - r/n + H_n/n^{1+\nu}},$$

所以

$$\lim n\alpha_n = r.$$

由此，$r > 1$ 时级数收敛，$r < 1$ 时级数发散。唯一尚未判定的是 $r = 1$ 的情形。为判定这一情形，令

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + 1/n + \beta_n/n}.$$

由此得到

$$\beta_n \log n = \frac{\dfrac{\log n}{n} - \dfrac{n+1}{n} H_n \dfrac{\log n}{n^\nu}}{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{H_n}{n^{1+\nu}}}.$$

无论正数 ν 多么小，右端在 n 无限增大时都趋近于零。因此级数发散。

例如，假定 u_{n+1}/u_n 是 n 的一个有理函数，并且当 n 无限增大时趋近于 1：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \cdots}{n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \cdots}.$$

作所指示的除法，并保留到 $1/n$ 项，可以写成

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{b_1 - a_1}{n} + \frac{\phi(n)}{n^2},$$

其中 $\phi(n)$ 是 n 的有理函数，当 n 无限增大时趋近于一个极限。由上面的定理，级数收敛的充要条件是

$$b_1 > a_1 + 1.$$

这个定理由 Gauss 给出，他曾直接证明它。[10]这是最早的一般收敛判别法之一。

[10]Gauss, *Collected Works*, Vol. III, p. 138；*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

164. 绝对收敛

现在研究各项可以为正也可以为负的级数。若从某一项以后所有项同号，讨论就归结为前一种情形。因此只须考察含有无穷多个正项和无穷多个负项的级数。我们首先证明下面的基本定理：

任意级数，只要由其各项绝对值组成的级数收敛，它本身就收敛。

设

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{11}$$

是一个有正项也有负项的级数，而

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_n + \cdots \tag{12}$$

是由给定级数各项绝对值组成的级数，其中 $U_n = |u_n|$。若级数 (12) 收敛，则级数 (11) 也收敛。这是 §157 一般定理的直接结果。因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leq U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+p},$$

而无论随后怎样选择 p，只要把 n 取得足够大，右端就可小于任意预先指定的数。所以左端也具有同一性质，级数 (11) 必然收敛。

这个定理也可如下证明。写成

$$u_n = (u_n + U_n) - U_n,$$

并考虑通项为 $u_n + U_n$ 的辅助级数

$$(u_0 + U_0) + (u_1 + U_1) + \cdots + (u_n + U_n) + \cdots . \tag{13}$$

设 S_n, S'_n, S''_n 分别表示级数 (11)、(12)、(13) 前 n 项之和。于是

$$S_n = S''_n - S'_n.$$

级数 (12) 按假设收敛。级数 (13) 也收敛，因为它没有负项，并且通项不超过 $2U_n$。所以 S'_n 与 S''_n 都趋近于极限，因而 S_n 也趋近于极限。于是给定级数 (11) 收敛。显然，可以把给定级数看成两个收敛正项级数之差。

若一个级数的各项绝对值所成级数收敛，就说原级数*绝对收敛*。在绝对收敛级数中，可以任意改变各项的次序，而不改变级数的和。先考虑收敛正项级数

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots , \tag{14}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其和为 S；再设

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{15}$$

是把第一个级数的各项按不同次序排列所得的级数；也就是说，级数 (14) 的每一项都在级数 (15) 中某处出现，而级数 (15) 的每一项也都在级数 (14) 中出现。

设 S'_m 是级数 (15) 前 m 项之和。因为这些项全都出现在级数 (14) 中，所以可以把 n 取得足够大，使级数 (15) 的前 m 项都出现在级数 (14) 的前 n 项之中。因此

$$S'_m \leq S_n < S,$$

这说明级数 (15) 收敛，而且它的和 S' 不超过 S。交换两个级数的角色，同理得到 $S \leq S'$，所以 $S' = S$。同一论证还说明：若上述级数 (14) 与 (15) 中有一个发散，另一个也发散。

收敛正项级数的各项还可以任意分组；也就是说，可以把若干项之和作为新级数的一项，而不改变原级数的和。[11]先设把相邻各项分组，并令

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \tag{16}$$

为所得新级数，其中例如

$$A_0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_1},$$
$$A_1 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2},$$
$$A_2 = a_{n_2+1} + \cdots + a_{n_3}, \quad \ldots.$$

于是级数 (16) 前 m 项之和 S'_m，等于给定级数前 N 项之和 S_N，其中 $N > m$。当 m 无限增大时，N 也无限增大，所以 S'_m 也趋近于极限 S。

把前面两种运算结合起来，便可看出：任一收敛正项级数都可以换成另一个级数，其中每一项是从给定级数中任意抽取的若干项之和，而级数的和不变。唯一要求是，给定级数的每一项必须在构成第二个级数各项的那些组中恰好出现一次。

任一绝对收敛级数都可看成两个收敛正项级数之差；所以，上述各种运算对任何绝对收敛级数都可以施行。显然，从数值计算的观点看，可以像处理有限项之和一样处理绝对收敛级数。

[11]通常把这句话表述为：在收敛正项级数中，可以任意插入括号而不改变级数的和。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

165. 条件收敛级数

各项不全同号的级数，可以收敛而不绝对收敛。下面关于交错级数的定理清楚地说明了这一事实；我们只陈述它，并假定学生已经熟悉。[12]

> 若一个级数的各项正负交替，每一项的绝对值都小于或等于前一项的绝对值，并且随着项数无限增大，各项的绝对值趋近于零，则这个级数收敛。

例如，级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\cdots$$

收敛。我们在 §49 中看到，它的和是 $\log 2$。这个级数各项绝对值所成的级数恰好是发散的调和级数。一个收敛但不绝对收敛的级数，称为*条件收敛级数*。Cauchy、Lejeune–Dirichlet 和 Riemann 的研究清楚表明，必须区别绝对收敛级数与条件收敛级数。例如，在条件收敛级数中，不总能任意改变各项次序，也不总能任意用括号把各项分组。这些运算可能改变级数的和，可能把收敛级数变成发散级数，也可能反过来把发散级数变成收敛级数。例如，再考虑收敛级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

它的和显然等于当 n 无限增大时表达式

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

的极限。现在把这个级数各项重新排序，在每个正项后面放两个负项：

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\cdots.$$

考察部分和 $S_{3n}, S_{3n+1}, S_{3n+2}$，很容易证明新级数收敛。它的和是当 n 无限增大时

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{4j+2}-\frac{1}{4j+4}\right)$$

的极限。由恒等式

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

[12]在 §166 中将指出，这个定理是那里所证定理的一个特殊情形。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

可见，第二个级数的和是原级数之和的一半。

一般地，给定一个收敛但不绝对收敛的级数，可以把各项排列成某种次序，使新级数趋近于任意预先指定的数 A。设 S_p 是这个级数前 p 个正项之和，S'_q 是前 q 个负项绝对值之和；这里的取法使这 p 个正项和 q 个负项构成原级数的前 $p+q$ 项。那么前 $p+q$ 项之和显然是 $S_p - S'_q$。当 p, q 都无限增大时，S_p 与 S'_q 各自必无限增大；否则原级数或者发散，或者绝对收敛。另一方面，因为假定原级数收敛，它的通项必趋近于零。

现在可以按如下方式构造一个和为 A 的新级数。先按照正项在原级数中出现的次序取正项，直到它们的和超过 A；然后按照负项在原级数中出现的次序加入负项，直到总和小于 A；再从上次停止处继续加入正项，直到总和大于 A；然后回到负项，如此继续。显然，由此得到的新级数，其前 n 项之和交替地大于和小于 A，并且它同 A 的差趋近于零。

166. Abel 判别法

下面这个由 Abel 提出的判别法（按现代术语，也是 Dirichlet 判别法的一个标准形式），可以建立某些级数的收敛性，而前面的判别法对这些级数无能为力。证明依据 §75 中陈述并证明的引理。

设

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

是一个收敛级数，或者更一般地，它的全部部分和的绝对值始终小于某个固定数 A（原文称这种情形为“不定级数”）。再设

$$\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \ldots$$

是一个单调递减的正数列，并且当 n 无限增大时趋近于零。那么在上述假设下，级数

$$\epsilon_0 u_0 + \epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_n u_n + \cdots \tag{17}$$

收敛。

由假设可知，对任意 n, p 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < 2A.$$

所以，由刚才提到的引理，

$$|\epsilon_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \epsilon_{n+p} u_{n+p}| < 2A\epsilon_{n+1}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 n 无限增大时，ϵ_{n+1} 趋近于零。因此可把 n 取得足够大，使对所有 p，和

$$\epsilon_{n+1}u_{n+1}+\cdots+\epsilon_{n+p}u_{n+p}$$

的绝对值都小于任意预先指定的正数。由 §157 的一般定理，级数 (17) 收敛。

当级数 $u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$ 化为各项交替为 $+1$ 与 -1 的级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

时，本节定理就化为 §165 中关于交错级数所陈述的定理。

作为一般定理的例子，考虑级数

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta+\cdots,$$

它的部分和有界（原文称为“不定”）。事实上，若 $\sin\theta=0$，级数每一项都为零；若 $\sin\theta\neq 0$，则由一个三角学公式，前 n 项之和等于

$$\frac{\sin(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)},$$

其绝对值小于 $|1/\sin(\theta/2)|$。所以级数

$$\frac{\sin\theta}{1}+\frac{\sin 2\theta}{2}+\cdots+\frac{\sin n\theta}{n}+\cdots$$

对一切 θ 都收敛。类似地可以证明，级数

$$\frac{\cos\theta}{1}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\cdots+\frac{\cos n\theta}{n}+\cdots$$

对除 $\theta=2k\pi$ 以外的一切 θ 都收敛。

推论。若只限于收敛级数，可以陈述一个更一般的定理。设

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$$

是一个收敛级数，并设

$$\epsilon_0,\quad \epsilon_1,\quad \ldots,\quad \epsilon_n,\quad \ldots$$

是任意单调递增或单调递减的正数列；当 n 无限增大时，它趋近于一个不为零的极限 k。那么级数

$$\epsilon_0u_0+\epsilon_1u_1+\cdots+\epsilon_nu_n+\cdots \tag{18}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

也收敛。

为确定起见，设各 ϵ 始终递增。于是可写成

$$\epsilon_0 = k - \alpha_0, \qquad \epsilon_1 = k - \alpha_1, \qquad \ldots, \qquad \epsilon_n = k - \alpha_n, \qquad \ldots,$$

其中

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

构成一个递减正数列，并在 n 无限增大时趋近于零。于是两个级数

$$ku_0 + ku_1 + \cdots + ku_n + \cdots,$$

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots$$

都收敛，所以级数 (18) 也收敛。

II. 复项级数；多重级数

167. 定义

本节将讨论无穷级数概念的若干推广。

设

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{19}$$

是一个各项为复数的级数：

$$u_0 = a_0 + b_0 i, \qquad u_1 = a_1 + b_1 i, \qquad \ldots, \qquad u_n = a_n + b_n i, \qquad \ldots.$$

如果分别由相继各项的实部以及虚部的系数组成的两个级数都收敛：

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S', \tag{20}$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = S'', \tag{21}$$

就说级数 (19) 收敛。设 S' 与 S'' 分别是级数 (20) 和 (21) 的和。那么量

$$S = S' + iS''$$

称为级数 (19) 的和。显然，同以前一样，S 是给定级数前 $n+1$ 项之和 S_n 在 n 无限增大时的极限。由此可见，一个复项级数在本质上不过是两个实项级数的组合。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

如果由级数 (19) 各项的绝对值组成的级数

$$\sqrt{a_0^2+b_0^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\cdots \tag{22}$$

收敛，那么级数 (20) 和 (21) 显然都绝对收敛，因为

$$|a_n| \le \sqrt{a_n^2+b_n^2}, \qquad |b_n| \le \sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

在这种情形下，称级数 (19) *绝对收敛*。任意改变这样一个级数各项的次序，或者以任意方式把各项分组，都不改变它的和。

反过来，如果级数 (20) 和 (21) 都绝对收敛，那么级数 (22) 也收敛，因为

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} \le |a_n|+|b_n|.$$

每一个用于正项级数的收敛判别法，都相应地产生一个用于任意实项或复项级数的绝对收敛判别法。

例如，如果从某一项起，一个级数相邻两项之比的绝对值

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

始终小于某个小于 1 的固定数，那么这个级数绝对收敛。事实上，令 $U_n=|u_n|$。由于从某一项起

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k < 1,$$

也就有

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < k < 1,$$

这说明由绝对值组成的级数

$$U_0+U_1+\cdots+U_n+\cdots$$

收敛。如果当 n 无限增大时，$|u_{n+1}/u_n|$ 趋近于极限 l，那么 $l<1$ 时级数收敛，$l>1$ 时级数发散。前一部分不言自明。在后一种情形中，通项 u_n 不趋近于零，所以级数 (20) 和 (21) 不可能同时收敛。$l=1$ 的情形仍不能判定。

更一般地，设当 n 无限增大时，$\sqrt[n]{U_n}$ 的上极限为 ω。如果 $\omega<1$，级数 (19) 收敛；如果 $\omega>1$，它发散。因为在后一种情形中，通项的模不趋近于零（见 §160）。当 $\omega=1$ 时仍不能判定：级数可能绝对收敛，可能只收敛而不绝对收敛，也可能发散。

中译者校记（底本原误）。现代 LaTeX 重排本及 1904 年英译本此处均回引“§161”，但所援引的上极限判别实际在 §160，故按内容订正。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

168. 级数的乘法

设

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{23}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{24}$$

是任意两个级数。把第一个级数的各项同第二个级数的各项作一切可能的乘积，再把下标之和 $i+j$ 相同的所有乘积 u_iv_j 合在一起；这样得到一个新级数

$$\begin{aligned} &u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \cdots \\ &\quad + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0) + \cdots. \end{aligned} \tag{25}$$

如果级数 (23) 与 (24) 都绝对收敛，那么级数 (25) 收敛，并且它的和等于两个给定级数之和的乘积。

这个定理由 Cauchy 给出。Mertens 后来推广了它，[13]证明即使级数 (23) 与 (24) 中只有一个绝对收敛，而另一个仅仅收敛，结论仍然成立。

为确定起见，假定级数 (23) 绝对收敛，并设 w_n 是级数 (25) 的通项：

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0.$$

只要证明下面两个差各自在 n 无限增大时趋近于零，命题就得证：

$$\begin{aligned} &w_0 + w_1 + \cdots + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)(v_0 + v_1 + \cdots + v_n), \\ &w_0 + w_1 + \cdots + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1})(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n+1}). \end{aligned}$$

两种情形中的证明相同，所以只考察第一个差。按各个 u 整理后，它成为

$$\begin{aligned} \delta = {}& u_0(v_{n+1} + \cdots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \cdots + v_{2n-1}) + \cdots + u_{n-1}v_{n+1} \\ &+ u_{n+1}(v_0 + \cdots + v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + \cdots + v_{n-2}) + \cdots + u_{2n}v_0. \end{aligned}$$

由于级数 (23) 绝对收敛，所以对一切 n，和

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_n, \qquad U_i = |u_i|,$$

[13] *Crelle's Journal*, Vol. LXXIX。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

都小于某个固定正数 A。同样，由于级数 (24) 收敛，和 $v_0+v_1+\cdots+v_n$ 的绝对值对一切 n 都小于某个固定正数 B。此外，对任意预先指定的正数 ϵ，存在一个数 m，使得只要 $n\geq m$，不论 p 取何值，都有

$$U_{n+1}+\cdots+U_{n+p}<\frac{\epsilon}{A+B},\qquad |v_{n+1}+\cdots+v_{n+p}|<\frac{\epsilon}{A+B}.$$

取 n 使所有这些不等式都成立。把 $u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{2n}$ 分别换成 $U_0,U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$，把每个和

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+p}$$

换成 $\epsilon/(A+B)$，最后把每个表达式

$$v_0+v_1+\cdots+v_{n-1},\quad v_0+\cdots+v_{n-2},\quad \ldots,\quad v_0$$

换成 B，就得到 $|\delta|$ 的一个上界。于是

$$\begin{aligned}|\delta|<U_0\frac{\epsilon}{A+B}&+U_1\frac{\epsilon}{A+B}+\cdots+U_{n-1}\frac{\epsilon}{A+B}\\&+U_{n+1}B+U_{n+2}B+\cdots+U_{2n}B,\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}|\delta|&<\frac{\epsilon}{A+B}(U_0+U_1+\cdots+U_{n-1})+B(U_{n+1}+\cdots+U_{2n})\\&<\frac{\epsilon A}{A+B}+\frac{\epsilon B}{A+B}.\end{aligned}$$

所以最终有 $|\delta|<\epsilon$。因此当 n 无限增大时，差 δ 确实趋近于零。

169. 二重级数

考虑一个向上和向左有界、但向下和向右无限延伸的矩形网格。这个网格含有无穷多条竖直列，我们从左到右依次编号为 $0,1,2,\ldots$；它也含有无穷多条水平行，我们从上到下依次编号为 $0,1,2,\ldots$。现在假定给网格的每一个小矩形指定一个量，并把它写在相应的小矩形内。设 a_{ik} 是位于第 i 行、第 k 列的量。

于是得到如下阵列:

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & \cdots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}
\tag{26}
$$

我们先假定这个阵列的每一个元素都是正实数。

现在在这个阵列上画一列无穷多个曲线 $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, 满足下列条件: 1）每一条曲线都同界定阵列的两条直线组成一个闭曲线，并且完全包围前一条曲线；2）曲线 C_n 的形状除此之外完全任意，但当 n 无限增大时，从任意一个固定点到 C_n 上任意一点的距离都无限增大。设 S_n 是位于由 C_n 与界定阵列的两条直线组成的闭曲线内部的全部阵列元素之和。如果当 n 无限增大时 S_n 趋近于极限 S，就说二重级数

$$
\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik} \tag{27}
$$

收敛，并称 S 为它的和。

为了证明这个定义是合理的，必须说明极限 S 与曲线 C 的形状无关。设

$$
C'_1, C'_2, \ldots, C'_m, \ldots
$$

是另一组向无穷远退去的曲线，S'_m 是由 C'_m 与两条边界直线组成的闭曲线内部诸元素之和。任意固定 m 后，总能把 n 取得足够大，使曲线 C_n 完全位于 C'_m 外部。因此 $S'_m \le S_n$，从而对一切 m 都有 $S'_m \le S$。由于 S'_m 随 m 单调增加，所以当 m 无限增大时，它必趋近于某个极限 $S' \le S$。同理又有 $S \le S'$，所以 $S' = S$。

例如，可以把 C_n 取成两条直线；它们同阵列的两条边界组成一个边长随 n 无限增大的正方形。也可以把 C_n 取成一条同两条边界夹角相等的直线。相应的和分别为

$$
\begin{aligned}
&a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + \cdots \\
&\qquad + (a_{n0} + a_{n1} + \cdots + a_{nn} + a_{n-1,n} + \cdots + a_{0n}),
\end{aligned}
$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

以及

$$a_{00}+(a_{10}+a_{01})+(a_{20}+a_{11}+a_{02})+\cdots+(a_{n0}+a_{n-1,1}+\cdots+a_{0n}).$$

如果这两个和中有一个在 n 无限增大时趋近于极限，另一个也会如此，并且两个极限相等。

还可以逐行或逐列求这个阵列的和。事实上，假定二重级数 (27) 收敛，其和为 S。显然，级数中任意有限多个元素之和都不超过 S。因此，由单独一行中的元素组成的每一个级数

$$a_{i0}+a_{i1}+\cdots+a_{in}+\cdots,\qquad i=0,1,2,\ldots, \tag{28}$$

都收敛；因为前 $n+1$ 项之和 $a_{i0}+a_{i1}+\cdots+a_{in}$ 不超过 S，并且随 n 单调增加。设 σ_i 是由第 i 行元素组成的级数之和。那么新级数

$$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_i+\cdots \tag{29}$$

必定收敛。

为此，考虑阵列中满足 $i\le p, k\le r$ 的各项 a_{ik} 之和。这个和不超过 S；对固定的 p，它随 r 单调增加。因此，当 r 无限增大时，它趋近于一个极限，而对任意固定的 p，这个极限等于

$$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p. \tag{30}$$

由此可知，$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p$ 不超过 S，并且随 p 单调增加。所以级数 (29) 收敛，其和 Σ 小于或等于 S。反过来，如果每个级数 (28) 都收敛，并且级数 (29) 收敛于和 Σ，那么显然阵列 (26) 中任意有限多个元素之和都不超过 Σ。所以 $S\le\Sigma$，从而 $\Sigma=S$。

刚才对单独各行中元素组成的级数所作的论证，显然同样适用于单独各列中元素组成的级数。一个元素全为正数的收敛二重级数，可以逐行求和，可以逐列求和，也可以借助任意形状、向无穷远退去的曲线求和。特别地，如果逐行求和时级数收敛，那么逐列求和时它也必定收敛，并且所得的和相同。关于正项单级数所证明的许多定理，都可以推广到正元素二重级数。例如，如果一个正元素二重级数的每个元素分别小于某个已知收敛二重级数的对应元素，那么前一个二重级数也收敛；等等。

一个正项二重级数如果不收敛，就称为发散。随着闭曲线在一切方向上向无穷远退去，位于相应阵列中闭曲线内部的元素之和将无限增大。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

现在考虑一个元素不全为正数的阵列。如果所有元素都为负数，或者只有有限多个元素为正数或为负数，显然没有必要另行讨论，因为这些情形立刻化归为前一种情形。因此假定阵列中有无穷多个正元素，也有无穷多个负元素。设 a_{ik} 是这个阵列 T 的一般元素。如果由正元素组成的阵列 T_1 收敛，其中每个元素都是 T 中对应元素的绝对值 $|a_{ik}|$，就说阵列 T *绝对收敛*。这样的阵列具有正元素收敛阵列的一切本质性质。

为了证明这一点，考虑如下定义的两个辅助阵列 T' 与 T''。阵列 T' 从阵列 T 得到：把每个负元素换成零，而把正元素原样保留。类似地，阵列 T'' 从阵列 T 得到：把每个正元素换成零，并改变每个负元素的符号。只要阵列 T_1 收敛，阵列 T' 与 T'' 就都收敛；例如，T' 的每个元素都小于 T_1 的对应元素。位于任意闭曲线内部的级数 T 的各项之和，等于同一曲线内部的 T' 各项之和减去 T'' 各项之和。随着曲线在一切方向上向无穷远退去，后面两个和各自趋近于极限，所以第一个和也趋近于一个极限，并且这个极限与边界曲线的形状无关。这个极限称为阵列 T 的和。上面对正元素阵列所作的论证说明，逐行或逐列求阵列 T 的和，也会得到同一个结果。由此可见，一个正负元素任意混合的阵列，只要绝对收敛，就可以像正项收敛阵列一样处理。但必须先证明正元素阵列 T_1 收敛。

如果阵列 T_1 发散，那么阵列 T' 与 T'' 中至少有一个发散。若只有一个发散，例如 T' 发散而 T'' 收敛，则随着闭曲线 C 在一切方向上向无穷远退去，阵列 T 中位于 C 内部的元素之和将无限增大，而与曲线的形状无关。若 T' 与 T'' 都发散，上面的论证只能说明一件事：阵列 T 中位于闭曲线 C 内部的元素之和，等于两个和之差，而当曲线 C 在一切方向上向无穷远退去时，这两个和都无限增大。阵列 T 中位于 C 内部的元素之和，可能依曲线 C 的形状及其退去方式而趋近于不同极限；也就是说，它可能依赖于和式中正项数目与负项数目增长的相对速度。对某些退去方式，这个和甚至可能变为无穷大，或者根本不趋近于任何极限。特别地，如果阵列不绝对收敛，逐行求和所得结果可能同逐列求和所得结果完全不同。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

下面的例子是 Arndt 给出的。[14]考虑阵列

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) & -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) & -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right) & \cdots\ \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right) & -\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right), \ldots \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 & -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 & -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 & \cdots\ \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 & -\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2, \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n & \cdots\ \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n & -\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^n, \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{31}$$

它含有无穷多个正元素和无穷多个负元素。由单独一行或单独一列中的元素组成的每个级数都收敛。第 n 行各项所成级数的和显然为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

因此，逐行求阵列 (31) 的和，所得结果等于收敛级数

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots$$

的和，即 $1/2$。另一方面，由第 $(p-1)$ 列元素组成的级数是

$$\frac{1}{p}\left[\left(\frac{p-1}{p}\right) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{p-1}{p}\right)^n + \cdots\right]$$
$$-\frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{p}{p+1}\right) + \left(\frac{p}{p+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{p}{p+1}\right)^n + \cdots\right].$$

它收敛，其和为

$$\frac{p-1}{p} - \frac{p}{p+1} = -\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}.$$

所以，逐列求阵列 (31) 的和，所得结果等于收敛级数

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}\right) + \cdots$$

的和，即 $-1/2$。这个例子清楚地说明，除非一个二重级数绝对收敛，否则不应在计算中使用它。

[14]Grunert's *Archiv*, Vol. XI, p. 319。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

还会遇到元素为复数的二重级数。如果阵列 (26) 的元素都是复数，可以组成另外两个阵列 T' 与 T''：T' 的每个元素是 T 中对应元素的实部，T'' 的每个元素是 T 中对应元素的 i 的系数。再令 T_1 为由 T 的各元素绝对值组成的阵列，也就是说，T_1 的每个元素是 T 中对应元素的绝对值。如果 T_1 收敛，那么 T' 与 T'' 都绝对收敛，并称给定阵列 T 绝对收敛。当一个可变闭曲线在一切方向上向无穷远退去时，曲线内部诸元素之和趋近于一个极限。这个极限与可变曲线的形状无关，称为给定阵列的和。任一绝对收敛阵列的和，也可以逐行或逐列求得。

170.　化为单级数

一个绝对收敛的二重级数可以换成一个由同样元素组成的单级数。只须说明，网格 (26) 的各个小矩形可以这样编号：每个小矩形无一例外地都有一个确定编号，并且没有两个小矩形的编号相同。换句话说，只须说明自然数列

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n,\quad \ldots \tag{32}$$

同所有非负整数对 (i,k)（$i \geq 0, k \geq 0$）的集合之间，可以建立一一对应：任给一对 (i,k)，数列 (32) 中恰有一个数同它对应；反过来，没有一个数 n 同两对不同的 (i,k) 对应。

把各对 (i,k) 按如下次序写出：

$$(0,0),\quad (1,0),\quad (0,1),\quad (2,0),\quad (1,1),\quad (0,2),\quad \ldots.$$

一般地，在写出满足 $i+k=n$ 的所有数对以前，先把满足 $i+k<n$ 的数对全都写完；而在同一组中，则按 i 的值从 $(n,0)$ 到 $(0,n)$ 的次序排列。显然，任意一个数对 (i,k) 前面只会有有限多个数对。因此，按自然数依次给刚才写出的序列计数时，每个数对都得到一个不同的编号。

现在把绝对收敛二重级数

$$\sum_i \sum_k a_{ik}$$

的各元素按刚才确定的次序写出，便得到普通级数

$$a_{00}+a_{10}+a_{01}+a_{20}+a_{11}+a_{02}+\cdots+a_{n0}+a_{n-1,1}+\cdots. \tag{33}$$

这个单级数显然绝对收敛，并且它的和等于给定二重级数的和。显然，我们所用的方法并不是把给定二重级数化为单级数的唯一方法，因为级数 (33) 的各项

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

次序可以任意改变。反过来，任意绝对收敛的单级数都可以用无穷多种方式化为二重级数；这种过程是证明某些恒等式的有力工具。[15]

显然，二重级数的概念同单级数的概念并没有本质区别。在研究绝对收敛级数时，我们已经看到，可以任意改变各项次序，也可以用任意有限多个项之和代替这些项，而不改变级数的和。试图推广这个性质，自然就引出了二重级数。

171. 多重级数

二重级数的概念还可以推广。首先，可以考虑带有两个下标 m, n 的元素所成的级数，其中每个下标都可以从 $-\infty$ 变到 $+\infty$。这种级数的元素可以排列在一个向一切方向无限延伸的矩形网格中；显然，它可以分成我们刚才研究的那一类型的四个二重级数。

更重要的推广如下。考虑形如

$$a_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$$

的元素所成的级数，其中下标 $m_1, m_2, \ldots, m_p$ 可以各自从 0 变到 $+\infty$，或者从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，但也可以受某些不等式限制。当下标个数超过三个时，虽然没有上面那样方便的几何图形可用，但稍加思考就可看出，关于二重级数所证明的定理立刻可以推广到任意 p 阶多重级数。

先假定所有元素 $a_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ 都是正实数。令 S_1 是给定级数中若干元素的和，S_2 是 S_1 加上先前略去的若干项所得的和，S_3 是 S_2 再加上若干项所得的和，如此继续；并且依次的和

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

要这样组成：给定级数中的任意一个特定元素，从某一个和以后都出现在所有后续和中。如果当 n 无限增大时 S_n 趋近于极限 S，就说给定级数收敛，并称 S 为它的和。同二重级数的情形一样，这个极限同逐次各和的组成方式无关。

如果给定多重级数的元素有不同符号，或者是复数，那么只要由给定级数各项绝对值组成的级数收敛，原级数仍必定收敛。

[15]Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 67。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

172.　Cauchy 积分判别法的推广

下面的定理是 Cauchy 积分判别法（§161）的推广；在许多情形中，它能判定一个给定多重级数收敛还是发散。设 $f(x,y)$ 是二元函数，在某条闭曲线 Γ 外部的每一点 (x,y) 处都为正，并且随着点 (x,y) 远离原点，其值单调减小。[16]

考虑二重积分

$$\iint f(x,y)\ dx\ dy$$

在 Γ 与其外部一条可变曲线 C 之间的环形区域上的值；允许 C 在一切方向上无限退去。再把这个积分同二重级数

$$\sum f(m,n)$$

比较，其中下标 m,n 可以取任意整数值（正、负或零），只须点 (m,n) 位于固定曲线 Γ 外部。那么，二重积分趋近于有限极限时二重级数收敛，反过来也成立。

直线

$$x=0,\ x=\pm 1,\ x=\pm 2,\ldots,\qquad y=0,\ y=\pm 1,\ y=\pm 2,\ldots$$

把 Γ 与 C 之间的区域分成正方形或正方形的一部分。从二重级数中，对每一个这样的正方形选取对应于离原点最远的那个顶点的项。显然，这些项之和 $\sum f(m,n)$ 小于二重积分

$$\iint f(x,y)\ dx\ dy$$

在 Γ 与 C 之间区域上的值。如果当 C 在一切方向上无限退去时二重积分趋近于一个极限，那么级数中任意有限多个项之和始终小于某个固定数；所以级数收敛。类似地，如果二重级数收敛，那么二重积分在任意有限区域上的值始终小于某个固定数；所以积分趋近于有限极限。这个定理在适当假设下可以推广到任意 p 阶多重级数；在那种情形中，用来比较的是 p 重积分。

例如，考虑通项为

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\mu}}$$

[16]当前证明实际只需要函数在每个象限内沿离原点的方向单调不增；例如在第一象限中，只要 $x_1 \geq x_2$ 且 $y_1 \geq y_2$，就有 $f(x_1,y_1) \leq f(x_2,y_2)$。把证明改写为适合更一般的假设也很容易。——英译者。**中译者校记（底本原误）。**1904 年英译本及现代重排本把这里的函数值不等号误作 $\geq$；由上文的单调性假设和下述积分比较，应为 $\leq$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的二重级数，其中下标 m, n 可以取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的一切整数值，但排除 $m = n = 0$。当 $\mu > 1$ 时，这个级数收敛；当 $\mu \leq 1$ 时，它发散。因为二重积分

$$\iint \frac{dx\ dy}{(x^2+y^2)^\mu} \tag{34}$$

取遍平面中以原点为圆心的任意圆之外的区域时，在 $\mu > 1$ 的情形具有确定值，而在 $\mu \leq 1$ 时变为无穷大（§133）。

更一般地，通项为

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\cdots+m_p^2)^\mu}$$

的多重级数，在排除 $m_1 = m_2 = \cdots = m_p = 0$ 这一组值以后，当 $2\mu > p$ 时收敛。[17]

[17]更一般的定理见 Jordan, *Cours d'Analyse*, Vol. I, p. 163。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

III. 变项级数；一致收敛

173. 一致收敛的定义

形如

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{35}$$

的级数，其中各项是在区间 (a,b) 内变量 x 的连续函数，并且对属于该区间的每一个 x 值都收敛；即使如此，这个级数也不一定像人们或许会以为的那样表示一个连续函数。为了说明这一事实，只须考察我们在 §4 中研究过的级数：

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots.$$

这个级数满足上述条件，但它的和在 $x=0$ 处不连续。由于数学中出现的许多函数都是用级数来定义的，因而有必要研究以级数形式给出的函数的性质。首先出现的问题，正是判定一个给定级数的和是否为变量的连续函数。虽然这个问题还没有一般的解答，但对它的研究却导致了极其重要的*一致收敛*概念。

设形如 (35) 的级数，其每一项都是定义在区间 (a,b) 内的 x 的函数。如果它对 a 与 b 之间的每一个 x 值都收敛，并且任意预先给定一个正数 ϵ，总能找到一个与 x 无关的正整数 N，使得给定级数的余项

$$R_n=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)+\cdots$$

对于每个 $n\geq N$ 和区间 (a,b) 内的每个 x 值，其绝对值都小于 ϵ，那么就说这个级数在该区间内*一致收敛*。

定义中最后这个条件是本质的。对任意一个预先给定、且级数在其处收敛的 x 值，由收敛的定义本身显然可知：任给一个正数 ϵ，总能找到一个满足所述条件的数 N。但是，要使级数一致收敛，还必须要求同一个数 N 都满足这个条件，而不论在区间 (a,b) 内选取的是哪一个 x 值。下面的例子说明，情形并不总是如此。对于刚才考察的级数，当 $x\neq 0$ 时有

$$R_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

这个级数在区间 $(0,1)$ 内并非一致收敛。因为要使它一致收敛，必须（虽然这还不是充分的）存在一个数 N，使得

$$\frac{1}{(1+x^2)^N}<\epsilon$$

对区间 $(0,1)$ 内的一切 x 值都成立；或者等价地，必须有

$$1+x^2 > e^{\frac{1}{N}\log(1/\epsilon)}.$$

然而，无论 N 和 ϵ 取何值，总存在不满足这个不等式的正数 x，因为右端大于 1。

再考察由下列等式定义的级数：

$$S_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad S_0(x) = 0, \qquad u_n(x) = S_n - S_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

这个级数前 n 项之和显然是 $S_n(x)$；当 n 无限增大时，$S_n(x)$ 趋近于零。因此该级数收敛，而其余项 $R_n(x)$ 等于 $-nxe^{-nx^2}$。要使这个级数在区间 $(0,1)$ 内一致收敛，充要条件是：任意预先给定一个正数 ϵ，总存在一个正整数 N，使得对所有 $n \geq N$ 都有

$$nxe^{-nx^2} < \epsilon, \qquad 0 < x < 1.$$

但是，若把 x 换成 $1/n$，这个不等式的左端便等于 $e^{-1/n}$；只要 $n > 1$，它就大于 $1/e$。由于 ϵ 可以取得小于 $1/e$，可见给定级数并非一致收敛。

一致收敛级数的重要性建立在下面的性质上：

> 一个级数的各项若是在区间 (a,b) 内变量 x 的连续函数，并且该级数在这个区间内一致收敛，那么它的和本身也是同一区间内 x 的连续函数。

设 x_0 是 a 与 b 之间的一个 x 值，而 x_0+h 是 x_0 邻近的、同样位于 a 与 b 之间的一个值。任意预先给定一个正数 ϵ，把 n 取得足够大，使余项

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，其绝对值都小于 $\epsilon/3$。设 $f(x)$ 是给定收敛级数的和。于是可写成

$$f(x) = \phi(x) + R_n(x),$$

其中 $\phi(x)$ 表示前 $n+1$ 项之和，

$$\phi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x).$$

把下面两个等式相减：

$$f(x_0) = \phi(x_0) + R_n(x_0), \qquad f(x_0+h) = \phi(x_0+h) + R_n(x_0+h),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

得到

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left[\phi(x_0+h)-\phi(x_0)\right] \\ +R_n(x_0+h)-R_n(x_0).$$

数 n 的选取方式保证

$$|R_n(x_0)|<\frac{\epsilon}{3}, \qquad |R_n(x_0+h)|<\frac{\epsilon}{3}.$$

另一方面，由于级数的每一项都是 x 的连续函数，所以 $\phi(x)$ 本身也是 x 的连续函数。因此可以找到一个正数 η，使得只要 $|h|<\eta$，就有

$$|\phi(x_0+h)-\phi(x_0)|<\frac{\epsilon}{3}.$$

于是更有

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\epsilon$$

只要 $|h|<\eta$。这就说明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

注。乍看起来，要判定一个给定级数在给定区间内是否一致收敛，似乎是很困难的。下面的定理在许多情形中可以用来证明一个给定级数一致收敛。

设

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{36}$$

是一个级数，它的每一项都是区间 (a,b) 内 x 的连续函数；又设

$$M_0+M_1+\cdots+M_n+\cdots \tag{37}$$

是一个各项均为正的常数的收敛级数。如果对区间 (a,b) 内的一切 x 值和一切 n 都有

$$|u_n(x)|\leq M_n,$$

那么第一个级数 (36) 在所考察的区间内一致收敛。这就是通常所称的 Weierstrass M 判别法。

事实上，对 a 与 b 之间的一切 x 值，显然有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots|\leq M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots.$$

如果把 N 取得足够大，使第二个级数的余项 R_n 对一切 $n>N$ 都小于 ϵ，那么只要 $n>N$，对区间 (a,b) 内的一切 x 值也有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots|<\epsilon.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

例如，级数

$$M_0 + M_1 \sin x + M_2 \sin 2x + \cdots + M_n \sin nx + \cdots,$$

其中 $M_0, M_1, M_2, \ldots$ 的意义同上，在任意区间内都一致收敛。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

174.　级数的逐项积分与逐项微分

> 任何一个由连续函数组成、并在区间 (a,b) 内一致收敛的级数，都可以逐项积分，只要积分限是有限的并且位于区间 (a,b) 内。

设 x_0 和 x_1 是位于 a 与 b 之间的任意两个 x 值；取一个正整数 N，使得当 $n \geq N$ 时，对区间 (a,b) 内的一切 x 值都有 $|R_n(x)| < \epsilon$。设

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

是这个级数的和，并令

$$\begin{aligned} D_n &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx - \int_{x_0}^{x_1} u_0(x)\ dx - \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\ dx - \cdots - \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\ dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} R_n(x)\ dx. \end{aligned}$$

当 $n \geq N$ 时，D_n 的绝对值小于 $\epsilon|x_1 - x_0|$。所以当 n 无限增大时，D_n 趋近于零，从而有

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} u_0(x)\ dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\ dx + \cdots \\ + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\ dx + \cdots . \end{aligned}$$

把 x_0 看作固定的，而把 x_1 看作可变的，就得到级数

$$\int_{x_0}^{x} u_0(t)\ dt + \int_{x_0}^{x} u_1(t)\ dt + \cdots ;$$

这个级数在区间 (a,b) 内一致收敛，并表示一个连续函数，其导数为 $f(x)$。

> 反过来，任何一个收敛级数，如果逐项微分所得的级数一致收敛，就可以逐项微分。[18]

事实上，设

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

[18]证明中还假定新级数的每一项都是连续函数。不过，一般说来，这个定理仍然成立。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

是在区间 (a,b) 内收敛的级数。假定分别以给定级数各项的导数为项而成的新级数，在同一区间内一致收敛，并令 $\phi(x)$ 表示这个新级数的和：

$$\phi(x)=\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1}{dx}+\cdots+\frac{du_n}{dx}+\cdots .$$

把这个级数在两个积分限 x_0 与 x 之间逐项积分，其中二者都位于 a 与 b 之间，得到

$$\int_{x_0}^{x}\phi(t)\ dt=[u_0(x)-u_0(x_0)]+[u_1(x)-u_1(x_0)]+\cdots,$$

或者

$$\int_{x_0}^{x}\phi(t)\ dt=f(x)-f(x_0).$$

这说明 $\phi(x)$ 是 $f(x)$ 的导数。

例。1）积分

$$\int\frac{e^x}{x}\ dx$$

不能用有限多个初等函数表示。把它写成

$$\int\frac{e^x}{x}\ dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{e^x-1}{x}\ dx=\log|x|+\int\frac{e^x-1}{x}\ dx,$$

这里的等式应在不跨越 $x=0$ 的实区间上理解；而函数 $(e^x-1)/x$ 在 $x=0$ 处取连续延拓值 1。最后一个积分可以展开成一个对一切 x 值都成立的级数。事实上，

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{1\cdot2\cdots n}+\cdots;$$

不论 R 取得多大，这个级数在从 $-R$ 到 $+R$ 的区间内都一致收敛，因为级数任一项的绝对值都小于收敛级数

$$1+\frac{R}{1\cdot2}+\cdots+\frac{R^{n-1}}{1\cdot2\cdots n}+\cdots$$

的对应项。因此，逐项积分所得的级数（这里把任意积分常数取为 1）

$$F(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{1\cdot2}+\cdots+\frac{1}{n}\frac{x^n}{1\cdot2\cdots n}+\cdots$$

对任意 x 值都收敛，并且表示一个导数为 $(e^x-1)/x$ 的函数。

2）长轴为 $2a$、离心率为 e 的椭圆，其周长依 §112 等于定积分

$$S=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\ d\phi.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

乘积 $e^2\sin^2\phi$ 位于 0 与 e^2 之间，而 $e^2<1$。因此，根式等于二项式定理所给级数的和:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}=1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\phi-\frac{1}{2\cdot 4}e^4\sin^4\phi-\cdots\\ -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}e^{2n}\sin^{2n}\phi-\cdots.\end{aligned}$$

右端级数一致收敛，因为其每一项的绝对值都小于令 $\sin\phi=1$ 所得收敛级数的对应项。因此这个级数可以逐项积分；又由 §116,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,d\phi=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\,d\phi=\frac{\pi}{2}\Bigg\{1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\cdots\\ -\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^2(2n-1)e^{2n}-\cdots\Bigg\}.\end{aligned}$$

如果离心率 e 很小，只计算前几项便能得到这个积分精确值的一个很好的近似。

同样，对上限 ϕ 的任意值，积分

$$\int_0^{\phi}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\;dt$$

也可以展开成级数。

最后，Legendre 第一类完全积分的展开给出公式

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}\\ &\quad=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{4}e^2+\frac{9}{64}e^4+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^2e^{2n}+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

一致收敛的定义可以推广到各项为若干独立变量的函数的级数。例如，设

$$u_0(x,y)+u_1(x,y)+\cdots+u_n(x,y)+\cdots$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

是一个各项均为两个独立变量 x, y 的函数的级数，并假定当点 (x, y) 位于闭轮廓 C 所围成的区域 R 内时，这个级数总收敛。如果任给一个正数 ϵ，都能找到一个整数 N，使得对位于轮廓 C 内的每一点 (x, y)，只要 $n \geq N$，余项 R_n 的绝对值就小于 ϵ，那么就说这个级数在区域 R 内一致收敛。如果级数的各项在 R 内都连续，可以像上面一样证明，这种级数的和在该区域内是两个变量 x, y 的连续函数。

逐项积分定理也可以推广。如果级数的每一项都在 R 内连续，并且 $f(x, y)$ 表示级数的和，那么有

$$\iint f(x,y)\ dx\ dy = \iint u_0(x,y)\ dx\ dy + \iint u_1(x,y)\ dx\ dy + \cdots \\ + \iint u_n(x,y)\ dx\ dy + \cdots,$$

其中等式两边的每一个二重积分，都取遍同一个子区域 $D \subset R$；D 可以是 R 内任意一条闭轮廓所围成的区域。

再考察一个二重级数，其元素是一个或若干变量的函数，并且对这些变量在某个域 D 内的所有值组都绝对收敛。把级数的元素排列成通常的矩形阵列，并以 R_C 表示阵列平面中任意闭曲线 C 外部的二重级数之和。如果任意预先给定一个数 ϵ，都能画出一条与变量取值无关的闭曲线 K，使得对于位于 K 外部的任意曲线 C，以及域 D 内变量的任意一组值，都有 $|R_C| < \epsilon$，那么就说给定的二重级数在域 D 内一致收敛。

显然，上面的定义和定理可以毫无困难地推广到任意阶的多重级数，其元素可以是任意多个变量的函数。

注。如果一个级数并非一致收敛，就不一定可以逐项积分。例如，令

$$S_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad S_0(x) = 0, \qquad u_n(x) = S_n - S_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

以 $u_n(x)$ 为通项的级数收敛，而且其和为零，因为当 n 无限增大时 $S_n(x)$ 趋近于零。因此可以写成

$$f(x) = 0 = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

从而

$$\int_0^1 f(x)\ dx = 0.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

另一方面，如果把这个级数在零与一之间逐项积分，便得到一个新级数；它的前 n 项之和为

$$\int_0^1 S_n(x)\ dx = -\left[\frac{e^{-nx^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}),$$

而当 n 无限增大时，这个量趋近于极限 $1/2$。

175.　积分号下求导的应用

在 §97 中给出的积分号下求导公式的证明，本质上以积分限 x_0 与 X 有限为前提。如果 X 是无穷大，这个公式并不总成立。例如，考察积分

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\ dx, \qquad \alpha > 0.$$

这个积分与 α 无关；因为作代换 $y = \alpha x$ 后，它变成

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\ dy.$$

如果试图对 $F(\alpha)$ 使用通常的求导公式，就会得到

$$F'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \cos \alpha x\ dx.$$

这当然是不正确的，因为左端等于零，而右端没有确定值。

把这个问题同级数的研究联系起来，即使一个积分限为无穷大，也可以找到应用通常求导公式的充分条件。先考察积分

$$\int_{a_0}^{+\infty} f(x)\ dx,$$

并假定它有一个确定值（§90）。设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 是一列无限递增、且都大于 a_0 的数，并且 a_n 随 n 无限增大而变为无穷大。令

$$U_0 = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\ dx, \qquad U_1 = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\ dx,$$
$$\ldots,$$
$$U_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\ dx, \ldots.$$

于是级数

$$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

收敛，并且其和为

$$\int_{a_0}^{+\infty} f(x)\ dx,$$

因为前 n 项之和 S_n 等于

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\ dx.$$

应当注意，反命题并不总成立。例如，若令

$$f(x) = \cos x, \qquad a_0 = 0, \qquad a_1 = \pi, \qquad \ldots, \qquad a_n = n\pi, \qquad \ldots,$$

就有

$$U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos x\ dx = 0.$$

所以这个级数收敛，然而当 l 变为无穷大时，积分

$$\int_0^l \cos x\ dx$$

却不趋近于任何极限。

现在设 $f(x,\alpha)$ 是两个变量 x, α 的函数；当 $x \geq a_0$ 而 α 位于区间 (α_0, α_1) 内时，它连续。如果对 α 的任意值，积分

$$\int_{a_0}^l f(x,\alpha)\ dx$$

在 l 变为无穷大时都趋近于一个极限，那么这个极限就是 α 的一个函数:

$$F(\alpha) = \int_{a_0}^{+\infty} f(x,\alpha)\ dx.$$

如上所示，这个函数可以换成一个收敛级数的和，而该级数的各项都是 α 的连续函数:

$$F(\alpha) = U_0(\alpha) + U_1(\alpha) + \cdots + U_n(\alpha) + \cdots,$$

其中

$$U_0(\alpha) = \int_{a_0}^{a_1} f(x,\alpha)\ dx, \qquad U_1(\alpha) = \int_{a_1}^{a_2} f(x,\alpha)\ dx, \qquad \ldots.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当这个级数一致收敛时，函数 $F(\alpha)$ 就连续。仿照级数的情形，如果任意预先给定一个正数 ϵ，都能找到一个与 α 无关的数 N，使得只要 $l \geq N$，对区间 (α_0, α_1) 内的任意 α 值都有

$$\left|\int_l^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx\right| < \epsilon,$$

那么就说积分

$$\int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

在区间 (α_0, α_1) 内一致收敛。[19]如果积分一致收敛，那么相应的级数也一致收敛。事实上，只要取 $a_n > N$，就有

$$|R_n| = \left|\int_{a_n}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx\right| < \epsilon;$$

所以在这种情形中，函数 $F(\alpha)$ 在整个区间 (α_0, α_1) 内连续。

现在再假定：当 $x \geq a_0$ 且 $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时，导数 $\partial f/\partial\alpha$ 是 x, α 的连续函数；积分

$$\int_{a_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx$$

对区间 (α_0, α_1) 内的每个 α 值都有有限值；并且这个积分在该区间内一致收敛。所考察的积分可以换成级数的和：

$$\int_{a_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx = V_0(\alpha) + V_1(\alpha) + \cdots + V_n(\alpha) + \cdots,$$

其中

$$V_0 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx, \qquad \ldots, \qquad V_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx, \qquad \ldots.$$

这个新级数一致收敛，而它的各项分别是前一项级数中相应各项 $U_n(\alpha)$ 的导数。因此，由上面关于级数逐项微分的定理，可以写成

中译者校记（现代重排本误排）。现代 LaTeX 重排本此句漏去了“是相应各项的导数”这一关键成分，原文直排为“its terms are equal to the corresponding terms of the preceding series”。由定义 $U_n'(\alpha) = V_n(\alpha)$ 以及紧接着对逐项微分定理的应用可知，此处应按上述形式恢复。

[19]参看 W. F. Osgood, *Annals of Mathematics*, 2nd series, Vol. III (1902), p. 129。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$$F'(\alpha) = \int_{a_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx.$$

换句话说，只要右端的积分一致收敛，积分号下求导公式仍然成立。

积分号下积分公式（§123）也可以推广到一个积分限变为无穷大的情形。设当 $x \geq a_0$、$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时，$f(x, \alpha)$ 是两个变量 x, α 的连续函数。如果积分

$$\int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

在区间 (α_0, α_1) 内一致收敛，那么有

$$\int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx. \tag{A}$$

为证明这一点，先取一个数 $l > a_0$；于是有

$$\int_{a_0}^{l} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{a_0}^{l} f(x, \alpha)\, dx. \tag{B}$$

当 l 无限增大时，这个等式的右端趋近于二重积分

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx,$$

因为这两个二重积分之差等于

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{l}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx.$$

把 N 取得足够大，使得只要 $l > N$，对区间 (α_0, α_1) 内的任意 α 值，积分

$$\int_{l}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

的绝对值都小于 ϵ。于是所述差的绝对值小于 $\epsilon|\alpha_1 - \alpha_0|$，因而当 l 无限增大时趋近于零。所以等式 (B) 的左端在 l 变为无穷大时也趋近于一个极限，而这个极限用符号

$$\int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha$$

表示。这就得到所要证明的公式 (A)。[20]

[20]求导公式很容易从 (A) 推出；把它应用于 $f_u(x, u)$，便得到

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Phi(u)\, du = F(\alpha) - F(\alpha_0),$$

从而 $F'(\alpha) = \Phi(\alpha)$。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

176.　例子

1）回到 §91 的积分:

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\ dx,$$

其中 α 为正数。对 α 在积分号下求导所得的积分

$$-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\ dx$$

对所有大于任意给定正数 k 的 α 值都一致收敛。事实上,

$$\left|\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\ dx\right|<\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\ dx=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha l};$$

所以，如果 $l\geq N$，其中 N 取得足够大，使 $ke^{kN}>1/\epsilon$，那么对一切 $\alpha>k$，左端积分的绝对值都小于 ϵ。因此

$$F'(\alpha)=-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\ dx.$$

这个不定积分已经在 §119 中算出，从而

$$F'(\alpha)=\left[\frac{e^{-\alpha x}(\cos x+\alpha\sin x)}{1+\alpha^2}\right]_0^{+\infty}=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

于是

$$F(\alpha)=C-\arctan\alpha.$$

注意到当 α 变为无穷大时，定积分 $F(\alpha)$ 趋近于零，就可以确定常数 C。因此 $C=\pi/2$，最后得到公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\ dx=\arctan\frac{1}{\alpha}. \tag{38}$$

这个公式只对正的 α 值建立起来；但我们在 §91 中看到，左端是一个交错级数的和，而且它的余项 R_n 总小于 $1/n$。因此该级数一致收敛，而即使在 $\alpha=0$ 处，这个积分也是 α 的连续函数。当 α 趋近于零时，取极限得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ dx=\frac{\pi}{2}. \tag{39}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

2）在 §134 的公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

中令 $x = y\sqrt{\alpha}$，其中 α 为正数，就得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\ dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-1/2}. \tag{40}$$

不难证明，只要 α 始终大于某个正的常数 k，由这个积分对参数 α 逐次求导所得的一切积分都一致收敛。由上面的公式可推出整列积分的值：

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2}\ dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\alpha^{-3/2},\\ &\int_0^{+\infty} y^4 e^{-\alpha y^2}\ dy = \frac{1\cdot 3\sqrt{\pi}}{2^3}\alpha^{-5/2},\\ &\qquad\qquad\vdots\\ &\int_0^{+\infty} y^{2n} e^{-\alpha y^2}\ dy = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-(2n+1)/2}. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

把这些积分组合起来，还能算出无穷多个其他积分。例如，

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\ dy &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\left[1 - \frac{(2\beta y)^2}{1\cdot 2} + \cdots\right.\\ &\qquad\left. + (-1)^n\frac{(2\beta y)^{2n}}{1\cdot 2\cdots 2n} + \cdots\right] dy\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\ dy - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^2}{1\cdot 2}\ dy + \cdots\\ &\quad + (-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^{2n}}{1\cdot 2\cdots 2n}\ dy + \cdots. \end{aligned}$$

上述逐项积分也可直接由绝对收敛来保证。事实上，第 n 项积分绝对值为

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\frac{(\beta^2/\alpha)^n}{n!},$$

这些量的总和等于

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/\alpha} < +\infty.$$

右端一切积分都已经在上面算出，因此

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\ dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \frac{(2\beta)^2}{1\cdot 2}\frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\alpha^{-3/2} + \cdots + (-1)^n\frac{(2\beta)^{2n}}{1\cdot 2\cdots 2n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}} \times \sqrt{\pi}\,\alpha^{-(2n+1)/2} + \cdots;$$

化简后得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\ dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\beta^2/\alpha}. \tag{42}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

习题

1. 推导公式

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(\log x)^n\right] \\ = 1 + S_1\log x + \frac{S_2}{1\cdot 2}(\log x)^2 + \cdots \\ + \frac{S_n}{1\cdot 2\cdots n}(\log x)^n.\end{aligned}$$

其中 S_p 表示 $1, 2, \ldots, n$ 每次取 p 个所得各乘积之和。

〔Murphy〕

〔从公式

$$x^{n+\alpha} = x^n\left[1 + \alpha\log x + \frac{\alpha^2(\log x)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\alpha^n(\log x)^n}{1\cdot 2\cdots n} + \cdots\right]$$

出发，并对 x 求 n 次导数。〕

2. 利用积分号下求导公式，计算定积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

的值。

3. 推导公式

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}, \qquad a > 0.$$

〔先证明 $dI/\,da = -2I$。若允许任意实数 a，则积分只依赖于 $|a|$，右端应写成 $(\sqrt{\pi}/2)e^{-2|a|}$。〕

4. 利用前一题推导公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha-k^2/\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\pi}\,e^{-2k}, \qquad k > 0.$$

5. 从关系（$a > 0$）

$$\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$$

推出公式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 9 章

幂级数；三角级数

本章将研究两类特别重要的级数——幂级数和三角级数。虽然我们只讨论实变量，但是研究幂级数时所用的论证，对变量为复数的情形不作任何改变仍然适用；只须把“（实变量的）绝对值”这个说法换成“（复变量的）模或绝对值”即可。[1]

I. 一元幂级数

177. 收敛区间

先考察形如

$$A_0 + A_1X + A_2X^2 + \cdots + A_nX^n + \cdots \tag{1}$$

的级数，其中系数 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ 全都是正数，而自变量 X 只取正值。显然，每一项都随 X 增大而增大。因此，如果这个级数对 X 的某个特殊值（例如 X_1）收敛，那么它对任何小于 X_1 的 X 值更必收敛。反过来，如果这个级数对值 X_2 发散，那么它对任何大于 X_2 的 X 值当然都发散。我们区分下面几种情形。

1）级数 (1) 可能对 X 的任意值都收敛。例如级数

$$1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{X^n}{1\cdot 2\cdots n} + \cdots$$

就是如此。

[1]见第二卷，§§266–275。

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

2）级数 (1) 可能除 $X=0$ 外对 X 的任何值都发散。例如，下面的级数具有这一性质：

$$1+X+1\cdot 2X^2+\cdots+1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,X^n+\cdots.$$

3）最后，假定级数对 X 的某些值收敛，而对另一些值发散。设 X_1 是一个使它收敛的值，X_2 是一个使它发散的值。由刚才的说明可知，$X_1<X_2$。当 $X<X_1$ 时级数收敛；当 $X>X_2$ 时级数发散。唯一尚不能确定的是介于 X_1 与 X_2 之间的 X 值。但是，使级数收敛的一切 X 值都小于 X_2，因而它们有一个上确界，记作 R。又因为使级数发散的一切 X 值都大于任一使级数收敛的 X 值，所以数 R 同时也是使级数发散的 X 值的下确界。因此，级数 (1) 对一切大于 R 的 X 值发散，而对一切小于 R 的 X 值收敛。当 $X=R$ 时，它可以收敛，也可以发散。例如级数

$$1+X+X^2+\cdots+X^n+\cdots$$

在 $X<1$ 时收敛，在 $X\geq 1$ 时发散；这里 $R=1$。如果容许 R 等于零或变为无穷大，就可以说第三种情形也包括前两种情形。

现在考察一个幂级数，也就是形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{2}$$

的级数，其中系数 a_i 和变量 x 都可以取任意实值。从现在起令

$$A_i=|a_i|,\qquad X=|x|.$$

于是级数 (1) 就是级数 (2) 各项绝对值所成的级数。设 R 是上面为级数 (1) 定义的数。由 R 的定义可知，级数 (2) 对 $-R$ 与 $+R$ 之间的每一个 x 值显然绝对收敛。还须证明：只要 $|x|>R$，级数 (2) 就发散。这一点由 Abel 的一个基本定理立刻推出：

> 如果级数 (2) 对某个特殊值 x_0 收敛，那么它对绝对值小于 $|x_0|$ 的每一个 x 值都绝对收敛。

为证明这个定理，假定级数 (2) 在 $x=x_0$ 时收敛，并取一个正数 M，使它大于该级数在这个 x 值下任何一项的绝对值。于是对任意 n 都有

$$A_n|x_0|^n<M,$$

并且可以写成

$$A_nX^n = A_n|x_0|^n\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n < M\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n.$$

所以只要 $X < |x_0|$，级数 (1) 就收敛；定理得证。

换句话说，如果级数 (2) 对 $x = x_0$ 收敛，那么只要 $X < |x_0|$，它的绝对值级数 (1) 就收敛。因此 $|x_0|$ 不可能超过 R，因为 R 被定义为使级数 (1) 收敛的 X 值的上确界。

综上所述，给定一个系数可正可负的幂级数 (2)，存在一个正数 R，具有如下性质：级数 (2) 对 $-R$ 与 $+R$ 之间的每一个 x 值绝对收敛，而对绝对值大于 R 的每一个 x 值发散。区间 $(-R, +R)$ 称为这个幂级数的*收敛区间*，R 称为它的*收敛半径*。当把 R 看作无穷大时，这个区间从 $-\infty$ 延伸到 $+\infty$；当 $R = 0$ 时，它退化为原点。下面将不再考察后一种情形。

前面的证明没有告诉我们，在 $x = R$ 或 $x = -R$ 时会发生什么。级数 (2) 在这些端点可以绝对收敛，可以仅仅收敛而不绝对收敛，也可以发散。例如，下面三个级数的 R 都等于 1：

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots;$$

因为在每一种情形中，一项同前一项之比都以 x 为极限。第一个级数在 $x = \pm 1$ 时都发散；第二个级数在 $x = 1$ 时发散，在 $x = -1$ 时收敛；第三个级数在 $x = \pm 1$ 时都绝对收敛。

注。Abel 定理的叙述还可以推广；在证明中，只须假定级数

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + \cdots$$

的每一项的绝对值都小于某个固定的数。每当这个条件成立时，级数 (2) 对一切满足 $|x| < |x_0|$ 的 x 都绝对收敛。

数 R 同 §160 中定义的数 ω 有一个很简单的关系；ω 是数列的*上极限*（Cauchy 的历史术语为“最大极限”）：

$$A_1, \quad \sqrt{A_2}, \quad \sqrt[3]{A_3}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{A_n}, \quad \ldots$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

。事实上，若考察相应数列

$$A_1X, \quad \sqrt{A_2X^2}, \quad \sqrt[3]{A_3X^3}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{A_nX^n}, \quad \ldots,$$

显然新数列的上极限是 ωX。因此，级数 (1) 在 $X < 1/\omega$ 时收敛，在 $X > 1/\omega$ 时发散；所以

$$R = \frac{1}{\omega}.$$

2

178. 幂级数的连续性

设 $f(x)$ 是一个在区间 $(-R, +R)$ 内收敛的幂级数之和：

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots, \tag{3}$$

并设 R' 是一个小于 R 的正数。先证明级数 (3) 在区间 $(-R', +R')$ 内一致收敛。事实上，如果 $|x| < R'$，级数 (3) 的余项

$$R_n = a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p} + \cdots$$

的绝对值，小于相应级数 (1) 的余项

$$A_{n+1}R'^{\,n+1} + A_{n+2}R'^{\,n+2} + \cdots.$$

由于 $R' < R$，级数 (1) 在 $X = R'$ 时收敛。因此，可以找到一个数 N，使得只要 $n \geq N$，后一余项就小于任意预先指定的正数 ϵ。所以，只要 $|x| < R'$，当 $n \geq N$ 时总有 $|R_n| < \epsilon$。

由此可知，给定级数的和 $f(x)$ 对 $-R$ 与 $+R$ 之间的一切 x 值都是连续函数。事实上，任取一个满足 $|x_0| < R$ 的数 x_0。显然可以找到一个小于 R 而大于 $|x_0|$ 的数 R'。如上所证，级数在区间 $(-R', +R')$ 内一致收敛；又因为 x_0 属于这个区间，所以级数的和 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

这个证明不适用于收敛区间的端点 $+R$ 与 $-R$。不过，只要级数在这些端点收敛，函数 $f(x)$ 在那里仍然连续。Abel 证明了：如果级数 (3) 在 $x = R$ 时

[2]这个定理由 Cauchy 在他的 *Cours d'Analyse* 中证明；Hadamard 在其学位论文中重新发现了它。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

收敛，那么它在 $x = R$ 时的和，正是 x 从小于 R 的值趋近于 R 时，级数之和 $f(x)$ 所趋近的极限。[3]

设收敛级数

$$S = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_n R^n + \cdots$$

的和为 S，并取正整数 n，使下面任一个和

$$a_{n+1}R^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2} + \cdots,$$

$$a_{n+2}R^{n+2} + a_{n+3}R^{n+3} + \cdots, \qquad \ldots,$$

$$a_{n+p}R^{n+p} + a_{n+p+1}R^{n+p+1} + \cdots$$

的绝对值都小于一个预先指定的正数 ϵ。令 $x = R\theta$，再让 θ 从 0 增大到 1；于是 x 从 0 增大到 R，并且

$$f(x) = f(R\theta) = a_0 + a_1\theta R + a_2\theta^2 R^2 + \cdots + a_n\theta^n R^n + \cdots.$$

如果按上面的方式选取 n，便可以写成

$$\begin{aligned} S - f(x) = a_1 R(1-\theta) &+ a_2 R^2(1-\theta^2) + \cdots + a_n R^n(1-\theta^n) \\ &+ a_{n+1}R^{n+1} + \cdots + a_{n+p}R^{n+p} + \cdots \\ &- a_{n+1}\theta^{n+1}R^{n+1} - \cdots - a_{n+p}\theta^{n+p}R^{n+p} - \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

第二行级数之和的绝对值不超过 ϵ。另一方面，数

$$\theta^{n+1}, \theta^{n+2}, \ldots, \theta^{n+p}, \ldots$$

构成一个递减数列。因此，由 §166 中证明的 Abel 引理，

$$\left|a_{n+1}\theta^{n+1}R^{n+1} + \cdots + a_{n+p}\theta^{n+p}R^{n+p}\right| < \theta^{n+1}\epsilon < \epsilon.$$

所以，式 (4) 第三行级数之和的绝对值也不超过 ϵ。最后，式 (4) 右端第一行是关于 θ 的 n 次多项式，并且在 $\theta = 1$ 时为零。因此还可以找到一个正数 η，使得只要 θ 位于 $1-\eta$ 与 1 之间，这个多项式的绝对值就小于 ϵ。于是，对一切这样的 θ 值都有

$$|S - f(x)| < 3\epsilon.$$

[3]如上所述，这些定理可以立即推广到复项级数的情形。不过，在这种情形中，叙述推广形式时必须谨慎。见第二卷，§266。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

但 ϵ 是任意预先指定的正数，所以当 x 趋近于 R 时，$f(x)$ 以 S 为极限。

类似地可以证明，如果级数 (3) 在 $x=-R$ 时收敛，那么该级数在 $x=-R$ 时的和，等于 x 从大于 $-R$ 的值趋近于 $-R$ 时 $f(x)$ 所趋近的极限。事实上，只须把 x 换成 $-x$，这种情形就化为前一种情形。

一个应用。这个定理使我们能够补全 §168 中关于级数乘法的结果。设

$$S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{5}$$

$$S'=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{6}$$

是两个收敛级数，并且两者都不绝对收敛。级数

$$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+\cdots+(u_0v_n+\cdots+u_nv_0)+\cdots \tag{7}$$

可能收敛，也可能发散。如果它收敛，并把它的和记作 Σ，那么 Σ 等于两个已知级数之和的乘积，即 $\Sigma=SS'$。事实上，考虑三个幂级数

$$f(x)=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots,$$

$$\phi(x)=v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots+v_nx^n+\cdots,$$

$$\psi(x)=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)x+\cdots+(u_0v_n+\cdots+u_nv_0)x^n+\cdots.$$

按照假设，这三个级数在 $x=1$ 时都收敛。因此，它们各自在 -1 与 $+1$ 之间的每一个 x 值处都绝对收敛。对任何这样的 x 值，可以应用 Cauchy 关于级数乘法的定理，从而得到

$$f(x)\phi(x)=\psi(x). \tag{8}$$

由 Abel 定理，当 x 趋近于 1 时，三个函数 $f(x),\phi(x),\psi(x)$ 分别趋近于 S,S',Σ。在这个过程中，式 (8) 两端始终相等；所以取极限便有 $\Sigma=SS'$。

这个定理对复项级数仍然成立，证明完全相同。

179. 幂级数的逐次导数

设幂级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

在区间 $(-R,+R)$ 内收敛。若把它逐项求导，所得幂级数

$$a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \tag{9}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 · CC BY-SA 4.0 · GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在同一个区间内收敛。为了证明这一点，只须证明新级数各项绝对值所成的级数

$$A_1 + 2A_2X + \cdots + nA_nX^{n-1} + \cdots ,$$

其中 $A_i = |a_i|, X = |x|$，在 $X < R$ 时收敛，在 $X > R$ 时发散。

先证前一部分。假定 $X < R$，并在 X 与 R 之间取一个数 R'：

$$X < R' < R.$$

于是辅助级数

$$\frac{1}{R'}, \quad \frac{2}{R'}\frac{X}{R'}, \quad \frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2, \quad \ldots, \quad \frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1}, \quad \ldots$$

收敛，因为任一项同前一项之比以 X/R' 为极限，而这个极限小于 1。再把这个级数的相继各项分别乘以

$$A_1R', \quad A_2R'^2, \quad \ldots, \quad A_nR'^n, \quad \ldots;$$

由于 $R' < R$，这些因子全都小于某个固定的数。这样便得到级数

$$A_1 + 2A_2X + \cdots + nA_nX^{n-1} + \cdots ,$$

所以它也显然收敛。

后一部分的证明与此类似。若级数

$$A_1 + 2A_2X_1 + \cdots + nA_nX_1^{n-1} + \cdots$$

在某个大于 R 的 X_1 处收敛，那么级数

$$A_1X_1 + 2A_2X_1^2 + \cdots + nA_nX_1^n + \cdots$$

也收敛；从而级数 $\sum A_nX_1^n$ 也收敛，因为它的每一项都小于前一系列的对应项。这样一来，R 就不再是使级数 (1) 收敛的 X 值的上确界，矛盾。

因此，级数 (9) 的和 $f_1(x)$ 在同一个区间内部是 x 的连续函数。这个级数在任意区间 $(-R', +R')$（其中 $R' < R$）内一致收敛，所以由 §174，在这样的区间内 $f_1(x)$ 就是 $f(x)$ 的导数。由于 R' 可以任意接近 R，我们可以断言：对 $-R$ 与 $+R$ 之间的每一个 x 值，函数 $f(x)$ 都有导数，而且这个导数由把原级数逐项求导所得的级数表示：[4]

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots . \tag{10}$$

[4]对复项级数，相应定理也成立，不过证明所循的途径略有不同。见第二卷，§266。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

对级数 (10) 重复同一论证，可知 $f(x)$ 有二阶导数

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots ,$$

依此类推。对区间 $(-R, +R)$ 内的任意 x 值，函数 $f(x)$ 有无穷多个逐次导数；这些导数由原级数逐次逐项求导所得的级数表示：

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdots n\, a_n + 2 \cdot 3 \cdots (n+1)a_{n+1}x + \cdots . \tag{11}$$

在这些公式中令 $x = 0$，得到

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \qquad \ldots,$$

一般地，

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

所以所得的 $f(x)$ 展开式同 Maclaurin 公式给出的展开式完全相同：

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n}f^{(n)}(0) + \cdots .$$

系数 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 除了若干数值因子外，分别等于函数 $f(x)$ 及其逐次导数在 $x = 0$ 时的值。因此，一个函数不可能有两个不同的幂级数展开式。

同样地，把一个幂级数逐项积分，就得到另一个幂级数；新级数的常数项是任意的，而且它同原级数在同一区间内收敛，原级数则是新级数的导数。再积分一次，就得到第三个级数，它的前两项是任意的；依此类推。

例。 1）等比级数

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

的公比为 $-x$，它对 -1 与 $+1$ 之间的每一个 x 值收敛，其和为 $1/(1+x)$。在 $|x| < 1$ 时把它从 0 到 x 逐项积分，就再次得到 §49 中求出的 $\log(1+x)$ 展开式：

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots .$$

这个公式在 $x = 1$ 时也成立，因为右端级数在 $x = 1$ 时收敛。

2）对 -1 与 $+1$ 之间的任意 x 值，可以写成

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots .$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在 $|x| < 1$ 时把这个级数从 0 到 x 逐项积分，得到

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

由于新级数在 $x = 1$ 时收敛，便有

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

3）设 $F(x)$ 是收敛级数

$$\begin{aligned} F(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}x^p + \cdots \end{aligned}$$

的和，其中 m 是任意数，且 $|x| < 1$。于是

$$\begin{aligned} F'(x) = m + \frac{m(m-1)}{1}x + \cdots \\ + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)}x^{p-1} + \cdots . \end{aligned}$$

把等式两端乘以 $1 + x$，再合并同次幂项。利用容易验证的恒等式

$$\begin{aligned} \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)} + \frac{m(m-1)\cdots(m-p)}{1\cdot 2\cdots p} \\ = m\,\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}, \end{aligned}$$

得到

$$(1+x)F'(x) = m\left[1 + \frac{m}{1}x + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}x^p + \cdots\right],$$

也就是

$$(1+x)F'(x) = mF(x).$$

由此依次得到

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{m}{1+x}, \qquad \log[F(x)] = m\log(1+x) + \log C,$$

$$F(x) = C(1+x)^m.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

为了确定常数 C，只须注意 $F(0)=1$；所以 $C=1$。于是重新得到 §50 中的 $(1+x)^m$ 展开式：

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}x^p+\cdots.$$

4）在上一个公式中把 x 换成 $-x^2$，把 m 换成 $-1/2$，得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^{2n}+\cdots.$$

这个公式对 -1 与 $+1$ 之间的任意 x 值成立。在 $|x|<1$ 时把两端从 0 到 x 积分，得到反正弦的展开式

$$\begin{aligned}\arcsin x = x &+ \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots\\ &+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.\end{aligned}$$

180. Taylor 级数的推广

设 $f(x)$ 是一个在区间 $(-R,+R)$ 内收敛的幂级数之和，x_0 是这个区间内的一点，而 x_0+h 是同一区间内另一点，并且

$$|x_0|+|h|<R.$$

和为 $f(x_0+h)$ 的级数

$$a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2+\cdots+a_n(x_0+h)^n+\cdots$$

可以换成如下二重级数：把每个 (x_0+h) 的幂展开，并把含 h 同次幂的项写在同一行：

$$\begin{aligned}&a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots\\ &+a_1h+2a_2x_0h+\cdots+na_nx_0^{n-1}h+\cdots\\ &+a_2h^2+\cdots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_nx_0^{n-2}h^2+\cdots\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\tag{12}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这个二重级数绝对收敛。事实上，若把它的每一项换成绝对值，就得到一个正项二重级数：

$$\begin{aligned}&A_0+A_1|x_0|+A_2|x_0|^2+\cdots+A_n|x_0|^n+\cdots\\&+A_1|h|+2A_2|x_0||h|+\cdots+nA_n|x_0|^{n-1}|h|+\cdots\\&+A_2|h|^2+\cdots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_n|x_0|^{n-2}|h|^2+\cdots\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .\end{aligned}\tag{13}$$

把任一列的各项相加，所得级数为

$$A_0+A_1(|x_0|+|h|)+\cdots+A_n(|x_0|+|h|)^n+\cdots;$$

由于假定 $|x_0|+|h|<R$, 这个级数收敛。因此, 阵列 (12) 可以按行求和, 也可以按列求和。按列求和得到 $f(x_0+h)$；按行求和则得到一个按 h 的幂排列的级数, 其中 $h, h^2, \ldots$ 的系数分别是 $f'(x_0), f''(x_0)/2!, \ldots$。所以，只要 $|h|<R-|x_0|$, 便可以写成

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x_0)+\cdots .\tag{14}$$

这个公式在从 $x_0-R+|x_0|$ 到 $x_0+R-|x_0|$ 的区间内肯定成立；不过，右端级数有时会在更大的区间内收敛。例如，考虑函数 $(1+x)^m$，其中 m 不是正整数。它按 x 的幂展开所得的公式对 -1 与 $+1$ 之间的一切 x 值成立。设 x_0 是这个区间内的一个 x 值。于是可以写成

$$(1+x)^m=(1+x_0+x-x_0)^m=(1+x_0)^m(1+z)^m,\qquad z=\frac{x-x_0}{1+x_0}.$$

现在可以把 $(1+z)^m$ 按 z 的幂展开；只要 $|z|<1$，这个新展开式就成立，也就是说，它对 -1 与 $1+2x_0$ 之间的一切 x 值成立。如果 x_0 为正，新区间就比原区间 $(-1,+1)$ 更大。因此，新公式使我们能够计算变量落在原收敛区间以外时的函数值。进一步研究这个说明，会引出一个极其重要的概念——*解析延拓*。我们将在第二卷中讨论这个题目。

注。显然，上面对按变量 x 的正整数幂排列的级数所证明的各定理，可以立刻推广到按 $x-a$ 的正整数幂排列的级数；甚至更一般地，可以推广到按任意连续函数 $\phi(x)$ 的正整数幂排列的级数。只须把它们看成复合函数，并把 $\phi(x)$ 看作辅助函数即可。因此，按 $1/x$ 的正整数幂排列的级数，对绝对值大于某个

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

正的常数的一切 x 值收敛，并且在所有这些变量值处表示 x 的连续函数。例如，设 $a>0$，函数 $\sqrt{x^2-a}$ 可以写成

$$x\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{1/2}.$$

当 $|x|>\sqrt{a}$ 时，$(1-a/x^2)^{1/2}$ 可以按 $1/x^2$ 的幂展开，于是得到

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-a}=x-\frac{1}{2}\frac{a}{x}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{a^2}{x^3}-\cdots\\ -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2p}\frac{a^p}{x^{2p-1}}-\cdots.\end{aligned}$$

当 $x>\sqrt{a}$ 时，这是 $\sqrt{x^2-a}$ 的一个有效展开式；当 $x<-\sqrt{a}$ 时，同一个级数仍然收敛，但它表示函数 $-\sqrt{x^2-a}$。如果已知大于某个整数的第一个完全平方数，这个公式可以很方便地用来求该整数平方根的展开式。

181. 优函数

上面证明的各定理, 在多项式与幂级数之间建立了密切的类比。设 $(-r,+r)$ 是若干给定幂级数

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$$

的收敛区间中最小的一个。当 $|x|<r$ 时，这些级数都绝对收敛，因而可以按照多项式的通常法则彼此相加或相乘。一般地，$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 的任意整多项式，在同一区间内都可以展开成收敛幂级数。

为了作进一步推广，现在定义下面一些以后会有用的说法。设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

是一个幂级数，又设

$$\phi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots$$

是另一个在适当区间内收敛而且系数全为非负数的幂级数。如果每个系数 α_n 都不小于 $f(x)$ 中相应系数的绝对值:

$$|a_0|\leq\alpha_0,\qquad |a_1|\leq\alpha_1,\qquad \ldots,\qquad |a_n|\leq\alpha_n,\qquad \ldots,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

就说函数 $\phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的*优函数*（majorant function）。[5]Poincaré 建议用记号

$$f(x) \ll \phi(x)$$

表示函数 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 之间的这种关系。

> **中译者校记（底本原误）。**原书在定义中使用严格不等式“$\alpha_n > |a_n|$”，但同节稍后所取的标准优函数允许常数项恰好等于 $|a_0|$，§187 也明确使用 $|a_{mn}| \le b_{mn}$。为使定义同后文及现代通行用法一致，正文统一采用非严格不等式；若需要严格不等式，只须把优函数的系数稍微放大。

优函数的用处建立在下面这个由定义立即推出的事实之上。设 $P(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 是 $f(x)$ 前 $n+1$ 个系数的一个多项式，而且这个多项式本身的系数全为实数和正数。若把其中的 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 换成 $\phi(x)$ 的相应系数，就显然有

$$|P(a_0, a_1, \ldots, a_n)| \le P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

例如，如果 $\phi(x)$ 是 $f(x)$ 的优函数，那么表示 $[\phi(x)]^2$ 的级数就是 $[f(x)]^2$ 的优级数；依此类推，一般地，$[\phi(x)]^n$ 是 $[f(x)]^n$ 的优函数。同样，如果 ϕ 与 ϕ_1 分别是 f 与 f_1 的优函数，那么乘积 $\phi\phi_1$ 是乘积 ff_1 的优函数；等等。

给定一个在区间 $(-R, +R)$ 内收敛的幂级数 $f(x)$，求它的优函数这个问题当然是不定的。不过，为了后面的应用，最好把优函数取得尽可能简单。任取一个小于 R 而又任意接近 R 的数 r。由于给定级数在 $x = r$ 时收敛，它的各项绝对值有一个上界，记作 M。于是对任意 n 都可以写成

$$A_n r^n < M, \qquad \text{或者} \qquad |a_n| = A_n < \frac{M}{r^n}.$$

因此级数

$$M + M\frac{x}{r} + M\frac{x^2}{r^2} + \cdots + M\frac{x^n}{r^n} + \cdots = \frac{M}{1 - x/r}$$

的通项是 Mx^n/r^n，它是给定函数 $f(x)$ 的优函数。这是最常使用的优函数。如果级数 $f(x)$ 没有常数项，则可以取

$$\frac{M}{1 - x/r} - M = \frac{Mx}{r - x}$$

[5]这里的“优函数”用来翻译法文短语“$\phi(x)$ est majorante pour la fonction $f(x)$”; 相应地，“dominant functions”翻译法文“fonctions majorantes”。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

作为优函数。

显然，r 可以取任意小于 R 的值；一般地，M 随 r 的增大而增大。不过，M 绝不可能小于 A_0。如果 $A_0 \neq 0$，总可以找到一个小于 r 的数 ρ，使函数

$$\frac{A_0}{1 - x/\rho}$$

成为 $f(x)$ 的优函数。事实上，先取一个优函数

$$M + M\frac{x}{r} + M\frac{x^2}{r^2} + \cdots, \qquad M > A_0.$$

如果 $\rho < rA_0/M$ 且 $n \geq 1$，就有

$$|a_n\rho^n| = |a_n r^n| \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < M\left(\frac{\rho}{r}\right)^n < A_0,$$

因而 $|a_n\rho^n| < A_0$。另一方面，$|a_0| = A_0$。所以级数

$$A_0 + A_0\frac{x}{\rho} + A_0\frac{x^2}{\rho^2} + \cdots + A_0\frac{x^n}{\rho^n} + \cdots$$

是函数 $f(x)$ 的优函数。这个事实很快就会用到。更一般地, 在形如 $M/(1-x/\rho)$ 的优函数中，分子 M 可以预先取为任意一个不小于 A_0 的数。

类似地可以证明，如果 $a_0 = 0$，那么对任意给定的正数 μ，都可以适当选择一个正数 ρ，使函数

$$\frac{\mu}{1 - x/\rho} - \mu = \frac{\mu x}{\rho - x}$$

成为 $f(x)$ 的优函数。

> **中译者校记（底本原误）**。1904 年英译本和现代重排本在上文写作“M 一般随 r 增大而减小”。若把 M 取为数列 $\{A_n r^n\}$ 的上确界，则它显然关于 r 单调不减，故正文据此订正。现代重排本还在 $a_0 = 0$ 的公式中漏去了参数 μ；这里依 1904 年英译本恢复为 $\mu/(1 - x/\rho) - \mu$。

注。知道一个支配函数 $f(x)$ 的等比级数，还能估计用级数前 $n + 1$ 项之和代替函数 $f(x)$ 时所犯的误差。如果级数 $M/(1 - x/r)$ 支配 $f(x)$，那么给定级数的余项

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots$$

的绝对值，小于优级数的相应余项

$$M\left[\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1} + \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+2} + \cdots\right].$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，所述误差小于

$$\frac{M}{1-|x|/r}\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1}.$$

182. 一个级数代入另一个级数

设

$$z=f(y)=a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n+\cdots \tag{15}$$

是按变量 y 的幂排列、并在 $|y|<R$ 时收敛的级数。再设

$$y=\phi(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots \tag{16}$$

是另一个在区间 $(-r,+r)$ 内收敛的级数。如果把级数 (15) 中的 $y,y^2,\ldots$ 换成由 (16) 得到的、按 x 的幂排列的相应展开式，就得到二重级数

$$\begin{aligned}&a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\cdots+a_nb_0^n+\cdots\\+&a_1b_1x+2a_2b_0b_1x+\cdots+na_nb_0^{n-1}b_1x+\cdots\\+&a_1b_2x^2+a_2(b_1^2+2b_0b_2)x^2+\cdots\\+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned} \tag{17}$$

现在考察这个二重级数绝对收敛的条件。首先，第一行中的级数

$$a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\cdots$$

必须绝对收敛；以下不讨论端点的特殊情形，因而要求 $|b_0|<R$。[6]

这个条件也是充分的。事实上，如果它成立，函数 $\phi(x)$ 就可以被形如

$$\frac{m}{1-x/\rho}$$

的式子支配，其中 m 是任意一个大于 $|b_0|$ 的正数，而 $\rho<r$。因此可以假定 $m<R$。再取一个介于 m 与 R 之间的正数 R'。于是函数 $f(y)$ 可以被形如

$$\frac{M}{1-y/R'}=M+M\frac{y}{R'}+M\frac{y^2}{R'^2}+\cdots$$

[6]原书只明说不考察 $y=R$ 的端点情形；由于这里的条件实际写成 $|b_0|<R$，同样也排除了 $y=-R$。端点能否代入须分别考察原级数在相应端点的收敛性。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的式子支配。在最后这个级数中以 $m/(1-x/\rho)$ 代替 y，再利用二项式定理把 y 的各幂按 x 的升幂展开，就得到新的二重级数

$$\begin{aligned} &M+\frac{Mm}{R'}+\frac{Mm^2}{R'^2}+\cdots \\ &+\frac{Mm}{R'}\frac{x}{\rho}+2\frac{Mm^2}{R'^2}\frac{x}{\rho}+\cdots \\ &+\frac{Mm}{R'}\frac{x^2}{\rho^2}+3\frac{Mm^2}{R'^2}\frac{x^2}{\rho^2}+\cdots \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \end{aligned} \tag{18}$$

它的每个系数都是正数，并且大于阵列 (17) 中相应系数的绝对值；因为 (17) 中每个系数都是由 $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ 只经过加法和乘法形成的。因此，只要二重级数 (18) 绝对收敛，二重级数 (17) 就绝对收敛。

在级数 (18) 中把 x 换成 $|x|$。绝对收敛的一个必要条件是任一列各项所成的级数都收敛，也就是 $|x|<\rho$。若这个条件成立，第 $n+1$ 列各项之和等于

$$\frac{M}{R'^n}\left(\frac{m}{1-|x|/\rho}\right)^n .$$

于是还必须有

$$m<R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right),$$

也就是

$$|x|<\rho\left(1-\frac{m}{R'}\right). \tag{19}$$

后一条件已经包含前一条件 $|x|<\rho$；所以它是二重级数 (18) 绝对收敛的充要条件。因此，二重级数 (17) 对一切满足不等式 (19) 的 x 值都绝对收敛。

还应注意，级数 $\phi(x)$ 对所有这些 x 值都收敛，而且相应的 y 值的绝对值小于 R'。事实上，不等式

$$|\phi(x)|<\frac{m}{1-|x|/\rho}<R'$$

当然蕴含 $|\phi(x)|<R'$。把级数 (17) 按列求和，得到

$$a_0+a_1\phi(x)+a_2[\phi(x)]^2+\cdots+a_n[\phi(x)]^n+\cdots ,$$

也就是 $f[\phi(x)]$。另一方面，按行求和则得到一个按 x 的幂排列的级数。因此可以写成

$$f[\phi(x)]=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots , \tag{20}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中系数 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ 由公式

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \cdots + a_n b_0^n + \cdots, \\ c_1 &= a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + \cdots + n a_n b_0^{n-1} b_1 + \cdots, \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2) + \cdots \end{aligned} \tag{21}$$

给出；这些公式很容易验证。

公式 (20) 目前只对满足不等式 (19) 的 x 值建立起来；但是，后一个不等式只给出公式成立区间大小的一个下界。这个公式也许在大得多的区间内有效。这里出现了一个问题，它的解决需要复变量函数的知识；以后还会回到这个问题。

特殊情形。 1）式 (19) 中的数 R' 可以任意接近 R，所以只要

$$|x| < \rho\left(1 - \frac{m}{R}\right),$$

公式 (20) 就成立。因此，如果级数 (15) 对任意 y 值都收敛，就可以把 R 看作无穷大，把 ρ 取得任意接近 r；于是公式 (20) 对 $|x| < r$ 成立，也就是在级数 (16) 的整个收敛区间内成立。特别地，如果级数 (16) 对一切 x 值都收敛，而级数 (15) 对一切 y 值都收敛，那么公式 (20) 对一切 x 值都成立。

2）当级数 (16) 的常数项 b_0 为零时，函数 $\phi(x)$ 可以被形如

$$\frac{m}{1 - x/\rho} - m$$

的式子支配，其中 $\rho < r$，而 m 可以是任意正数。与一般情形相同的论证表明，在这种情形中，只要 x 满足

$$|x| < \rho \frac{R'}{R' + m}, \tag{22}$$

公式 (20) 就成立，其中 R' 可以任意接近 R。相应的有效区间大于不等式 (19) 所给出的区间。这种特殊情形在实际中经常出现。不等式 $|x| < \rho$ 显然成立，而且系数 c_n 只依赖于 $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$：

$$c_0 = a_0, \qquad c_1 = a_1 b_1, \qquad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \qquad \ldots,$$

$$c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1^n.$$

例。 1）Cauchy 给出了一个从 $\log(1+x)$ 的展开式推出二项式定理的方法。令

$$y = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

就可以写成

$$(1+x)^u = e^{u\log(1+x)} = e^{uy} = 1 + uy + \frac{u^2y^2}{1\cdot 2} + \frac{u^3y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots .$$

把右端按 x 的幂排列，显然 x^n 的系数是 u 的一个 n 次多项式，记作 $P_n(u)$。当 $u = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ 时，这个多项式必须为零；当 $u = n$ 时，它必须等于 1。这些事实把 P_n 完全确定为

$$P_n(u) = \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}. \tag{23}$$

2）令 $z = (1+x)^{1/x}$，其中 x 位于 -1 与 $+1$ 之间。可以写成

$$z = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots ,$$

其中

$$y = \frac{1}{x}\log(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots .$$

第一个展开式对一切 y 值成立，第二个展开式在 $|x| < 1$ 时成立。因此，把第二个展开式代入第一个所得的公式，对 -1 与 $+1$ 之间的任意 x 值都成立。这个公式的头两项为

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x} &= e - \frac{x}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n} + \cdots\right) + \cdots \\ &= e - \frac{e}{2}x + \cdots = e\left(1 - \frac{x}{2} + \cdots\right).\end{aligned} \tag{24}$$

所以，当 x 取正值趋近于零时，$(1+x)^{1/x}$ 从小于 e 的值趋近于 e。

183. 幂级数的除法

先考察一个以 1 开始、并在区间 $(-r, +r)$ 内收敛的幂级数的倒数：

$$f(x) = \frac{1}{1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots}.$$

令

$$y = b_1x + b_2x^2 + \cdots ,$$

就可以写成

$$f(x) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots .$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

把第一个展开式代入第二个，得到 $f(x)$ 的幂级数展开式

$$f(x) = 1 - b_1 x + (b_1^2 - b_2)x^2 + \cdots, \tag{25}$$

它在某个区间内部成立。同样地，任何常数项不为零的幂级数，其倒数也都可以这样展开。

现在设法展开两个收敛幂级数的商：

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}.$$

如果 $b_0 \neq 0$，这个商可以写成

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0} \cdot \frac{1}{1 + (b_1/b_0)x + (b_2/b_0)x^2 + \cdots}.$$

由刚才讨论的情形，左端是两个收敛幂级数的乘积。因此，它可以写成一个在原点附近收敛的幂级数：

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots. \tag{26}$$

消去分母并比较 x 同次幂的系数，得到

$$\begin{gathered} a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0, \\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{27}$$

由这些公式可以依次算出系数 $c_0, c_1, \ldots, c_n$。应当注意，这些系数同把各多项式按 x 的升幂排列、再按通常的多项式除法规则进行所示除法时得到的系数完全相同。

如果 $b_0 = 0$，结果就不同。一般地，设

$$\psi(x) = x^k \psi_1(x),$$

其中 k 是正整数，而 $\psi_1(x)$ 是常数项不为零的幂级数。于是

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x^k}\frac{\phi(x)}{\psi_1(x)},$$

并且由上面的结果还有

$$\frac{\phi(x)}{\psi_1(x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + \cdots.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所以给定的商可以表示为

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{c_0}{x^k} + \frac{c_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{x} + c_k + c_{k+1}x + \cdots, \tag{28}$$

右端是一个在 $x = 0$ 时变为无穷大的有理分式与一个在原点附近收敛的幂级数之和。

注。为了计算一个幂级数的逐次幂，采用下面的方法很方便。假定有恒等式

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots)^m = C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots.$$

对两端取对数导数，再消去分母，得到新恒等式

$$\begin{aligned} &m(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots)(C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots) \\ &\quad = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots)(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1} + \cdots). \end{aligned} \tag{29}$$

各次幂的系数很容易算出。比较同次幂的系数，就得到一列公式；只要知道 C_0，便可由这些公式依次求出 $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$。显然

$$C_0 = a_0^m.$$

184. $1/\sqrt{1-2xz+z^2}$ 的展开

把

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

按 z 的幂展开。令 $y = 2xz - z^2$；当 $|y| < 1$ 时有

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^2 + \cdots,$$

也就是

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + \frac{2xz - z^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(2xz - z^2)^2 + \cdots. \tag{30}$$

把含 z 同次幂的项合并，得到形如

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = P_0 + P_1z + P_2z^2 + \cdots + P_nz^n + \cdots \tag{31}$$

的展开式，其中

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = x, \qquad P_2 = \frac{3x^2-1}{2}, \qquad \ldots,$$

而一般地，P_n 是 x 的 n 次多项式。这些多项式可以由一个递推公式依次确定。对方程 (31) 关于 z 求导，得到

$$\frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = P_1 + 2P_2 z + \cdots + nP_n z^{n-1} + \cdots ,$$

或者利用方程 (31)，

$$(x-z)(P_0 + P_1 z + \cdots + P_n z^n + \cdots) \\ = (1-2xz+z^2)(P_1 + 2P_2 z + \cdots).$$

比较 z^n 的系数，得到所求递推公式

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}.$$

这个方程同三个相继 Legendre 多项式之间的关系（§88）完全相同；而且

$$P_0 = X_0, \qquad P_1 = X_1, \qquad P_2 = X_2.$$

所以对一切 n 都有 $P_n = X_n$，公式 (31) 可以写成

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots , \tag{32}$$

其中 X_n 是 n 阶 Legendre 多项式

$$X_n = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

以后将求出公式 (32) 成立的区间。

II. 多元幂级数

185.　一般原理

一元幂级数的性质很容易推广到若干独立变量的幂级数。先考察二重级数

$$\sum_{m,n\geq 0} a_{mn}x^m y^n,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中整数 m, n 从零变到 $+\infty$，而系数 a_{mn} 可以有任意正负号。设 $x_0y_0 \neq 0$。如果在一组值 $x = x_0, y = y_0$ 下，这个级数的任何一项的绝对值都不超过某个正的常数，那么对于一切满足不等式

$$|x| < |x_0|, \qquad |y| < |y_0|$$

的 x, y 值，该级数都绝对收敛。

事实上，假定对所有 m, n 都有

$$|a_{mn}x_0^m y_0^n| \leq M, \qquad \text{或者} \qquad |a_{mn}| \leq \frac{M}{|x_0|^m |y_0|^n}.$$

那么二重级数 $\sum a_{mn}x^m y^n$ 的通项绝对值，小于二重级数

$$\sum M \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n$$

的对应项。后一二重级数在 $|x| < |x_0|, |y| < |y_0|$ 时收敛，它的和为

$$\frac{M}{(1 - |x/x_0|)(1 - |y/y_0|)};$$

只须先求每一列各项之和，再把这些和相加，便可看出这一点。

设 r, ρ 是两个正数，使二重级数

$$\sum_{m,n \geq 0} |a_{mn}| r^m \rho^n$$

收敛；并以 R 表示四条直线 $x = r, x = -r, y = \rho, y = -\rho$ 所围成的矩形。对于这个矩形内部或边界上的每一点，二重级数

$$F(x, y) = \sum_{m,n \geq 0} a_{mn}x^m y^n \tag{33}$$

的任何一项的绝对值，都不超过级数 $\sum |a_{mn}| r^m \rho^n$ 的对应项。因此，级数 (33) 在 R 内绝对且一致收敛，从而在该区域内定义了一个关于两个变量 x, y 的连续函数。

同一元级数一样，可以证明：把这个二重级数逐项微分任意多次所得的二重级数，在由直线

$$x = r - \epsilon, \quad x = -r + \epsilon, \quad y = \rho - \epsilon', \quad y = -\rho + \epsilon'$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所围成的矩形内绝对且一致收敛；这里 ϵ, ϵ' 分别是任意小于 r, ρ 的正数。这些级数表示 $F(x, y)$ 的各个偏导数。例如，级数

$$\sum_{m,n\geq 0} ma_{mn}x^{m-1}y^n$$

的和等于 $\partial F/\partial x$。事实上，若把两个级数的各项都按 x 的升幂排列，则第二个级数的每一项都是第一个级数对应项的导数。同样，偏导数

$$\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial y^n}$$

是一个二重级数的和，而该级数的常数项为

$$a_{mn}\, 1\cdot 2\cdots m\, 1\cdot 2\cdots n.$$

因此，系数 a_{mn} 等于函数 $F(x, y)$ 的相应偏导数在 $x = y = 0$ 处的值再除以某个数值因子；公式 (33) 可写成

$$F(x, y) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{\left(\dfrac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_0}{1\cdot 2\cdots m\, 1\cdot 2\cdots n} x^m y^n. \tag{34}$$

这里约定 $0! = 1$，也就是当 $m = 0$ 或 $n = 0$ 时相应的空乘积等于 1。顺便由此可知，一个二元函数不可能有两个不同的幂级数展开。

如果把二重级数的各项按 x, y 的总次数归并，就得到一个单级数：

$$F(x, y) = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n + \cdots, \tag{35}$$

其中 ϕ_n 是关于 x, y 的 n 次齐次多项式。原书采用旧式的象征记号；按现代算子记号，它的确切含义是

$$\phi_n(x, y) = \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial \xi} + y\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^n F(\xi, \eta)\bigg|_{\xi=\eta=0}.$$

所以，前面的展开式同 Taylor 级数给出的展开式（§51）一致。

设 (x_0, y_0) 是矩形 R 内的一点，而 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 是它附近的一点，并且

$$|x_0| + |h| < r, \qquad |y_0| + |k| < \rho.$$

那么在由直线

$$x = x_0 \pm [r - |x_0|], \qquad y = y_0 \pm [\rho - |y_0|]$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所围成的矩形内，函数 $F(x,y)$ 可以按 $x-x_0$ 与 $y-y_0$ 的正整数次幂展开成幂级数:

$$F(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m,n\geq 0}\frac{\left(\dfrac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\right)_{x=x_0,\,y=y_0}}{1\cdot 2\cdots m\,1\cdot 2\cdots n}h^m k^n. \tag{36}$$

事实上，在二重级数

$$\sum_{m,n\geq 0}a_{mn}(x_0+h)^m(y_0+k)^n$$

中，把每一项分别按 h,k 的幂展开；在上述假设下，所得新的多重级数绝对收敛。再把这个新级数的各项按 h,k 的幂归并，便得到公式 (36)。

读者不难证明，前面的一切论证与定理，对任意多个变量的幂级数都无须作实质改变而仍然成立。

186.　优函数

给定一个关于 n 个变量的幂级数 $f(x,y,z,\ldots)$。如果另一个同样关于 n 个变量的级数 $\phi(x,y,z,\ldots)$ 的每个系数都是非负的，而且不小于 $f(x,y,z,\ldots)$ 中相应系数的绝对值，我们就说 $\phi(x,y,z,\ldots)$ 是前一幂级数的*优函数*。§185 的论证本质上正依赖于优函数的使用。事实上，如果级数

$$\sum_{m,n\geq 0}|a_{mn}|x^m y^n$$

在 $x=r,y=\rho$ 时收敛，那么函数

$$\phi(x,y)=\frac{M}{(1-x/r)(1-y/\rho)}=M\sum_{m,n\geq 0}\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{y}{\rho}\right)^n,$$

其中 M 大于级数 $\sum|a_{mn}|r^m\rho^n$ 中的任一项，是级数 $\sum a_{mn}x^m y^n$ 的一个优函数。函数

$$\psi(x,y)=\frac{M}{1-(x/r+y/\rho)}$$

也是一个优函数。事实上，$\psi(x,y)$ 中 $x^m y^n$ 的系数，等于展开式

$$M\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

中相应项的系数，因而至少等于 $\phi(x,y)$ 中 $x^m y^n$ 的系数。

类似地，一个三重级数

$$f(x,y,z)=\sum_{m,n,p\geq 0} a_{mnp}x^m y^n z^p,$$

若在 $x=r, y=r', z=r''$ 时绝对收敛，其中 r,r',r'' 是三个正数，就有形如

$$\phi(x,y,z)=\frac{M}{(1-x/r)(1-y/r')(1-z/r'')}$$

的优函数；下列任一式子也都是它的优函数：

$$\frac{M}{1-(x/r+y/r'+z/r'')},\qquad \frac{M}{(1-x/r)\left[1-(y/r'+z/r'')\right]},\qquad \ldots.$$

如果 $f(x,y,z)$ 不含常数项，可以从前述任一表达式中减去 M，并把所得函数取作优函数。

把一个幂级数代入另一个幂级数的定理（§182），可以推广到多元幂级数。

> 如果把一个关于 p 个变量 $y_1,y_2,\ldots,y_p$ 的收敛幂级数中的每个变量，都换成一个关于 q 个变量 $x_1,x_2,\ldots,x_q$、不含常数项的收敛幂级数，那么代入所得结果可以按 $x_1,x_2,\ldots,x_q$ 的幂排列成幂级数；只须这些变量的绝对值都小于某个常数。

因为无论变量数目多少，证明本质上完全相同，所以为明确起见，只讨论下面这个特殊情形。设

$$F(y,z)=\sum_{m,n\geq 0} a_{mn}y^m z^n \tag{37}$$

是一个在 $|y|\leq r, |z|\leq r'$ 时收敛的幂级数，并设

$$\begin{cases} y=b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots, \\ z=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots \end{cases} \tag{38}$$

是两个不含常数项的级数，并且当 $|x|\leq\rho$ 时二者都收敛。如果在级数 (37) 中，以 (38) 的展开式代替 y,z，那么 $y^m z^n$ 中的每一项都会变成一个关于 x 的新幂级数，而二重级数 (37) 便变成一个三重级数；这个三重级数的每个系数，都能

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

只用加法与乘法从系数 a_{mn}, b_n, c_n 算出。还须证明：当 $|x|$ 不超过某个常数时，这个三重级数绝对收敛；一旦证明这一点，就可把它按 x 的升幂排列。

首先，函数 $F(y,z)$ 有优函数

$$\phi(y,z)=\frac{M}{(1-y/r)(1-z/r')}=\sum_{m,n\geq 0} M\left(\frac{y}{r}\right)^m\left(\frac{z}{r'}\right)^n, \tag{39}$$

而 (38) 中的两个级数都有形如

$$\frac{N}{1-x/\rho}-N=\sum_{n=1}^{+\infty} N\left(\frac{x}{\rho}\right)^n \tag{40}$$

的优函数；这里 M, N 是两个正数。如果在二重级数 (39) 中，用函数 (40) 代替 y, z，再把各乘积 $y^m z^n$ 按 x 的幂展开，那么所得三重级数的每个系数都是非负的，并且不小于前述三重级数相应系数的绝对值。因此，只须证明这个新的三重级数对充分小的正 x 收敛即可。

现在，从级数 (39) 中任一项 $y^m z^n$ 展开而来的各项之和为

$$\frac{MN^{m+n}}{r^m r'^n}\frac{(x/\rho)^{m+n}}{(1-x/\rho)^{m+n}};$$

除去常因子 M，这正是逐项相乘下列两个级数所得级数的通项：

$$\sum_{m\geq 0}\left(\frac{N}{r}\right)^m\left(\frac{x/\rho}{1-x/\rho}\right)^m, \qquad \sum_{n\geq 0}\left(\frac{N}{r'}\right)^n\left(\frac{x/\rho}{1-x/\rho}\right)^n.$$

只要 x 同时满足

$$x<\rho\frac{r}{r+N}, \qquad x<\rho\frac{r'}{r'+N},$$

后两个级数就都收敛。因此，当 $|x|$ 小于 $\rho r/(r+N)$ 与 $\rho r'/(r'+N)$ 中较小的一个时，所考察的一切级数都绝对收敛，从而原来的三重级数可以按 x 的正整数次幂排列。

注。即使级数 (38) 含有常数项 b_0, c_0，上述定理仍然成立，只须 $|b_0|<r, |c_0|<r'$。事实上，由 §185 可把展开式 (37) 换成按 $y-b_0, z-c_0$ 的幂排列的级数，于是问题就归结为刚才已经处理的情形。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

III. 隐函数；解析曲线与曲面

187. 一元隐函数

在关于连续性的某些条件下，隐函数的存在性已经建立（第二章，§20 及以下各节）。如果给定方程左端是幂级数，还可以作更深入的研究；下面就来说明。

> 设方程 $F(x,y)=0$ 的左端, 在 x_0, y_0 附近能够展开成按 $x-x_0, y-y_0$ 的升幂排列的收敛幂级数；其中常数项为零，而 $y-y_0$ 的系数不为零。那么这个方程有且只有一个根，当 x 趋近 x_0 时该根趋近 y_0；并且这个根可以展开成按 $x-x_0$ 的幂排列的幂级数。

为简单起见，假定 $x_0=y_0=0$；这不过相当于移动坐标原点。把关于 y 的一次项移到等式左边，可以把给定方程写成

$$y=f(x,y)=a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots, \tag{41}$$

其中未写出的项的次数都高于二次。先证明：如果对右端级数应用收敛级数的运算法则，就能用形如

$$y=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots \tag{42}$$

的级数代替 y，从而在形式上满足这个方程。事实上，作此代入并比较 x 的同次幂系数，得到

$$c_1=a_{10}, \qquad c_2=a_{20}+a_{11}c_1+a_{02}c_1^2, \qquad \ldots;$$

一般地，c_n 只须用加法和乘法，就能由前面的各个 c 以及满足 $h+k\leq n$ 的系数 a_{hk} 表出。因此可以写成

$$c_n=P_n(a_{10},a_{20},a_{11},\ldots,a_{0n}), \tag{43}$$

其中 P_n 是一个多项式，而且它的每个系数都是正整数。只要能证明按这种方式确定的级数 (42) 对充分小的 x 收敛，前面所作运算的合法性就得到证明。我们用一个经常采用的方法来完成这件事。这个方法的构想出自 Cauchy，其本质基础就是优函数的观念。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

令

$$\phi(x,Y)=\sum_{m,n\geq 0} b_{mn}x^mY^n$$

为函数 $f(x,y)$ 的一个优函数，其中 $b_{00}=b_{01}=0$，其余各 b_{mn} 都是正数并且至少等于 $|a_{mn}|$。再考察辅助方程

$$Y=\phi(x,Y)=\sum_{m,n\geq 0} b_{mn}x^mY^n, \tag{41'}$$

并设法求出一个形如

$$Y=C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots \tag{42'}$$

的解。系数 $C_1,C_2,\ldots$ 可以像上面那样确定:

$$C_1=b_{10},\qquad C_2=b_{20}+b_{11}C_1+b_{02}C_1^2,\qquad \ldots;$$

一般地,

$$C_n=P_n(b_{10},b_{20},\ldots,b_{0n}). \tag{43'}$$

比较公式 (43) 与 (43′)，显然有

$$|c_n|\leq C_n,$$

因为多项式 P_n 的每个系数都是正的，而 $|a_{mn}|\leq b_{mn}$。因此，只要级数 (42′) 收敛，级数 (42) 必定收敛。

现在可取下面这个函数作为优函数 $\phi(x,Y)$:

$$\phi(x,Y)=\frac{M}{(1-x/r)(1-Y/\rho)}-M-M\frac{Y}{\rho},$$

其中 M,r,ρ 是三个正数。清除分母后，辅助方程 (41′) 变成

$$Y^2-\frac{\rho^2Y}{\rho+M}+\frac{M\rho^2}{\rho+M}\frac{x/r}{1-x/r}=0.$$

这个方程有一个在 $x=0$ 时为零的根，即

$$Y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}-\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\sqrt{1-\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\frac{x/r}{1-x/r}}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

根号下的量可以写成

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1}, \qquad \alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho+2M}\right)^{2}.$$

所以这个根还可写成

$$Y=\frac{\rho^{2}}{2(\rho+M)}\left[1-\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{1/2}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1/2}\right].$$

由此可知，这个根 Y 可以展开成在区间 $(-\alpha,+\alpha)$ 内收敛的级数；而这个展开必定同直接代入所得的展开，即 (42′)，完全一致。因此，级数 (42) 更加必然在区间 $(-\alpha,+\alpha)$ 内收敛。不过，这只是级数 (42) 真正收敛区间的一个下界；真正的区间可能大得多。

由系数 c_n 的确定方式显然可知，级数 (42) 的和满足方程 (41)。把方程 $F(x,y)=0$ 写成 $y-f(x,y)=0$，并令 $y=P(x)$ 表示刚才求出的根。若在 $F(x,y)$ 中以 $P(x)+z$ 代替 y，再把结果按 x,z 的幂排列，那么每一项都必须含因子 z，因为当 $z=0$ 时，整个表达式对任意 x 都为零。因此有

$$F[x,P(x)+z]=zQ(x,z),$$

其中 $Q(x,z)$ 是关于 x,z 的幂级数。最后，在 $Q(x,z)$ 中以 $y-P(x)$ 代替 z，便得到恒等式

$$F(x,y)=[y-P(x)]Q_1(x,y),$$

而 Q_1 的常数项必为 1，因为左端中 y 的系数是 1。所以可写成

$$F(x,y)=[y-P(x)](1+\alpha x+\beta y+\cdots). \tag{44}$$

这种把 $F(x,y)$ 分解成两个因子的分解法出自 Weierstrass。它显式给出了根 $y=P(x)$，同时还说明：方程 $F(x,y)=0$ 不存在另一个随 x 一同趋近于零的根，因为第二个因子在 x,y 一同趋近于零时并不趋近于零。

注。上面确定系数 c_n 的方法，本质上同 §46 给出的方法相同；不过现在已经清楚，若把这个过程无限进行下去，所得级数确实收敛。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

188. 一般定理

现在考察 $p+q$ 个变量之间的 p 个方程组成的方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \end{cases} \tag{45}$$

其中每个函数 $F_1, F_2, \ldots, F_p$ 在 $x_i = y_k = 0$ 时都为零，而且在该点附近都可以展开成幂级数。再假定雅可比行列式

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

在所考察的这组值处不为零。在这些条件下，方程组 (45) 有且只有一组形如

$$y_1 = \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q), \qquad \ldots, \qquad y_p = \phi_p(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

的解；其中 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ 都是关于 $x_1, x_2, \ldots, x_q$ 的幂级数，并且在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$ 时全都为零。

为了简化记号，只讨论两个因变量 u, v 与三个自变量 x, y, z 之间两个方程的情形：

$$\begin{cases} F_1 = au + bv + cx + dy + ez + \cdots = 0, \\ F_2 = a'u + b'v + c'x + d'y + e'z + \cdots = 0. \end{cases} \tag{46}$$

由假设，行列式 $ab' - ba'$ 不为零，所以方程组 (46) 可以换成形如

$$\begin{cases} u = \sum a_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v = \sum b_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r \end{cases} \tag{47}$$

的两个方程；其右端不含常数项，也不含关于 u, v 的一次项。像上面一样，很容易证明：若以关于 x, y, z 的幂级数

$$u = \sum c_{ikl} x^i y^k z^l, \qquad v = \sum c'_{ikl} x^i y^k z^l \tag{48}$$

代替 u, v，就能在形式上满足这些方程；系数 c_{ikl}, c'_{ikl} 只须用加法和乘法，就能从 a_{mnpqr}, b_{mnpqr} 算出。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

中译者校记（底本原误）。1904 年英译本在式 (47) 后误作“左端不含常数项，也不含关于 u, v 的一次项”；依该式结构及下文论证，显然应为“右端”。

为了证明级数 (48) 收敛，只须把它们同解下面两个辅助方程所得的类似展开作比较：

$$U = V = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x+y+z}{r}\right)\left(1 - \dfrac{U+V}{\rho}\right)} - M\left(1 + \frac{U+V}{\rho}\right),$$

其中 M, r, ρ 是意义同上文所述的正数。这两个辅助方程归结为一个二次方程

$$U^2 - \frac{\rho^2 U}{2\rho + 4M} + \frac{M\rho^2}{2\rho + 4M}\frac{(x+y+z)/r}{1 - (x+y+z)/r} = 0.$$

它有且只有一个在 $x = y = z = 0$ 时为零的根，即

$$U = \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)}\sqrt{\frac{1 - (x+y+z)/\alpha}{1 - (x+y+z)/r}},$$

其中

$$\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 4M}\right)^2.$$

当 $|x|, |y|, |z|$ 全都不超过 $\alpha/3$ 时，这个根可以展开成收敛幂级数。因此，级数 (48) 在同样条件下收敛。

设 u_1, v_1 是方程组 (47) 中可以展开成级数的那组解。在 (47) 中令

$$u = u_1 + u', \qquad v = v_1 + v',$$

并把结果按 x, y, z, u', v' 的幂排列；每一项都必须含因子 u' 或 v'。因此，回到原变量 x, y, z, u, v，给定方程组可以写成

$$\begin{cases} (u - u_1)f + (v - v_1)\phi = 0, \\ (u - u_1)f_1 + (v - v_1)\phi_1 = 0, \end{cases} \tag{47'}$$

其中 f, ϕ, f_1, ϕ_1 是关于 x, y, z, u, v 的幂级数。写成这种形式，解 $u = u_1, v = v_1$ 已经显式呈现出来。还很容易看出，不存在另一组在 $x = y = z = 0$ 时为零的解。因为任何另一组解都必须使

$$f\phi_1 - \phi f_1$$

为零；而比较 (47) 与 (47′) 可知，f, ϕ_1 的常数项都等于 1，f_1, ϕ 的常数项则都等于零。所以，以在 $x = y = z = 0$ 时为零的函数代替 u, v，不可能满足条件 $f\phi_1 - \phi f_1 = 0$。

189. Lagrange 公式

考察方程

$$y = a + x\phi(y), \tag{49}$$

其中 $\phi(y)$ 是一个能够按 $y - a$ 的幂展开的函数:

$$\phi(y) = \phi(a) + (y - a)\phi'(a) + \frac{(y-a)^2}{1 \cdot 2}\phi''(a) + \cdots ;$$

这个级数在 $|y - a|$ 不超过某个数时收敛。由 §187 的一般定理，方程 (49) 有且只有一个当 x 趋近零时趋近 a 的根；对于充分小的 x，这个根由收敛幂级数

$$y = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

表示。

一般地，若 $f(y)$ 是一个可以按 $y - a$ 的正整数次幂展开的函数，那么把 y 换成刚才求得的展开式，就得到 $f(y)$ 关于 x 的展开:

$$f(y) = f(a) + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots ; \tag{50}$$

这个展开在 x 的某两个界限之间成立。

Lagrange 公式的目的，是用 a 表示系数 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$。应当注意，这个问题同一般问题本质上没有差别。把由 (49) 定义的 y 代入 $f(y)$，并把所得复合函数看作 x 的函数，则 A_n 等于它在 $x = 0$ 处的第 n 阶导数除以 $n!$；这个导数本来可以用通常法则计算。直接计算看起来十分复杂，但采用 Laplace 的下列说明，可以大大缩短（参见第二章习题 8*）。由 (49) 定义的函数 y 关于变量 x, a 的偏导数满足

$$[1 - x\phi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x} = \phi(y), \qquad [1 - x\phi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a} = 1;$$

所以立刻得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi(y)\frac{\partial u}{\partial a}, \tag{51}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 $u=f(y)$。另一方面，很容易证明恒等式

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right] \tag{51'}$$

成立，这里 $F(y)$ 是 y 的任意函数。事实上，施行所示微分后，等式两端都变成

$$F'(y)f'(y)\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial x}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial x}.$$

现在证明，对任意 n 都有

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\phi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

由 (51)，这个公式在 $n=1$ 时成立。为了作一般证明，假定它对某个 n 成立。于是

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n}}{\partial a^{n-1}\partial x}\left[\phi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

但由 (51) 与 (51′) 还有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right]&=\frac{\partial}{\partial a}\left[\phi(y)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial a}\left[\phi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right].\end{aligned}$$

所以前式化为

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n}}{\partial a^{n}}\left[\phi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right],$$

这就表明所论公式对一切 n 都成立。

令 $x=0$，则 y 化为 a，u 化为 $f(a)$，而 u 关于 x 的第 n 阶导数由公式

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\phi(a)^n f'(a)\right]$$

给出。因此，$f(y)$ 的 Taylor 展开变成

$$\begin{aligned}f(y)=f(a)+x\phi(a)f'(a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}\left[\phi(a)^2 f'(a)\right]+\cdots\\+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\phi(a)^n f'(a)\right]+\cdots.\end{aligned} \tag{52}$$

这就是著名的 Lagrange 公式。它给出任意复合函数 $f(y)$ 的展开；特别令 $f(y)=y$，便得到方程 (49) 中那个当 x 趋近零时趋近 a 的根的表达式。以后将求出这个公式适用的界限。

中译者校记（底本原误）。1904 年英译本在本节前文把 A_n 说成"$f(y)$ 在 $y=0$ 处的第 n 阶导数除以 $n!$"，又在公式 (52) 后说所求根"趋近于零"。依方程 (49)、公式 (50) 及紧随其后的计算，前者应为复合函数 $f(y(x,a))$ 在 $x=0$ 处的导数，后者应为根趋近于 a；正文已据此订正。

注。由一般定理可知，把根 y 看作 x,a 的函数，它可以表示成按 x,a 的幂排列的二重级数。把每个系数 A_n 再按 a 的幂展开，就得到这个二重级数。因此，级数 (52) 可以关于 a 逐项微分。

例 1。方程

$$y=a+\frac{x}{2}(y^2-1) \tag{53}$$

有一个在 $x=0$ 时等于 a 的根。Lagrange 公式给出这个根的展开式

$$\begin{aligned} y=a+\frac{x}{2}(a^2-1)+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{d(a^2-1)^2}{da}+\cdots \\ +\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{d^{n-1}(a^2-1)^n}{da^{n-1}}+\cdots. \end{aligned} \tag{54}$$

另一方面，方程 (53) 可以直接解出，它的两个根为

$$y=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2}.$$

在 $x=0$ 时等于 a 的根，是取负号所得的那个根。把 (54) 两端关于 a 微分，便得到一个只在记号上不同于 §184 中公式 (32) 的公式。

例 2。天文学中确定偏近点角 u 的 Kepler 方程

$$u=a+e\sin u \tag{55}$$

有一个在 $e=0$ 时等于 a 的根。[7]Lagrange 公式给出这个根在 $e=0$ 附近的展开式

$$u=a+e\sin a+\frac{e^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}(\sin^2 a)+\cdots+\frac{e^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}(\sin^n a)}{da^{n-1}}+\cdots. \tag{56}$$

Laplace 最先用一种深刻的推理证明：作为偏心率时 $e\geq 0$，只要 e 小于界限

$$0.662743\cdots,$$

这个级数就收敛。

[7]另见第五章习题 19；以及 Ziwet, *Elements of Theoretical Mechanics*, 2nd ed., p. 356。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

190. 反演

考察形如

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{57}$$

的级数，其中 $a_1 \neq 0$，收敛区间为 $(-r, +r)$。若把 y 取作自变量而把 x 看作 y 的函数，则由 §187 的一般定理，方程 (57) 有且只有一个随 y 一同趋近于零的根；这个根可以展开成关于 y 的幂级数

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots + b_n y^n + \cdots . \tag{58}$$

把 (58) 代入 (57)，再比较 y 的同次幂系数，就能依次确定 $b_1, b_2, b_3, \ldots$。所得各值为

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \qquad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}, \qquad \ldots .$$

通项系数 b_n 可以由 Lagrange 公式求出。事实上，令

$$\psi(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots ,$$

则方程 (57) 可以写成

$$x = y \frac{1}{\psi(x)}.$$

这个方程中随 y 一同趋近于零的根，由 Lagrange 公式展开为

$$x = y \frac{1}{\psi(0)} + \cdots + \frac{y^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{1}{\psi(x)} \right)^n \right]_{x=0} + \cdots ,$$

其中下标 0 表示：完成所示微分以后再令 $x = 0$。

刚才处理的问题有时称为*级数反演*。

191. 解析函数

今后，如果一个关于任意多个变量 $x, y, z, \ldots$ 的函数，在点 $x_0, y_0, z_0, \ldots$ 附近，能够展开成按

$$x - x_0, \qquad y - y_0, \qquad z - z_0, \qquad \ldots$$

的升幂排列的幂级数，并且这个级数在这些差充分小时收敛，我们就说这个函数是*解析的*。数值 $x_0, y_0, z_0, \ldots$ 所能取得的范围，可以受到某些条件限制；这

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

里不再深入讨论。由本章的结果可以看出，这些函数仿佛彼此连成一个整体。给定一个或若干个解析函数，积分与微分运算，以及乘法、除法、代入等代数运算，都会产生新的解析函数。同样，解左端为解析函数的方程，也会得到解析函数。

最简单的函数，例如多项式、指数函数、三角函数等等，都是解析函数；因此不难理解，数学家最初研究的函数为什么都是解析函数。在复变量函数论和微分方程研究中，这些函数至今仍居于主导地位。不过，解析函数虽然具有根本的重要性，却不应忘记：在全体连续函数中，它们实际上只构成一个非常特殊的族。[8]

192. 平面曲线

考察一条平面曲线的弧 AB。如果对于弧上任一固定点 M_0，其附近任一点 M 的坐标都能展开成按参数 $t-t_0$ 的幂排列的级数

$$\begin{cases} x=\phi(t)=x_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\cdots+a_n(t-t_0)^n+\cdots, \\ y=\psi(t)=y_0+b_1(t-t_0)+b_2(t-t_0)^2+\cdots+b_n(t-t_0)^n+\cdots, \end{cases} \tag{59}$$

并且这些级数在 $t-t_0$ 充分小时收敛，我们就说这条曲线沿弧 AB 是*解析的*。

如果在点 M_0 附近，两个差 $y-y_0, x-x_0$ 中的一个能够表示成另一个的收敛幂级数，就称 M_0 为一个*常点*（ordinary point）。例如，若在 x_0-h 与 x_0+h 之间的一切 x 值下，$y-y_0$ 都可以展开为

$$y-y_0=c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots, \tag{60}$$

那么点 (x_0,y_0) 就是常点。很容易把方程 (60) 换成形如 (59) 的两个方程；只须令

$$\begin{cases} x=x_0+t-t_0, \\ y=y_0+c_1(t-t_0)+\cdots+c_n(t-t_0)^n+\cdots. \end{cases} \tag{61}$$

如果 $c_1\neq 0$，通常正是如此，那么方程 (60) 可以反解；对于充分小的 $y-y_0$，$x-x_0$ 能展开成按 $y-y_0$ 的幂排列的幂级数。在这种情形中，两个差 $x-x_0, y-y_0$ 中的每一个，都能表示成另一个的收敛幂级数。

如果 $c_1=0$，也就是说曲线的切线平行于 x 轴，上述结论就不再成立。稍后将看到，这时 $x-x_0$ 可以展开成按 $y-y_0$ 的分数次幂排列的级数。显然，在

[8]第二卷将给出一个非解析函数的例子；这个函数在整个区间 (a,b) 内的各阶导数却都存在。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

切线平行于 y 轴的点，$x-x_0$ 可以展开成 $y-y_0$ 的幂级数，但 $y-y_0$ 不能展开成 $x-x_0$ 的幂级数。

如果曲线上一点的坐标在 M_0 附近由方程 (59) 给出，那么只要系数 a_1, b_1 至少有一个不为零，M_0 就是常点。[9]例如，若 $a_1 \neq 0$，就可把第一式反解成 $t-t_0$ 关于 $x-x_0$ 的幂级数；把这个解代入第二式，便得到 $y-y_0$ 关于 $x-x_0$ 的展开。

曲线在常点附近的形状，要么是通常的形状，要么是拐点的形状。凡不是常点的点都叫作*奇点*。如果一段解析曲线弧的每一点都是常点，就称这段弧为*正则弧*。

如果 a_1, b_1 都为零，而例如 $a_2 \neq 0$，那么方程组 (59) 的第一式可以写成

$$(x-x_0)^{1/2} = (t-t_0)\big[a_2 + a_3(t-t_0) + \cdots\big]^{1/2};$$

右端可以按 $t-t_0$ 的幂展开。因此，$t-t_0$ 可以按 $(x-x_0)^{1/2}$ 的幂展开；再在 (59) 的第二式中用这个展开代替 $t-t_0$，就得到 $y-y_0$ 关于 $(x-x_0)^{1/2}$ 的展开：

$$y-y_0 = c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^{3/2} + c_3(x-x_0)^2 + \cdots.$$

在这种情形中，点 (x_0, y_0) 通常是一个*第一类尖点*。[10]

中译者校记（现代重排本误排）。现代 LaTeX 重排本在上式第二项中把原版的指数 $3/2$ 误排成 $1/2$。由 $a_1 = b_1 = 0$ 可知，$y-y_0$ 关于 $(x-x_0)^{1/2}$ 的一次项必为零；核对 1904 年英译本后，正文恢复为 $(x-x_0)^{3/2}$。

刚才的论证是一般的。如果 $x-x_0$ 关于 $t-t_0$ 的展开以 n 次项开始，那么 $y-y_0$ 可以按 $(x-x_0)^{1/n}$ 的幂展开。由方程 (59) 给出的曲线，在点 (x_0, y_0) 附近的形状分为四类：没有上述特殊性的通常点、拐点、第一类尖点或第二类尖点。

[9]这个条件是充分的，却不是必要的。不过，在一个常点 M_0 附近，总能适当选择参数，使任意曲线的方程写成 a_1, b_1 不同时为零的形式；方程 (61) 实际上已经做到这一点。另见§193 关于参数非单值情形的脚注。

[10]在第一类尖点处，切线位于两个分支之间；在第二类尖点处，两个分支位于切线的同一侧。当然，如果分数次幂的系数碰巧全部为零，这个点就是常点。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

193.　空间曲线

如果在一条空间曲线的弧 AB 上任取一个固定点 M_0，动点 M 的坐标 x, y, z 都能在该点附近展开成按参数 $t-t_0$ 的幂排列的级数

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1(t-t_0) + \cdots + a_n(t-t_0)^n + \cdots, \\ y = y_0 + b_1(t-t_0) + \cdots + b_n(t-t_0)^n + \cdots, \\ z = z_0 + c_1(t-t_0) + \cdots + c_n(t-t_0)^n + \cdots, \end{cases} \tag{62}$$

就说这条空间曲线沿弧 AB 是*解析的*。如果三个差 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 中的两个能够展开成第三个的幂级数，就称点 M_0 为一个常点。

同前一节一样可以证明，只要三个系数 a_1, b_1, c_1 不全为零，M_0 就必定是常点。因此，对应于奇点的参数值 t 必须满足方程[11]

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = 0.$$

设 x_0, y_0, z_0 是空间曲线 Γ 上一点 M_0 的坐标，而曲线方程写成

$$F(x,y,z) = 0, \qquad F_1(x,y,z) = 0, \tag{63}$$

其中 F, F_1 都是关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的幂级数。如果三个函数行列式

$$\frac{D(F,F_1)}{D(x,y)}, \qquad \frac{D(F,F_1)}{D(y,z)}, \qquad \frac{D(F,F_1)}{D(z,x)}$$

在 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 时不同时为零，那么 M_0 必定是常点。事实上，例如若 $D(F,F_1)/D(x,y)$ 在 M_0 不为零，则由 §188，方程组 (63) 可以解出 $x-x_0, y-y_0$，并把它们表示成 $z-z_0$ 的幂级数。

194.　曲面

如果在某一区域内任取一个固定点 M_0，其附近任一动点 M 的坐标 x, y, z 都能由两个变参数 $t-t_0, u-u_0$ 的二重幂级数表示：

$$\begin{cases} x - x_0 = a_{10}(t-t_0) + a_{01}(u-u_0) + \cdots, \\ y - y_0 = b_{10}(t-t_0) + b_{01}(u-u_0) + \cdots, \\ z - z_0 = c_{10}(t-t_0) + c_{01}(u-u_0) + \cdots, \end{cases} \tag{64}$$

[11] 当曲线在 M_0 附近的一点 M 对应于若干个参数值，并且这些参数值在 M 趋近 M_0 时都趋近 t_0，上述条件并不足以使与参数值 t_0 对应的点 M_0 成为奇点。例如，由方程 $x=t^2, y=t^4, z=t^6$ 定义的曲线在原点正是这种情形。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

并且这三个级数在 $t-t_0, u-u_0$ 充分小时收敛，就说曲面 S 在这个区域内是*解析的*。如果三个差 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 中的一个能够表示成另外两个的幂级数，就称曲面上的点 M_0 为一个常点。只要三个行列式

$$\frac{D(y,z)}{D(t,u)}, \qquad \frac{D(z,x)}{D(t,u)}, \qquad \frac{D(x,y)}{D(t,u)}$$

不同时为零，点 M_0 就必定是常点。事实上，例如若第一个行列式不为零，就能解方程组 (64) 的后两式，求出 $t-t_0, u-u_0$；再在第一式中用这些值代替 $t-t_0, u-u_0$，就得到 $x-x_0$ 关于 $y-y_0, z-z_0$ 的展开。

设曲面 S 由一个未解出的方程

$$F(x,y,z)=0$$

给出，又设 x_0, y_0, z_0 是曲面上一点 M_0 的坐标。如果 $F(x,y,z)$ 是关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的幂级数，并且三个偏导数

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0$$

不同时为零，那么由 §188，点 M_0 必定是常点。

注。曲线或曲面上常点的定义同坐标轴的选择无关。事实上，设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 S 上的一个常点。于是邻近任一点的坐标可以写成 (64) 的形式，[12]并且在 $t=t_0, u=u_0$ 时，三个行列式

$$\frac{D(y,z)}{D(t,u)}, \qquad \frac{D(z,x)}{D(t,u)}, \qquad \frac{D(x,y)}{D(t,u)}$$

不同时为零。现在任取一组新坐标轴，设

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, \\ Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, \\ Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 \end{aligned}$$

是把 x, y, z 变成新坐标 X, Y, Z 的变换，并且变换行列式

$$\Delta = \frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}$$

[12] 见 §192 关于参数选择的脚注。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

不为零。以级数 (64) 代替 x, y, z, 就得到 X, Y, Z 的三个类似展开; 在 $t = t_0, u = u_0$ 时，不可能有

$$\frac{D(X,Y)}{D(t,u)} = \frac{D(Y,Z)}{D(t,u)} = \frac{D(Z,X)}{D(t,u)} = 0.$$

因为这个变换可以反写成

$$\begin{aligned} x &= A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1, \\ y &= A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2, \\ z &= A_3X + B_3Y + C_3Z + D_3; \end{aligned}$$

若涉及 X, Y, Z 的三个函数行列式同时为零，那么涉及 x, y, z 的三个函数行列式也必定同时为零。

IV. 三角级数；杂项级数

195. 系数的计算

本节所要研究的级数，同前面研究过的级数完全不同。三角级数似乎最早由 D. Bernoulli 在研究绷紧弦问题时加以考察。下面将要给出的系数确定方法出自 Euler。

设 $f(x)$ 是定义在区间 (a, b) 中的函数。我们先假定 a, b 分别等于 $-\pi, +\pi$; 这总是可以做到的，因为代换

$$x' = \frac{2\pi x - (a+b)\pi}{b-a}$$

把任何情形都化为这一情形。现在，若方程

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \cdots \tag{65}$$

对 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间的一切 x 值成立，其中 $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m, \ldots$ 是未知常数, 那么下面的方法可以确定这些常数。先把前面已经建立的公式列在这里，以便

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

引用；其中 m, n 都是正整数：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\ dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\ dx = 0 \quad (m \neq 0),\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\ dx\\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\ dx = 0 \quad (m \neq n),\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx\ dx\\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos 2mx)\ dx = \pi \quad (m \neq 0),\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\ dx\\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\ dx = 0 \quad (m \neq n),\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 mx\ dx\\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (1 - \cos 2mx)\ dx = \pi \quad (m \neq 0),\\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\ dx\\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\ dx = 0.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

把 (65) 两端从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 积分，并把右端逐项积分，得到

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} dx = \pi a_0,$$

这就给出了 a_0。再把方程 (65) 两端分别乘以 $\cos mx$ 或 $\sin mx$，然后施行同样的运算；右端各项中，只有含 $\cos^2 mx$ 或 $\sin^2 mx$ 的那一项在 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间的积分不为零。因此分别得到

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos mx\ dx = \pi a_m, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin mx\ dx = \pi b_m.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

系数的值可汇总如下：

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\ d\alpha, \\ a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\ d\alpha, \\ b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\ d\alpha. \end{cases} \tag{67}$$

前面的计算只是形式的，因而只是试探性的。事实上，我们假定函数 $f(x)$ 可以展开成 (65) 的形式，并且这个展开在 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间一致收敛。因为事先没有任何理由保证这些假设成立，所以必须考察这样得到的级数究竟是否收敛。把系数 a_i, b_i 换成 (67) 中的值并化简，可见前 $m+1$ 项之和为

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cdots + \cos m(\alpha - x)\right] d\alpha.$$

但是，由熟知的三角公式，

$$\frac{1}{2} + \cos a + \cos 2a + \cdots + \cos ma = \frac{\sin \dfrac{2m+1}{2} a}{2\sin\dfrac{a}{2}};$$

所以

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\dfrac{\alpha - x}{2}}\ d\alpha.$$

令 $\alpha = x + 2y$，便得到

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-(\pi+x)/2}^{(\pi-x)/2} f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\ dy. \tag{68}$$

整个问题归结为：当整数 m 无限增大时，求这个和的极限。为了研究这个问题，我们假定函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1）函数 $f(x)$ 在 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间通常是连续的，但允许在有限多个 x 值处按下面的方式突然改变其值。设 c 是 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间的一个数。对任意这样的 c，可以找到一个数 h，使 $f(x)$ 在 $c-h$ 与 c 之间以及在 c 与 $c+h$ 之间分别连续。当 ϵ 趋近于零时，$f(c+\epsilon)$ 趋近于一个极限，记作 $f(c+0)$；同样，当 ϵ 趋

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

近于零时，$f(c-\epsilon)$ 趋近于一个极限，记作 $f(c-0)$。如果函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续，就有

$$f(c)=f(c+0)=f(c-0).$$

如果 $f(c+0)\neq f(c-0)$，函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处间断；我们约定把这两个值的算术平均

$$\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$$

取作 $f(c)$。显然，这个关于 $f(c)$ 的规定在 $f(x)$ 连续的点也成立。我们还假定，当 ϵ 通过正值趋近于零时，$f(-\pi+\epsilon)$ 与 $f(\pi-\epsilon)$ 分别趋近于极限，记作 $f(-\pi+0)$ 与 $f(\pi-0)$。若有间断，方程 $y=f(x)$ 所表示的曲线必须类似于图 11。我们已经看到，函数 $f(x)$ 在从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 的区间上可积；显然，$f(x)$ 与任何在同一区间上连续的函数之乘积也可积。

2）区间 $(-\pi,+\pi)$ 可以分成有限多个小区间，使得 $f(x)$ 在每一个小区间内或者单调增加，或者单调减少。

为简便起见，我们说函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,+\pi)$ 内满足 *Dirichlet 条件*。显然，一个在区间 $(-\pi,+\pi)$ 内连续、并且在该区间内只有有限多个极大值和极小值的函数，满足 Dirichlet 条件。

196. 积分 $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$

由 S_{m+1} 得到的表达式促使我们在 n 无限增大时求定积分

$$\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

的极限。Lejeune-Dirichlet 最先对这个问题作了严格讨论。[13]我们所采用的方法，本质上同 Bonnet 的方法相同。[14]

先考察积分

$$J=\int_0^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx, \tag{69}$$

其中 h 是小于 π 的正数，而 $\phi(x)$ 是在区间 $(0,h)$ 内满足 Dirichlet 条件的函数。如果 $\phi(x)$ 是常数 C，就很容易求出 J 的极限。事实上，令 $y=nx$，可写成

$$J=C\int_0^{nh}\frac{\sin y}{y}\,dy;$$

[13] *Crelle's Journal*, Vol. IV, 1829.

[14] *Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie de Belgique*, Vol. XXIII.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

由 (39)（§176），当 n 无限增大时，J 的极限为 $C\pi/2$。

其次假定 $\phi(x)$ 在区间 $(0,h)$ 内是正的单调减函数。被积函数在所有形如 $k\pi/n$ 的 x 值处变号。因此可以写成

$$J = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^k u_k + \cdots + (-1)^m \theta u_m, \qquad 0 < \theta < 1,$$

其中

$$u_k = \left| \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \phi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx \right|,$$

并假定上限 h 位于 $m\pi/n$ 与 $(m+1)\pi/n$ 之间。每一个积分 u_k 都小于前一个。事实上，在 u_k 中令 $nx = k\pi + y$，便有

$$u_k = \int_0^\pi \phi\left(\frac{y+k\pi}{n}\right) \frac{\sin y}{y+k\pi}\, dy;$$

由关于 $\phi(x)$ 的假设可见，这个积分随下标 k 增大而减小。因此有

$$J = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots,$$

以及

$$J = u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots.$$

这些等式表明，J 位于 u_0 与 $u_0 - u_1$ 之间。因此 J 是小于 u_0 的正数，也就是说，它小于积分

$$\int_0^{\pi/n} \phi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx.$$

而这个积分本身又小于

$$\phi(+0) \int_0^{\pi/n} \frac{\sin nx}{x}\, dx = \phi(+0) \int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\, dy = A\phi(+0),$$

其中 A 表示定积分 $\int_0^\pi (\sin y/y)\, dy$ 的值。

同样的论证表明，定积分

$$J' = \int_c^h \phi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

其中 c 是小于 h 的任意正数，当 n 无限增大时趋近于零。如果 c 位于 $(i-1)\pi/n$ 与 $i\pi/n$ 之间，便可像上面那样证明，J' 的绝对值小于

$$\left| \int_c^{i\pi/n} \phi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx \right| + \left| \int_{i\pi/n}^{(i+1)\pi/n} \phi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx \right|,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因而更小于

$$\frac{\phi(c)}{c}\left(\frac{i\pi}{n}-c\right)+\frac{\phi(i\pi/n)}{i\pi/n}\frac{\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}\frac{\phi(c)}{c}.$$

所以这个积分在 n 无限增大时趋近于零。[15]

当 $c=0$ 时，上述方法不给出任何信息。为了求积分 J 的极限，取 0 与 h 之间的一个数 c，使 $\phi(x)$ 从 0 到 c 连续，并令

$$\phi(x)=\phi(c)+\psi(x).$$

于是 $\psi(x)$ 在区间 $(0,c)$ 内为正且单调减少；当 $x=0$ 时，它从 $\phi(+0)-\phi(c)$ 开始，而当 $x=c$ 时减到零。把 J 写成

$$J=\phi(c)\int_0^c\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_0^c\psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_c^h\phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

再减去 $(\pi/2)\phi(+0)$，便得到

$$\begin{aligned}J-\frac{\pi}{2}\phi(+0)=\phi(c)\left[\int_0^c\frac{\sin nx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{2}[\phi(c)-\phi(+0)]\\+\int_0^c\psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_c^h\phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx.\end{aligned}\tag{70}$$

为了证明 J 趋近于极限 $(\pi/2)\phi(+0)$, 只须说明: 存在一个整数 m, 使得当 $n>m$ 时，右端每一项的绝对值都小于任意预先指定的正数 $\epsilon/4$。由上面的说明，积分

$$\int_0^c\psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

的绝对值小于

$$A\psi(+0)=A[\phi(+0)-\phi(c)].$$

因为当 x 趋近于零时，$\phi(x)$ 趋近于 $\phi(+0)$，所以可以把 c 取得充分接近零，使

$$A[\phi(+0)-\phi(c)]\quad 与\quad \frac{\pi}{2}[\phi(+0)-\phi(c)]$$

[15]利用积分第二中值定理（§75），这个结果还可以更简单地得到。由于 $\phi(x)/x$ 是减函数，该公式给出

$$\int_c^h\phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx=\frac{\phi(c)}{c}\int_c^\xi\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\frac{\phi(c)}{c}(\cos nc-\cos n\xi),$$

而右端显然趋近于零。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

都小于 $\epsilon/4$。这样选定 c 后，方程 (70) 右端另外两项在 n 无限增大时都趋近于零。因此可以把 n 取得充分大，使这两项各自的绝对值都小于 $\epsilon/4$。于是

$$\lim_{n\to\infty} J = \frac{\pi}{2}\phi(+0). \tag{71}$$

现在逐步去掉前面论证中对 $\phi(x)$ 所加的各种限制。如果 $\phi(x)$ 单调减少但不总为正，只要适当选择常数 C，函数

$$\psi(x) = \phi(x) + C$$

就是从 0 到 h 的正的单调减函数。于是公式 (71) 可用于 $\psi(x)$。另一方面，

$$\int_0^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^h \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx - C\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

右端趋近于

$$\frac{\pi}{2}\psi(+0) - \frac{\pi}{2}C = \frac{\pi}{2}\phi(+0).$$

如果 $\phi(x)$ 从 0 到 h 单调增加，那么 $-\phi(x)$ 单调减少，并且

$$\int_0^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = -\int_0^h [-\phi(x)]\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

所以在这种情形中，积分仍趋近于 $(\pi/2)\phi(+0)$。

最后，设 $\phi(x)$ 是在区间 $(0,h)$ 内满足 Dirichlet 条件的任意函数。于是可以把区间 $(0,h)$ 分成有限多个小区间

$$(0,a),\ (a,b),\ (b,c),\ldots,\ (l,h),$$

使 $\phi(x)$ 在每一个小区间内单调增加或单调减少。从 0 到 a 的积分趋近于极限 $(\pi/2)\phi(+0)$。其余各积分都具有形状

$$H = \int_a^b \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

并且都趋近于零。例如，若 $\phi(x)$ 从 a 到 b 单调增加，就可以用无穷多种方式构造一个辅助函数 $\psi(x)$，使它从 0 到 b 单调增加，从 0 到 a 连续，并且从 a 到 b 与 $\phi(x)$ 相同。于是两个积分

$$\int_0^a \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,\qquad \int_0^b \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

在 n 无限增大时都趋近于 $(\pi/2)\psi(+0)$；所以它们的差，正好就是 H，趋近于零。由此，公式 (71) 对区间 $(0,h)$ 内满足 Dirichlet 条件的任意函数 $\phi(x)$ 都成立。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

中译者校记（底本原误）。 1904 年英译本在上一段把两个积分的共同极限误写成 $\psi(+0)$，漏掉了因子 $\pi/2$；由公式 (71) 可知，正确极限应为 $(\pi/2)\psi(+0)$。这一漏因子不影响“二者之差趋近于零”的结论。

现在考察积分

$$I = \int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx, \qquad 0 < h < \pi, \tag{72}$$

其中 $f(x)$ 是从 0 到 h 的正的单调增函数。这个积分可以写成

$$I = \int_0^h \left[f(x)\frac{x}{\sin x}\right]\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

而函数

$$\phi(x) = f(x)\frac{x}{\sin x}$$

是从 0 到 h 的正的单调增函数。由于 $f(+0) = \phi(+0)$，可得

$$\lim_{n\to\infty} I = \frac{\pi}{2}f(+0). \tag{73}$$

所以，只要 $f(x)$ 从 0 到 h 是正的单调增函数，公式 (73) 就成立。像上面那样逐步论证，可以去掉对 $f(x)$ 的全部限制；因此，对区间 $(0, h)$ 内满足 Dirichlet 条件的任意函数 $f(x)$，公式 (73) 都成立。

197.　Fourier 级数

系数由公式 (67) 给出的三角级数，通常叫作 *Fourier 级数*。事实上，Fourier 最先提出了如下定理：在长度为 2π 的一个区间内任意定义的函数，都可以用这种类型的级数表示。所谓任意函数，Fourier 指的是能够由若干条通常被看作不同曲线的曲线弧作图表示的函数。这个概念相当含糊；我们把讨论限制于满足 Dirichlet 条件的函数，从而给它一个精确意义。

为了证明这种函数在区间 $(-\pi, +\pi)$ 内可以用 Fourier 级数表示，必须求当 m 无限增大时积分 (68) 的极限。把这个积分分成两部分，其积分限分别为 0 与 $(\pi - x)/2$，以及 $-(\pi + x)/2$ 与 0；再在第二个积分中作代换 $y = -z$。于是公式 (68) 变为

$$\begin{aligned} S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(\pi-x)/2} & f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{(\pi+x)/2} f(x-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz. \end{aligned}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 x 位于 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间时，$(\pi-x)/2$ 与 $(\pi+x)/2$ 都位于 0 与 π 之间。所以由上一节，当前式右端在 m 无限增大时趋近于

$$\frac{1}{2}f(x+0)+\frac{1}{2}f(x-0)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

因此级数 (65) 收敛，并且对 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间的每一个 x 值，其和都等于 $f(x)$。

现在设 x 等于区间的一个端点，例如 $-\pi$。这时可以写成

$$S_{m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy,$$

亦即

$$S_{m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy.$$

右端第一个积分趋近于 $f(-\pi+0)/2$。在第二个积分中令 $y=\pi-z$，它变为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(\pi-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz,$$

并趋近于 $f(\pi-0)/2$。所以当 $x=-\pi$ 时，三角级数的和为

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}.$$

显然，当 $x=+\pi$ 时，级数的和也相同。

若不把 x 看成沿一条直线量取的长度，而把它看成单位圆上的弧长，并从圆与某一初始直径正向的交点起沿正方向计量，那么在圆周任一点 m，级数的和等于两个极限的算术平均；这两个极限是：分别取圆周上位于 m 两侧的两个动点 m', m''，并令它们趋近于 m 时，级数之和所趋近的极限。如果 $f(-\pi+0)$ 与 $f(\pi-0)$ 不同，那么圆周与初始直线负向的交点就是一个间断点。

总之，凡是在区间 $(-\pi,+\pi)$ 内定义、并且在该区间内满足 Dirichlet 条件的函数，都可以在同一区间内用 Fourier 级数表示。

更一般地，设 $f(x)$ 是定义在长度为 2π 的区间 $(a,a+2\pi)$ 内、并且在该区间内满足 Dirichlet 条件的函数。显然存在唯一一个以 2π 为周期、并在区间 $(a,a+2\pi)$ 内同 $f(x)$ 重合的函数 $F(x)$。对一切 x 值，这个函数都由一个三角级数之和表示，其系数 a_m, b_m 由公式 (67) 给出：

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\cos mx\,dx,\qquad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\sin mx\,dx.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

例如，系数 a_m 可以写成

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{a-2k\pi} F(x)\cos mx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{a-2k\pi}^{+\pi} F(x)\cos mx\ dx,$$

这里假定 a 位于 $2k\pi-\pi$ 与 $2k\pi+\pi$ 之间。由于 $F(x)$ 以 2π 为周期，并且在区间 $(a, a+2\pi)$ 内同 $f(x)$ 重合，上式可改写为

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos mx\ dx. \tag{74}$$

同样有

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin mx\ dx. \tag{75}$$

每当函数 $f(x)$ 定义在任意一个长度为 2π 的区间内时，前面两式都使我们能够直接计算它的 Fourier 级数展开系数，而无须先把给定区间化为 $(-\pi, +\pi)$。

198.　例子

1) 求一个 Fourier 级数, 使它的和在 $-\pi < x < 0$ 时等于 -1, 在 $0 < x < +\pi$ 时等于 $+1$。公式 (67) 给出

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 0,\\
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos mx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos mx\ dx = 0,\\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin mx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin mx\ dx = \frac{2-\cos m\pi-\cos(-m\pi)}{m\pi}.
\end{aligned}$$

若 m 为偶数，则 $b_m=0$；若 m 为奇数，则 $b_m = 4/(m\pi)$。把所有系数都乘以 $\pi/4$，便看出级数

$$y = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1} + \cdots \tag{76}$$

的和在 $-\pi < x < 0$ 时等于 $-\pi/4$，在 $0 < x < \pi$ 时等于 $+\pi/4$。$x=0$ 是一个间断点，而级数在 $x=0$ 时的和为零，正如应有的那样。更一般地，级数 (76) 的和在 $\sin x > 0$ 时为 $\pi/4$，在 $\sin x < 0$ 时为 $-\pi/4$，而在 $\sin x = 0$ 时为零。

方程 (76) 所表示的曲线，由直线 $y=\pm\pi/4$ 上无穷多个长度为 π 的线段，以及 x 轴上无穷多个孤立点

$$y=0, \qquad x=k\pi$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

组成。

2）函数 x 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的 Fourier 展开系数为

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\ dx = 2\pi,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos mx\ dx = \left[\frac{x\sin mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi}\sin mx\ dx = 0,$$
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin mx\ dx = -\left[\frac{x\cos mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi}\cos mx\ dx = -\frac{2}{m}.$$

因此，对 0 与 2π 之间的一切 x 值，公式

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \cdots \tag{77}$$

成立。若令 y 等于右端级数, 所得方程所表示的曲线由无穷多个平行于 $y = x/2$ 的直线段，以及无穷多个孤立点组成。

注。若定义在区间 $(-\pi, +\pi)$ 内的函数 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(-x) = f(x)$，那么所有系数 b_m 都等于零，因为显然

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin mx\ dx = -\int_0^{\pi} f(x)\sin mx\ dx.$$

同样，若 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，那么所有系数 a_m 都等于零，其中也包括 a_0。一个只在区间 $(0, \pi)$ 内定义的函数 $f(x)$，可以任意用下面两个方程之一把定义延拓到区间 $(-\pi, 0)$：

$$f(-x) = f(x), \qquad \text{或} \qquad f(-x) = -f(x).$$

因此，在区间 $(0, \pi)$ 内，给定函数 $f(x)$ 既可以表示成余弦级数，也可以表示成正弦级数。

199.　连续函数的展开；Weierstrass 定理

设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上并且连续的函数（原书沿用旧式记号 (a, b) 来表示包含端点的区间）。Weierstrass 发现了下面这个卓越的定理：任给一个预先指定的正数 ϵ，总能找到一个多项式 $P(x)$，使得对于闭区间 $[a, b]$ 内的一切 x 值，差 $f(x) - P(x)$ 的绝对值都小于 ϵ。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这个定理有许多证明，其中 Lebesgue 的证明是最简单的证明之一。[16]先考察一个特殊函数 $\psi(x)$；它在区间 $(-1,+1)$ 内连续，并定义如下：当 $-1\leq x\leq 0$ 时，$\psi(x)=0$；当 $0\leq x\leq 1$ 时，$\psi(x)=2kx$，其中 k 是给定常数。于是

$$\psi(x)=k(x+|x|).$$

此外，在 $-1\leq x\leq +1$ 时有

$$|x|=\sqrt{1-(1-x^2)},$$

而对同样的 x 值，这个根式可以展开成按 $1-x^2$ 的幂排列的一致收敛级数。因此，在区间 $(-1,+1)$ 内，$|x|$，从而 $\psi(x)$，都可以用一个多项式逼近到任意要求的精度。

现在考察任意一个在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$。把这个区间分成一列子区间

$$(a_0,a_1),(a_1,a_2),\ldots,(a_{n-1},a_n),$$

其中

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b,$$

并使 $f(x)$ 在每一个子区间内的振幅都小于 $\epsilon/2$。把曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为

$$a_0,a_1,a_2,\ldots,b$$

的诸点依次用直线段连接，所得折线记为 L。L 上任一点的纵坐标显然是一个连续函数 $\phi(x)$，并且差 $f(x)-\phi(x)$ 的绝对值小于 $\epsilon/2$。事实上，例如在区间 $(a_{\mu-1},a_\mu)$ 内，令

$$x-a_{\mu-1}=\theta(a_\mu-a_{\mu-1}),$$

则

$$\begin{aligned}f(x)-\phi(x)=[f(x)-f(a_{\mu-1})](1-\theta)\\ +[f(x)-f(a_\mu)]\theta.\end{aligned}$$

由于因子 θ 为正且小于 1，差 $f-\phi$ 的绝对值小于

$$\frac{\epsilon}{2}(1-\theta+\theta)=\frac{\epsilon}{2}.$$

函数 $\phi(x)$ 可以分解成 n 个同 $\psi(x)$ 同类型的函数之和。事实上，设 $A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是折线 L 的相继各顶点。函数 $\phi(x)$ 等于连续函数 $\psi_1(x)$

[16] *Bulletin des sciences mathématiques*, p. 278, 1898.

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

与另一个函数 $\phi_1(x)$ 之和；$\psi_1(x)$ 在整个闭区间 $[a,b]$ 上由直线 A_0A_1 的延长线表示，而 $\phi_1(x)$ 则由折线

$$A_0'A_1'\cdots A_n'$$

表示；这条折线的第一边 $A_0'A_1'$ 位于 x 轴上，其余各边可由 L 的各边容易地构造出来。其次，函数 $\phi_1(x)$ 又等于两个函数 ψ_2 与 ϕ_2 之和；ψ_2 在 a_0 与 a_1 之间为零，在 a_1 与 b 之间由直线 $A_1'A_2'$ 的延长线表示，而 ϕ_2 则由折线

$$A_0''A_1''A_2''\cdots A_n''$$

表示，这条折线的前三个顶点都位于 x 轴上。最后得到

$$\phi=\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n,$$

其中 ψ_i 是一个连续函数，在 a_0 与 a_{i-1} 之间为零，在 a_{i-1} 与 b 之间由一条直线段表示。现在作代换

$$X=mx+n,$$

适当选择常数 m,n，便可以在区间 $(-1,+1)$ 内用方程

$$\psi_i(x)=k(X+|X|)$$

定义函数 $\psi_i(x)$；所以它可以用多项式逼近到任意要求的精度。由于每一个函数 $\psi_i(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上都可以用一个误差小于 $\epsilon/(2n)$ 的多项式表示，显然这些多项式之和同 $f(x)$ 的差小于 ϵ。

由前述定理还可推出：任一在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，都可以表示成一个在该区间内一致收敛的多项式无穷级数。事实上，取一列正数

$$\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n,\ldots,$$

每一个都小于前一个，并且当 n 无限增大时 ϵ_n 趋近于零。由前述定理，对每一个 ϵ_i 都能找到一个多项式 $P_i(x)$，使得在整个闭区间 $[a,b]$ 上，差 $f(x)-P_i(x)$ 的绝对值小于 ϵ_i。于是级数

$$P_1(x)+[P_2(x)-P_1(x)]+\cdots+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\cdots$$

收敛，并且对闭区间 $[a,b]$ 上的任意 x 值，它的和都是 $f(x)$。因为前 n 项之和等于 $P_n(x)$，而差

$$f(x)-S_n$$

的绝对值小于 ϵ_n，所以当 n 无限增大时趋近于零。此外，这个级数一致收敛：任给一个正数，只要 n 超过某个固定整数 N，无论 x 在 a 与 b 之间取什么值，差 $f(x)-S_n$ 的绝对值都小于该正数。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

200.　无处可导的连续函数

本章最后给出 Weierstrass 的一个例子：一个对变量任何值都没有导数的连续函数。设 $0 < b < 1$，并令 a 为正奇整数。由收敛无穷级数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \tag{78}$$

定义的函数 $F(x)$ 对一切 x 值都连续，因为这个级数在任意区间内都一致收敛。如果乘积 $ab < 1$，逐项微分所得的级数也有同样性质。因此函数 $F(x)$ 有导数，而且这个导数本身是连续函数。现在证明：当乘积 ab 超过某个界限时，情形有本质不同。

先令

$$S_m = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{m-1} b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos(a^n \pi x)\},$$

以及

$$R_m = \frac{1}{h} \sum_{n=m}^{+\infty} b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos(a^n \pi x)\}.$$

于是

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = S_m + R_m. \tag{79}$$

另一方面，对函数 $\cos(a^n \pi x)$ 应用中值公式，很容易看出差

$$\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos(a^n \pi x)$$

的绝对值小于 $\pi a^n |h|$。所以 $|S_m|$ 小于

$$\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1},$$

从而当 $ab > 1$ 时，也小于

$$\frac{\pi (ab)^m}{ab - 1}.$$

现在给 h 取一个特殊值，来求 $|R_m|$ 的一个下界。总可以写成

$$a^m x = A_m + \epsilon_m,$$

其中 A_m 是整数，ϵ_m 位于 $-1/2$ 与 $+1/2$ 之间。令

$$h = \frac{e_m - \epsilon_m}{a^m},$$

其中 e_m 等于 $+1$ 或 -1；选取它，使 h 与 e_m 同号，并且

$$|h| < \frac{3}{2a^m}.$$

于是

$$\begin{aligned} a^n\pi(x+h) &= a^{n-m}\pi\{a^m x + e_m - \epsilon_m\} \\ &= a^{n-m}\pi(A_m + e_m). \end{aligned}$$

由于 a 是奇数而 $e_m = \pm 1$，整数 $a^{n-m}(A_m + e_m)$ 与 $A_m + 1$ 同奇偶，所以

$$\cos[a^n\pi(x+h)] = (-1)^{A_m+1}.$$

此外

$$\begin{aligned} \cos(a^n\pi x) &= \cos\{a^{n-m}\pi(A_m + \epsilon_m)\} \\ &= (-1)^{A_m}\cos(a^{n-m}\epsilon_m\pi). \end{aligned}$$

因此

$$R_m = \frac{(-1)^{A_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n[1 + \cos(a^{n-m}\epsilon_m\pi)].$$

这个级数的每一项都非负，所以它的和不小于第一项；又因为 $|\epsilon_m| \leq 1/2$，有 $1 + \cos(\epsilon_m\pi) \geq 1$，故第一项不小于 b^m。因而

$$|R_m| \geq \frac{b^m}{|h|}.$$

由 $|h| < 3/(2a^m)$，进一步得到

$$|R_m| > \frac{2}{3}(ab)^m.$$

如果 a, b 满足不等式

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}, \tag{80}$$

就有

$$\frac{2}{3}(ab)^m > \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所以由 (79)，

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| \geq |R_m| - |S_m| > (ab)^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

当 m 无限增大时，最右端无限增大，而 $|h|$ 趋近于零。因此，无论预先给定的 ϵ 多么小，都能找到一个绝对值小于 ϵ 的增量 h，使

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|$$

超过任意预先指定的数。由此可知，只要 a, b 满足关系 (80)，函数 $F(x)$ 对任何 x 值都没有导数。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

习题

1. 应用 Lagrange 公式，把方程

$$y^2 = ay + x$$

中当 $x=0$ 时等于 a 的那个根展开成 x 的幂级数。

2. 对方程

$$y - a + xy^{m+1} = 0$$

解类似问题。把结果应用于二次方程

$$a - bx + cx^2 = 0.$$

假定 $b \neq 0$，把该二次方程中当 c 趋近于零时趋近于 a/b 的那个根，展开成 c 的幂级数。

3. 在 $|x|<1$ 时推导公式

$$\begin{aligned}\frac{\log(1+x)}{1+x} = x &- \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 \\ &+ \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 \\ &- \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots.\end{aligned}$$

4. 证明公式

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

在 $x > -1/2$ 时成立。

5. 证明等式

$$x = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \cdots$$

对 $|x|<1$ 成立。当 $|x|>1$ 时，这个级数的和是什么?

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

6. 假定 $a \neq 0$；在相应二项级数的收敛范围 $|x/(a+x)| < 1$ 内推导公式

$$
\begin{aligned}
(a+x)^{-n} = \frac{1}{a^n}\Bigg[1 &- \frac{nx}{a+x} \\
&+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 \\
&- \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3 + \cdots\Bigg].
\end{aligned}
$$

7. 证明：在某个 $\sin x = 0$ 的点附近，函数 $\sin mx$ 与 $\cos mx$ 中取值分别为 0 与 1 的那些局部分支，都可以展开成按 $\sin x$ 的幂排列的级数：

$$\sin mx = m\left[\sin x - \frac{m^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5 x - \cdots\right],$$

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1\cdot 2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 x - \cdots.$$

〔利用微分方程

$$(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2} - y\frac{du}{dy} + m^2u = 0;$$

当 $y = \sin x$ 时，$u = \cos mx$ 与 $u = \sin mx$ 都满足这个方程。〕

8. 由前两式推出函数

$$\cos(n\arccos x), \qquad \sin(n\arccos x)$$

的展开式。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 10 章

平面曲线

严格说来, 解析几何所研究的曲线和曲面, 都是解析曲线和解析曲面。不过, 我们即将考察的几何概念，只要求某一有限数目的逐次导数存在。例如，方程为 $y = f(x)$ 的曲线，只要函数 $f(x)$ 有导数 $f'(x)$，就有切线；只要 $f'(x)$ 有导数 $f''(x)$，就有曲率半径；其余类推。

I. 包络

201. 包络的确定

设有一条平面曲线 C，其方程

$$f(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

含有任意参数 α；曲线的形状和位置将随 α 而改变。如果曲线 C 的每一个位置都与一条固定曲线 E 相切，那么曲线 E 叫作这些曲线 C 的*包络*，而曲线 C 则称为被 E 所包络。现在的问题是：对一个给定的曲线族 C，判定包络存在还是不存在；若存在，则求出这个包络。

先假定包络 E 存在。设 (x, y) 是 E 与曲线族中对应于参数某一值 α 的那条曲线 C 的切点。量 x, y 是参数 α 的两个未知函数, 并满足方程 (1)。为了确定这两个函数, 我们来表示这样一个事实：对 α 的一切值, 曲线 E 与 C 的切线重合。设 $\delta x, \delta y$ 是与曲线 C 的切线方向余弦成比例的两个量，并设 $dx/d\alpha, dy/d\alpha$ 是未知函数 $x = \phi(\alpha), y = \psi(\alpha)$ 的导数。那么相切的一个必要条件是

$$\frac{dx/d\alpha}{\delta x} = \frac{dy/d\alpha}{\delta y}. \tag{2}$$

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

另一方面，对于所考察的那一条特定曲线 C，方程 (1) 中的 α 取常值，因而有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y=0, \tag{3}$$

这就是确定 C 的切线的关系式。再者，两个未知函数 $x=\phi(\alpha), y=\psi(\alpha)$ 也满足方程

$$f(x,y,\alpha)=0,$$

但此时 α 是自变量。因此

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0. \tag{4}$$

结合 (2)、(3) 与 (4)，便得到

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0. \tag{5}$$

未知函数 $x=\phi(\alpha), y=\psi(\alpha)$ 同时是这个方程和方程 (1) 的解。因此，若包络存在，其方程应由方程

$$f=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$$

中消去参数 α 而得到。

设从 (1) 与 (5) 中消去 α 所得的方程为 $R(x,y)=0$；现在来判定这个方程是否确实表示给定曲线族的包络。设 C_0 是对应于参数值 α_0 的那一条曲线，又设 (x_0,y_0) 是两条曲线

$$f(x,y,\alpha_0)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,y,\alpha_0)=0 \tag{6}$$

的交点 M_0 的坐标。一般说来，方程 (1) 与 (5) 有形如

$$x=\phi(\alpha), \qquad y=\psi(\alpha)$$

的解；当 $\alpha=\alpha_0$ 时，它们分别化为 x_0, y_0。因而在 $\alpha=\alpha_0$ 时，有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)_0=0.$$

把这个方程同 (3) 合起来，就看出曲线 C_0 的切线与点 (x,y) 所描出的曲线的切线重合；唯一的例外是 $\partial f/\partial x$ 与 $\partial f/\partial y$ 同时为零，也就是说，点 M_0 是曲线 C_0 的一个奇点。因此，方程 $R(x,y)=0$ 所表示的，或者是曲线族 C 的包络，或者是这些曲线上奇点的轨迹。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这个结论还可以补充说明。若每一条曲线 C 都有一个或若干个奇点，那么这些奇点的轨迹必定是曲线 $R(x,y)=0$ 的一部分。事实上，设点 (x,y) 是这样的一个奇点；那么 x,y 是 α 的函数，并满足三个方程

$$f(x,y,\alpha)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

从而也满足方程 $\partial f/\partial\alpha=0$。所以 x,y 满足由 $f=0$ 与 $\partial f/\partial\alpha=0$ 消去 α 所得到的方程 $R(x,y)=0$。在一般情形下，曲线 $R(x,y)=0$ 由两个在解析意义上彼此不同的部分组成：其中一个是真正的包络，另一个是奇点的轨迹。

例。考察曲线族

$$f(x,y,\alpha)=y^2-y^4+(x-\alpha)^2=0.$$

在这个方程与导出方程

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=-2(x-\alpha)=0$$

之间消去 α，得到

$$y^4-y^2=0,$$

它表示三条直线 $y=0, y=1, y=-1$。给定的曲线族可以由曲线

$$y^4-y^2+x^2=0$$

沿 x 轴平移而生成。这条曲线在原点有一个二重点，并且在它同 y 轴的两个交点处分别与直线 $y=\pm1$ 相切。因此，直线 $y=0$ 是二重点的轨迹，而两条直线 $y=\pm1$ 才构成真正的包络。

202.

若曲线族 C 有包络 E，那么包络上的每一点，都是曲线族中两条参数值相差一个无穷小量的曲线之交点的极限位置。事实上，设

$$f(x,y,\alpha)=0, \qquad f(x,y,\alpha+h)=0 \tag{7}$$

是曲线族中两条相邻曲线的方程。决定这两条曲线交点的方程组 (7)，显然可以换成等价方程组

$$f(x,y,\alpha)=0, \qquad \frac{f(x,y,\alpha+h)-f(x,y,\alpha)}{h}=0.$$

当 h 趋近于零，也就是第二条曲线趋近于第一条曲线时，第二个方程化为 $\partial f/\partial\alpha = 0$。

从几何上看，这个性质也相当明显。例如在图 37a 中，当 C' 以 C 为极限位置而趋近于 C 时，两条相邻曲线 C, C' 的交点 N 趋近于切点 M。同样，在图 37b 中, 假定给定曲线 (1) 有二重点; 当 C' 趋近于 C 时, 两条相邻曲线 C, C' 的交点趋近于 C 与包络的交点。

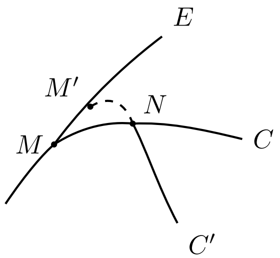


图 37a

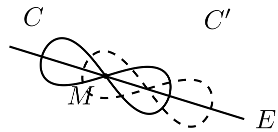


图 37b

上面的说明解释了为什么求包络时会同时得到奇点轨迹。设 $f(x, y, \alpha)$ 关于 α 是一个 m 次多项式。任取平面上一点 $M_0(x_0, y_0)$，方程

$$f(x_0, y_0, \alpha) = 0 \tag{8}$$

一般有 m 个不同的根；也就是说，一般有曲线族中的 m 条不同曲线通过该点。但是，如果点 M_0 位于曲线 $R(x, y) = 0$ 上，那么方程

$$f(x_0, y_0, \alpha) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha} = 0$$

可以同时满足，于是方程 (8) 有一个二重根。因此，可以说方程 $R(x, y) = 0$ 表示平面上这样一些点的轨迹：通过其中每一点的曲线族成员中，有两条已经合并为一条。图 37a 与图 37b 清楚地表明，当一个给定点趋近于曲线 $R(x, y) = 0$ 上的一点时，通过它的两条曲线怎样合并为一条；无论所趋近的点位于真正的包络上，还是位于二重点轨迹上，情形都是如此。

注。常常还需要求一个曲线族

$$F(x, y, a, b) = 0 \tag{9}$$

的包络；它的方程含有两个可变参数 a, b，而这两个参数本身又满足一个形如 $\phi(a, b) = 0$ 的关系。不过，这种情形与前面的一般情形并无本质区别，因为可

以把 b 看作由方程 $\phi=0$ 所定义的 a 的函数。按照上面得到的规则，应把给定方程同下列方程联立：把其左端对 a 求导并令其等于零，得到

$$\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da}=0.$$

而由关系 $\phi(a,b)=0$ 还有

$$\frac{\partial \phi}{\partial a}+\frac{\partial \phi}{\partial b}\frac{db}{da}=0.$$

消去 db/da，便得到

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial \phi}{\partial b}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \phi}{\partial a}=0. \tag{10}$$

这个方程连同 $F=0$ 与 $\phi=0$ 一起决定所求包络。如果需要，还可以从这三个方程中消去参数 a, b。

203. 直线族的包络

作为例子，考察用法线式写出的直线 D 的方程

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-f(\alpha)=0, \tag{11}$$

其中可变参数是角 α。把左端对这个参数求导，得到第二个方程

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha-f'(\alpha)=0. \tag{12}$$

方程 (11) 与 (12) 以参数形式给出曲线族 (11) 中任一条直线与包络 E 的交点：

$$\begin{cases} x=f(\alpha)\cos\alpha-f'(\alpha)\sin\alpha, \\ y=f(\alpha)\sin\alpha+f'(\alpha)\cos\alpha. \end{cases} \tag{13}$$

很容易证明，由点 (x,y) 描出的包络 E 的切线恰好就是直线 D。事实上，由方程 (13) 得

$$\begin{cases} dx=-\big[f(\alpha)+f''(\alpha)\big]\sin\alpha\,d\alpha, \\ dy=\big[f(\alpha)+f''(\alpha)\big]\cos\alpha\,d\alpha, \end{cases} \tag{14}$$

从而 $dy/dx=-\cot\alpha$，这正是直线 D 的斜率。再设 s 表示从包络上的某一固定点起量得的弧长；由 (14) 有

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm\big[f(\alpha)+f''(\alpha)\big]d\alpha,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因而

$$s = \pm\left[\int f(\alpha)\,d\alpha + f'(\alpha)\right].$$

所以，只要把 $f(\alpha)$ 取为某个已知函数的导数，包络就成为一条容易求长的曲线。[1]

例如，令

$$f(\alpha) = l\sin\alpha\cos\alpha.$$

在方程 (11) 中先后令 $y=0$ 与 $x=0$，得到（图 38）

$$OA = l\sin\alpha, \qquad OB = l\cos\alpha;$$

所以 $AB=l$。所求曲线因而是这样一个定长为 l 的线段的包络：它的两个端点始终分别位于两条坐标轴上。此时公式 (13) 给出

$$x = l\sin^3\alpha, \qquad y = l\cos^3\alpha,$$

而包络的方程是

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{l}\right)^{2/3} = 1.$$

它表示一条具有四个尖点的内摆线，也就是图中所示的星形线。当 α 从 0 变到 $\pi/2$ 时，切点描出弧 DC。因此，从 D 起算的弧长为

$$s = \int_0^\alpha 3l\sin t\cos t\,dt = \frac{3}{2}l\sin^2\alpha.$$

设 I 是由 OA, OB 决定的矩形的第四个顶点，M 是从 I 向 AB 所作垂线的垂足。由三角形 AMI 与 APM 依次得到

$$AM = AI\cos\alpha = l\cos^2\alpha, \qquad AP = AM\sin\alpha = l\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

所以

$$OP = OA - AP = l\sin^3\alpha,$$

而点 M 正是直线 AB 与包络的切点。又有

$$BM = l - AM = l\sin^2\alpha;$$

所以弧长 $DM = 3BM/2$。

[1]弧长公式中出现的每一个量都有几何意义：α 是 x 轴与从原点向可变直线所作垂线之间的夹角；$f(\alpha)$ 是原点到可变直线的距离；$f'(\alpha)$ 除符号外，是可变直线同其包络的切点到原点向该直线所作垂线之垂足的距离。这个 s 的公式常称为 Legendre 公式。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

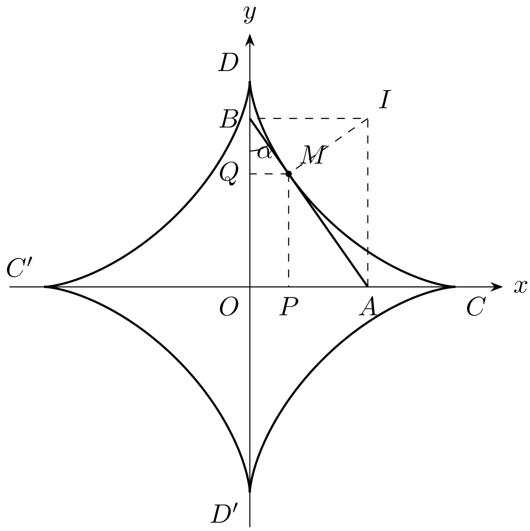


图 38

204. 圆族的包络

考察圆族

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\rho^2=0, \tag{15}$$

其中 a, b, ρ 都是可变参数 t 的函数。这个曲线族中的一个圆同包络相切的点，就是该圆同直线

$$(x-a)a'+(y-b)b'+\rho\rho'=0 \tag{16}$$

的交点。直线 (16) 垂直于可变圆心 (a, b) 所描出的曲线 C 的切线 MT；它到圆心的距离为

$$\rho\frac{d\rho}{ds},$$

其中 s 表示从曲线 C 上某一固定点起量得的弧长。因此，如果直线 (16) 在两点 N, N' 截圆，那么弦 NN' 被切线 MT 垂直平分。由此可知，包络由两个部分组成；一般说来，它们是同一条解析曲线的两个分支。现在考察几个特殊情形。

1）若 ρ 为常数，则接触弦 NN' 化为曲线 C 的法线 PP'；包络由两条平行曲线 C_1, C_2 组成，它们是在曲线 C 的两侧，沿法线分别量取定长 ρ 所得到的。

2）若 $\rho=s+K$，则

$$\rho\frac{d\rho}{ds}=\rho,$$

而弦 NN' 化为圆在点 Q 处的切线。包络的两个部分合并为一条曲线 Γ，其法线都是曲线 C 的切线。曲线 C 叫作 Γ 的*渐屈线*；反过来，Γ 叫作 C 的一条*渐伸线*（见 §206）。若沿所选方向有 $d\rho/ds > 1$（更一般地，若 $|d\rho/ds| > 1$），则直线 (16) 不再与圆相交，包络成为虚的。

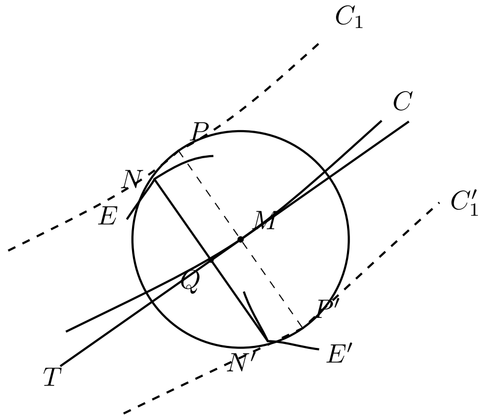


图 39

次级焦散线。现在假定可变圆的半径与圆心到一个定点 O 的距离成比例。把定点 O 取作坐标原点，圆的方程成为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2(a^2+b^2),$$

其中 k 是常比例因子，而接触弦的方程是

$$(x-a)a'+(y-b)b'+k^2(aa'+bb')=0.$$

若 δ, δ' 分别表示圆心到接触弦的距离，以及圆心到过原点且与接触弦平行的直线的距离，则上式表明

$$\delta=k^2\delta'.$$

在半径 MO 上取一点 P（图 40），使

$$MP=k^2MO,$$

并设 C 是圆心的轨迹。刚才得到的方程表明，接触弦就是从 P 向曲线 C 在圆心 M 处的切线所作的垂线。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

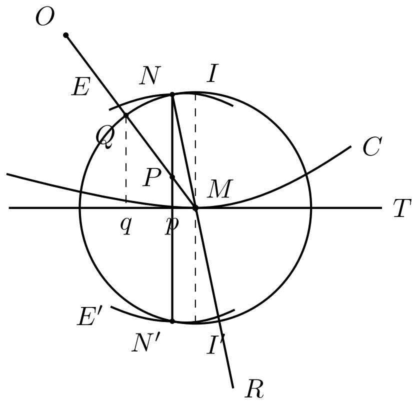


图 40

假定 $k<1$，并用 E 表示包络中与点 O 位于切线 MT 同一侧的那一支。再用 i,r 分别表示直线 MO,MN 同曲线 C 的法线 MI 所成的两个角。于是有

$$\sin i=\frac{Mq}{MQ},\qquad \sin r=\frac{Mp}{MN},\qquad \frac{\sin i}{\sin r}=\frac{Mq}{Mp}=\frac{MQ}{MP}=\frac{1}{k}.$$

中译者校记（现代重排本误排）。现代 LaTeX 重排本把上述投影比式误排为一个不相容的复合商，并且删去了原图中的小写点 p,q。本稿依据 1904 年英译本恢复公式及图中相应标记。

现在设点 O 是一个光源，曲线 C 把含有 O 的某一均匀介质同另一介质分开；后一介质相对于前一介质的折射率为 $1/k$。折射以后，入射光线 OM 变成折射光线 MR；依照折射定律，MR 是直线 NM 的延长线。因此，所有折射光线 MR 都是包络的法线。这个包络叫作折射的*次级焦散线*。真正的焦散线，也就是折射光线的包络，是次级焦散线的渐屈线。

包络的另一支 E' 显然没有物理意义；它对应于负的折射率。若令 $k=1$，包络 E 退化为单独一点 O，而另一部分 E' 则成为点 O 关于曲线 C 的各条切线的对称点之轨迹。这一部分包络同时也是下述反射问题中的*次级焦散线*：从定点 O 发出的入射光线经曲线 C 反射。用与上面相似的方法还可以证明：若以曲线 C 的每一点为圆心作圆，并令圆的半径与圆心到某一固定直线的距离成比例，那么这个圆族的包络，就是对于一束平行光线的*次级焦散线*。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

II. 曲率

205. 曲率半径

关于曲率的最初想法是：一条曲线离开它的切线越快，它的曲率就比另一条曲线越大。为了把这个颇含糊的想法说得精确，先考察圆。圆的半径越小，曲率越大；所以自然把半径的最简单的、随半径减小而增大的函数——半径的倒数 $1/R$——取作圆的曲率量度。

设 AB 是半径为 R 的圆的一段弧，它在圆心所张的角为 ω。弧两端切线之间的角也等于 ω，弧长则为 $s = R\omega$；因此，圆的曲率量度是 ω/s。这个定义可以推广到任意曲线弧。设 AB 是平面曲线的一段不含拐点的弧，ω 是弧两端切线之间的角；两条切线的方向按某个规则取成同一指向，例如都取从 A 指向 B 的方向。于是商

$$\frac{\omega}{\text{弧}AB}$$

称为弧 AB 的*平均曲率*。当点 B 趋近于点 A 时，这个商一般趋近于一个极限，称为曲线在点 A 的*曲率*。点 A 处的*曲率半径*，是同给定曲线在 A 处具有相同曲率的圆的半径；它是曲率的倒数。

设 s 是从某一固定点起算的曲线弧长，α 是切线同一个固定方向（例如 x 轴）之间的角。弧 AB 的平均曲率就是商 $\Delta\alpha/\Delta s$ 的绝对值；所以曲率半径为

$$R = \pm \lim \frac{\Delta s}{\Delta \alpha} = \pm \frac{ds}{d\alpha}.$$

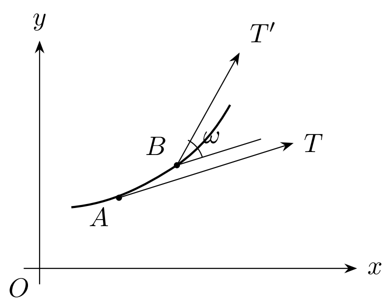


图 41

设给定曲线的方程已经解成 $y = f(x)$。于是

$$\alpha = \arctan y', \qquad d\alpha = \frac{y''\,dx}{1+y'^2}, \qquad ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

从而

$$R = \pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}. \tag{17}$$

曲率半径在本质上是正的，所以符号 $\pm$ 表示要取右端表达式的绝对值。沿给定曲线在 A 处的法线，向曲线凹向的一侧量取一段等于曲率半径的长度；其端点 I 称为*曲率中心*。以 I 为圆心、以 R 为半径所作的圆称为*曲率圆*。

若 (x_1, y_1) 表示同点 (x, y) 对应的曲率中心, 则它位于法线上, 并且到 (x, y) 的距离为 R；因此

$$(x_1 - x) + (y_1 - y)y' = 0, \qquad (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

消去 x_1，得到

$$y_1 - y = \pm\frac{1+y'^2}{y''}.$$

符号应选得使曲率中心位于曲线的凹侧。于是，当 $y'' > 0$ 时（如图 41），$y_1 - y$ 必须为正；当 $y'' < 0$ 时，$y_1 - y$ 为负。因此曲率中心的坐标为

$$y_1 - y = \frac{1+y'^2}{y''}, \qquad x_1 - x = -y'\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{18}$$

当曲线上点的坐标由参数 t 的函数给出时，由 §33,

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3};$$

公式 (17) 与 (18) 化为

$$\begin{aligned} R &= \pm\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \\ x_1 - x &= -\frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \\ y_1 - y &= \frac{dx\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \end{aligned} \tag{19}$$

在拐点处 $y'' = 0$，曲率半径为无穷大。在第一类尖点处，y 可以展开成 $x^{1/2}$ 的幂级数，并且展开式从 x 的一次项开始；所以 y' 有有限值，而 y'' 为无穷大，曲率半径等于零。

注。当坐标以弧长 s 为参数写成

$$x = \phi(s), \qquad y = \psi(s)$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

时，由 $dx^2+dy^2=ds^2$，函数 ϕ,ψ 满足

$$\phi'(s)^2+\psi'(s)^2=1,\qquad \phi'\phi''+\psi'\psi''=0.$$

由这两个方程解出 ϕ',ψ'，得到

$$\phi'=\varepsilon\frac{\psi''}{\sqrt{\phi''^2+\psi''^2}},\qquad \psi'=-\varepsilon\frac{\phi''}{\sqrt{\phi''^2+\psi''^2}},\qquad \varepsilon=\pm 1.$$

于是曲率半径公式取得优美的形式

$$\frac{1}{R^2}=\left[\phi''(s)\right]^2+\left[\psi''(s)\right]^2. \tag{20}$$

206.　渐屈线

任一点处的曲率中心，是该点的法线同另一条趋近于它、并以它为极限位置的法线之交点的极限位置。事实上，法线方程是

$$X-x+(Y-y)y'=0,$$

其中 X,Y 是动坐标。为了求这条法线同另一条趋近于它的法线之交点的极限位置，应把这个方程同把其左端对参数 x 求导所得的方程联立：

$$-1-y'^2+(Y-y)y''=0.$$

由此方程所得的 Y，恰好就是曲率中心的纵坐标。因此，曲率中心的轨迹是给定曲线各法线的包络；它称为该曲线的*渐屈线*。

下面约定曲线同其渐屈线之间关系的若干记号。沿给定曲线取定一个方向，从一个固定点起计弧长，并以 α 表示 x 轴正向同对应于弧长增大方向的切线方向之间的角。于是

$$\tan\alpha=\pm y',\qquad \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\pm\frac{dx}{ds}.$$

在 $\cos\alpha=\pm dx/ds$ 中，应取与 dx/ds 相合的符号，因而可直接写成 $\cos\alpha=dx/ds$：若 x 与 s 同时增大，角 α 为锐角；若二者中一个增大而另一个减小，角 α 为钝角（见 §81）。同样，若 β 表示 y 轴同切线之间的角，则 $\cos\beta=dy/ds$。因此

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \sin\alpha=\frac{dy}{ds},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中角 α 按三角学中的正向计算。

若所考察弧上没有拐点，可以选择曲线的正向，使 s 与 α 同时增大；这样，在整段弧上都有

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

考察图形中的两种可能情形，容易看出，从曲线上一点指向曲率中心的线段同 x 轴所成的角是 $\alpha + \pi/2$。因此

$$x_1 = x + R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x - R\sin\alpha,$$

$$y_1 = y + R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = y + R\cos\alpha.$$

求微分，并利用

$$dx = \cos\alpha\, ds, \qquad dy = \sin\alpha\, ds, \qquad ds = R\, d\alpha,$$

得到

$$dx_1 = -\sin\alpha\, dR, \qquad dy_1 = \cos\alpha\, dR.$$

这些公式首先给出

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\cot\alpha,$$

这就证明了渐屈线的切线正是给定曲线的法线。又有

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2,$$

即 $ds_1 = \pm dR$。为明确起见，假定当我们沿给定曲线 C 从 M_1 走向 M_2 时，曲率半径始终增大；并把渐屈线 (D) 的正向选成使其弧长 s_1 同 R 一起增大。于是

$$ds_1 = dR, \qquad s_1 = R + C.$$

所以

$$弧 I_1I_2 = R_2 - R_1,$$

即渐屈线任一段弧的长度，等于原曲线上与该段弧两端对应的两个曲率半径之差。

已知渐屈线时，这个性质给出渐伸线（亦称渐开线）的一种机械作图法。把一根细线的一端固定在渐屈线 (D) 的任意一点 A，并把线沿 (D) 缠绕到 I_2；随后使它从 I_2 起沿该点的切线伸直。把线绷紧并继续从 (D) 上退绕时，自由

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

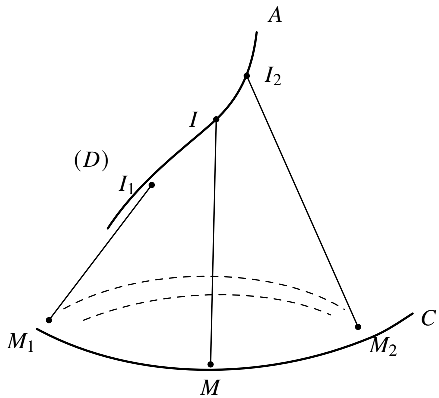


图 42

端 M_2 就描述渐伸线 C。等价地说，在渐屈线的每一条切线 IM 上量取长度 $IM=l$，使 $l+s$ 为常数，其中 s 是渐屈线弧 AI 的长度。给这个常数以不同的值，就得到无穷多条渐伸线；任取其中一条，其余各条都可以由它沿法线量取恒定长度而得到。

这些性质也立即由 §82 中线段长度微分的一般公式

$$dl=-d\sigma_1\cos\omega_1-d\sigma_2\cos\omega_2$$

推出。如果线段同一个端点所描述的曲线相切，而同另一端点所描述的曲线垂直，就可以令

$$\omega_1=\pi,\qquad \omega_2=\frac{\pi}{2},$$

并得到 $dl-d\sigma_1=0$。如果这条直线是两条曲线之一的法线，而 l 是常数，那么

$$dl=0,\qquad \cos\omega_1=0,$$

所以 $\cos\omega_2=0$。

关于渐屈线弧长的定理，要求曲率半径在所考察的整段弧上始终增大或始终减小。若不是这样，叙述必须修改。若曲率半径在一点有极大或极小，则该点处 $dR=0$，因而 $dx_1=dy_1=0$；这个点是渐屈线的尖点。例如，若曲率半径在 M 处取极大值（图 43），则

$$弧 II_1=IM-I_1M_1,\qquad 弧 II_2=IM-I_2M_2,$$

所以

$$弧 I_1I_2=2IM-I_1M_1-I_2M_2.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，差 $I_1M_1 - I_2M_2$ 等于两段弧 II_1, II_2 之差，而不是它们的和。

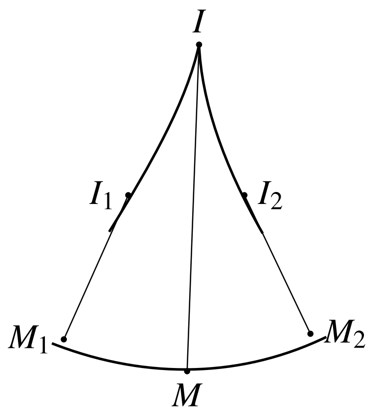


图 43

207. 摆线

*摆线*是一圆在一条固定直线上无滑动滚动时，圆周上一点所描述的轨迹。取固定直线为 x 轴，并把原点取在所选圆周点位于该轴上的某个位置。当圆滚动到接触点 I 时（图 44），原来位于 O 的圆周点来到位置 M，并且圆弧 IM 等于线段 OI。设 ϕ 是半径 CM 与 CI 之间的角，则点 M 的坐标为

$$x = OI - IP = R\phi - R\sin\phi, \qquad y = MP = IC + CQ = R - R\cos\phi.$$

其中，P 与 Q 分别是点 M 在直线 OI 与 IT 上的投影。这些公式对 ϕ 的任意值都成立；在一周滚动过程中，点描述弧 OBO_1，继续滚动就得到无穷多条全等的弧。因此

$$x = R(\phi - \sin\phi), \qquad y = R(1 - \cos\phi),$$

从而

$$dx = R(1 - \cos\phi)\, d\phi, \qquad dy = R\sin\phi\, d\phi,$$

$$d^2x = R\sin\phi\, d\phi^2, \qquad d^2y = R\cos\phi\, d\phi^2.$$

切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\phi}{1 - \cos\phi} = \cot\frac{\phi}{2}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这说明，点 M 处的切线就是图 44 中的直线 MT；因为 $\angle MTC = \phi/2$，而三角形 MTC 是等腰三角形。所以 M 处的法线是通过固定直线同滚动圆接触点 I 的直线 MI。

摆线弧长满足

$$ds^2 = R^2 d\phi^2\left[\sin^2\phi + (1-\cos\phi)^2\right] = 4R^2\sin^2\frac{\phi}{2}\,d\phi^2.$$

按弧长增大的方向，若从 O 起算弧长，便有

$$ds = 2R\sin\frac{\phi}{2}\,d\phi, \qquad s = 4R\left(1-\cos\frac{\phi}{2}\right).$$

当 $\phi = 2\pi$ 时，一拱的长度为 $8R$。从原点到最高点的弧 OMB 长为 $4R$，弧 BM 长为 $4R\cos(\phi/2)$。又因为线段 MT 长为 $2R\cos(\phi/2)$，所以

$$\text{弧}BM = 2MT.$$

到过点 M 的纵坐标为止的面积是

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\phi y\,dx = R^2\int_0^\phi (1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt \\
&= R^2\int_0^\phi \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt \\
&= R^2\left(\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{\sin 2\phi}{4}\right).
\end{aligned}$$

因此，一整拱同其底边所围的面积为 $3\pi R^2$，即生成圆面积的三倍（Galileo）。

摆线的曲率半径是

$$\rho = \frac{8R^3\sin^3(\phi/2)\,d\phi^3}{2R^2\sin^2(\phi/2)\,d\phi^3} = 4R\sin\frac{\phi}{2}.$$

另一方面，由三角形 MCI，

$$MI = 2R\sin\frac{\phi}{2}.$$

所以 $\rho = 2MI$；把 MI 越过 I 延长一段等于 MI 的长度，就得到曲率中心。由此可以立即得到渐屈线：把生成圆关于点 I 作中心对称，直线 MI 同这个第二圆相交于点 M'，这个点就是曲率中心。又因为

$$\text{弧}T'M' = \pi R - \text{弧}IM' = \pi R - \text{弧}IM = \pi R - OI = OH - OI = IH = T'B',$$

点 M' 描述一条同原摆线全等的摆线；它在 B' 处有尖点，在 O 处有最高点。当 M 描述弧 BO_1 时，点 M' 描述第二段弧 $B'O_1$，它同弧 OB' 关于直线 BB' 对称。

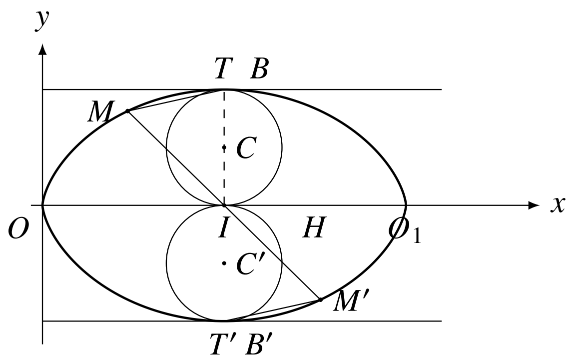


图 44

208. 悬链线

悬链线是在适当选取的直角坐标轴下方程为（其中 $a > 0$）

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) \tag{21}$$

的平面曲线。它的形状如图 45 中的弧 MAM'。由 (21),

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = \frac{y}{a^2},$$

中译者校记（现代重排本误排）。现代 LaTeX 重排本把上式末项误排成了 y/a。由公式 (21) 直接求导，并核对 1904 年英译本，应为 y/a^2；下文 $R = y^2/a$ 也要求这一值。

并且

$$1 + y'^2 = \frac{(e^{x/a} + e^{-x/a})^2}{4} = \frac{y^2}{a^2}.$$

若 ϕ 是切线同 x 轴所成的角，则

$$\sin\phi = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{e^{x/a} + e^{-x/a}}, \qquad \cos\phi = \frac{2}{e^{x/a} + e^{-x/a}} = \frac{a}{y}.$$

所以曲率半径为

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{y^2}{a}.$$

但是，在图 45 的三角形 MPN 中，$MP = MN\cos\phi$；所以

$$MN = \frac{MP}{\cos\phi} = \frac{y^2}{a} = R.$$

因此，悬链线的曲率半径等于法线 MN 的长度；由这个事实即可求出它的渐屈线。

悬链线弧 AM 的长度为

$$s=\int_0^x \frac{e^{u/a}+e^{-u/a}}{2}\,du=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)=y\sin\phi.$$

从 P 向切线 MT 作垂线 Pm。在三角形 PMm 中,

$$Mm=MP\sin\phi=s.$$

所以弧 AM 的长度等于线段 Mm。

209.　曳物线

图 45 中点 m 所描述的曲线称为*曳物线*。它是悬链线的一条渐伸线，并在 A 处有尖点。曳物线的切线长度等于 mP。但在三角形 MPm 中,

$$mP=y\cos\phi=a;$$

所以，曳物线从切点到 x 轴的切线段长度恒为常数 a。曳物线是唯一具有这个性质的曲线。

又由三角形 MTP,

$$Mm\cdot mT=a^2.$$

所以，曳物线的曲率半径同法线的乘积为常数；不过，还有无穷多条其他曲线也有这个性质。

点 m 的坐标 (x_1,y_1) 为

$$x_1=x-s\cos\phi=x-a\frac{e^{x/a}-e^{-x/a}}{e^{x/a}+e^{-x/a}},$$

$$y_1=y-s\sin\phi=\frac{2a}{e^{x/a}+e^{-x/a}}.$$

令

$$e^{x/a}=\tan\frac{\theta}{2},$$

曳物线的方程化为

$$x_1=a\cos\theta+a\log\tan\frac{\theta}{2},\qquad y_1=a\sin\theta. \tag{22}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

当 θ 从 $\pi/2$ 变到 π 时，点 (x_1, y_1) 描述弧 Amn，它渐近于 x 轴；当 θ 从 $\pi/2$ 变到 0 时，它描述关于 y 轴对称的弧 $Am'n'$。这两段弧分别对应于悬链线的弧 AM 与 AM'。

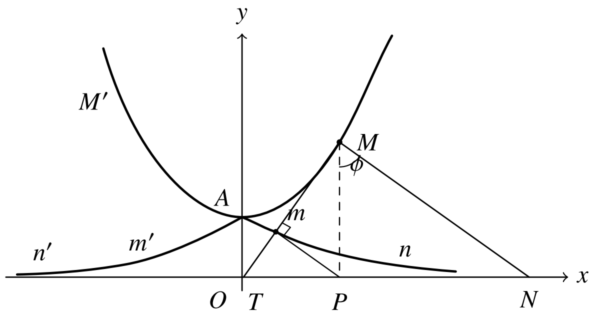


图 45

210. 内蕴方程

设曲率半径 R 已知为弧长 s 的函数,

$$R = \phi(s),$$

现在来确定平面曲线。设 α 是切线同 x 轴之间的角。于是

$$d\alpha = \pm\frac{ds}{R} = \pm\frac{ds}{\phi(s)}.$$

第一次积分给出

$$\alpha(s) = \alpha_0 \pm \int_{s_0}^{s} \frac{du}{\phi(u)},$$

再积分两次，得到

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\alpha(u)\,du, \qquad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\alpha(u)\,du.$$

这些方程所定义的曲线含有三个任意常数 x_0, y_0, α_0。若不计曲线的位置而只考察它的形状，这些常数都无关紧要。事实上，若 C 是由

$$X = \int_{s_0}^{s} \cos\left[\int_{s_0}^{\sigma} \frac{du}{\phi(u)}\right] d\sigma, \qquad Y = \int_{s_0}^{s} \sin\left[\int_{s_0}^{\sigma} \frac{du}{\phi(u)}\right] d\sigma$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所定义的曲线，那么取正号时，一般公式可以写成

$$x = x_0 + X\cos\alpha_0 - Y\sin\alpha_0,$$

$$y = y_0 + X\sin\alpha_0 + Y\cos\alpha_0.$$

这些公式只表示坐标轴的平移与旋转；若取负号，所得曲线是 C 关于 X 轴的对称曲线。因此，就曲线的形状而言，只要给出曲率半径作为弧长的函数，平面曲线便完全确定。方程

$$R = \phi(s)$$

称为曲线的*内蕴方程*（亦称自然方程）。

更一般地，只要知道量 R, s, α 中任意两个之间的一个关系，曲线的形状便已确定，而曲线上任一点的坐标都可以用求积法得到。例如，若

$$R = f(\alpha),$$

则

$$ds = f(\alpha)\,d\alpha,$$

并且

$$dx = \cos\alpha\, f(\alpha)\,d\alpha, \qquad dy = \sin\alpha\, f(\alpha)\,d\alpha.$$

因此，x 与 y 都可以用求积法求出。若 R 为常数，这些公式给出

$$x = x_0 + R\sin\alpha, \qquad y = y_0 - R\cos\alpha,$$

也就是半径为 R 的圆。从所求曲线的渐屈线也可直接看出这一结果：它的弧长恒为零，因而退化为一个点。

再举一个例子。设曲率半径同弧长的倒数成比例，

$$R = \frac{a^2}{s}.$$

于是

$$\alpha = \int_0^s \frac{u\,du}{a^2} = \frac{s^2}{2a^2},$$

并且

$$x = \int_0^s \cos\frac{u^2}{2a^2}\,du, \qquad y = \int_0^s \sin\frac{u^2}{2a^2}\,du.$$

虽然这些积分不能用显式形式求出，曲线的形状却容易判断：当 s 从 0 增大到 $+\infty$ 时，x, y 各自经过无穷多个极大值和极小值，并趋近于同一个有限极限。因此，曲线呈螺旋形，并渐近于直线 $y = x$ 上的一点。

III. 平面曲线的接触

211. 接触阶数

设 C 与 C' 是在一点 A 相切的两条平面曲线。对曲线 C 上的每一点 m，按照任意法则指定曲线 C' 上一点 m' 与之对应，唯一的要求是：当 m 趋近于 A 时，m' 也趋近于 A。把弧 Am，或者等价地把弦 Am，取作主无穷小量；首先研究应当采用怎样的对应法则，才能使无穷小量 mm' 相对于 Am 的阶数尽可能大。以一组直角或斜角笛卡儿坐标来表示这两条曲线，并假定 y 轴不平行于公共切线 AT。设

$$(C) \quad y = f(x), \qquad (C') \quad Y = F(x)$$

分别是两条曲线的方程，点 A 的坐标为 (x_0, y_0)。于是，点 m 的坐标为

$$[x_0 + h, f(x_0 + h)],$$

点 m' 的坐标为

$$[x_0 + k, F(x_0 + k)],$$

其中 k 是 h 的一个函数，它规定两条曲线之间的对应关系，并且随 h 一同趋近于零。

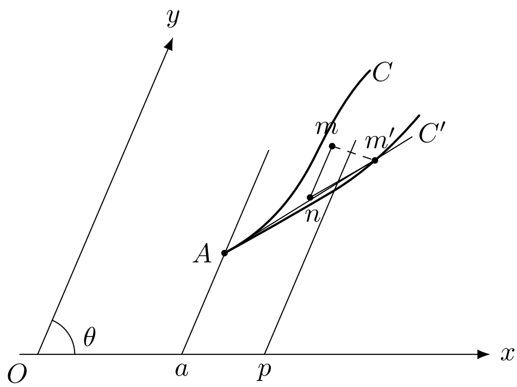


图 46

主无穷小量 Am 可以用横坐标增量 $h = \overline{ap}$ 代替，因为当点 m 趋近于点 A 时，商 $\overline{ap}/Am$ 趋近于一个非零的有限极限。现在假定，对于某一种对应法则，

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

mm' 相对于 h 是 $r+1$ 阶无穷小量。于是 mm'^2 是 $2r+2$ 阶无穷小量。若以 θ 表示两坐标轴之间的角，则

$$mm'^2 = \left[F(x_0+k) - f(x_0+h) + (k-h)\cos\theta\right]^2 + (k-h)^2\sin^2\theta.$$

所以，两个差

$$k-h, \qquad F(x_0+k) - f(x_0+h)$$

各自都必须是阶数不低于 $r+1$ 的无穷小量，即

$$k = h + \alpha h^{r+1}, \qquad F(x_0+k) - f(x_0+h) = \beta h^{r+1},$$

其中 α, β 是 h 的函数，并且在 h 趋近于零时各自趋近于有限极限。第二个公式可以写成

$$F(x_0+h+\alpha h^{r+1}) - f(x_0+h) = \beta h^{r+1}.$$

把 $F(x_0+h+\alpha h^{r+1})$ 在 x_0+h 处对增量 αh^{r+1} 作 Taylor 展开，所得除首项外的各项，阶数都不低于 $r+1$。因此，差

$$\Delta = F(x_0+h) - f(x_0+h)$$

是一个阶数不低于 $r+1$ 的无穷小量，而且它的阶数可能高于 $r+1$。但是，这个差 Δ 正等于过 m 作平行于 y 轴的直线时，该直线与两曲线 C, C' 的交点之间的距离 mn。把 m' 换成 n，无穷小量 mm' 的阶数只会提高或保持不变。因此，当两曲线上的对应点总是位于一条平行于 y 轴的直线上时，两对应点间的距离具有可能达到的最高阶数。若这一最高阶数是 $r+1$，便称两条曲线在点 A 处有 r *阶接触*。

注。这个定义引出若干说明。y 轴原本可以取成任何不平行于切线 AT 的直线。因此，为了求接触阶数，可以把两条曲线上由平行于任意固定直线 D 的直线所截得的两点规定为对应点，只须 D 不平行于两曲线公共点处的切线。前面的论证表明，所得无穷小量的阶数与 D 的方向无关；这一点也很容易直接验证。设 mn 与 mm' 是从曲线 C 上一点 m 引出的任意两条不平行于公共切线的直线（图 46）。由三角形 $mm'n$，

$$\frac{mm'}{mn} = \frac{\sin\angle mnm'}{\sin\angle mm'n}.$$

当点 m 趋近于点 A 时，由于弦 $m'n$ 趋近于切线 AT，角 mnm' 与 $mm'n$ 所趋近的极限都既不等于零，也不等于 π。所以 mm'/mn 趋近于一个非零的有限极

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

限，mm' 与 mn 是同阶无穷小量。同一论证还说明，无论用这一类中的何种构造由 m 确定 m'，mm' 都不可能比 mn 的阶数更高，因为分子 $\sin\angle mnm'$ 总趋近于一个非零的有限极限。

上面取作主无穷小量的是弧 Am 或弦 Am。若改取曲线 C' 的弧 An 为主无穷小量，所得结果完全相同，因为 Am 与 An 是同阶无穷小量。

若两条曲线 C, C' 有 r 阶接触，可以用无穷多种方式把 C' 上的点 m' 指定给 C 上的点 m，而仍使 mm' 成为 $r+1$ 阶无穷小量。为此，只须令

$$k = h + \alpha h^{s+1}, \qquad s \geq r,$$

其中 α 是 h 的函数，并且在 $h=0$ 时保持有限。反之，若 $s<r$，则 mm' 的阶数不可能超过 $s+1$。

中译者校记（底本原误）。1904 年英译本与现代 LaTeX 重排本都把上式条件排成 $s \leq r$；这同紧接着的“若 $s<r$”相矛盾。由前述估计可知，应为 $s \geq r$。

212. 解析方法

由上一节可知，两条曲线 C, C' 的接触阶数，可以通过求无穷小量

$$Y - y = F(x_0+h) - f(x_0+h)$$

相对于 h 的阶数而得到。由于两条曲线在 A 处相切，

$$F(x_0) = f(x_0), \qquad F'(x_0) = f'(x_0).$$

在同一点还可能有更多阶导数彼此相等。为求一般性，假定前 n 阶导数均相等：

$$\begin{cases} F(x_0) = f(x_0), & F'(x_0) = f'(x_0), \\ F''(x_0) = f''(x_0), & \ldots, \\ F^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0), & \end{cases} \tag{23}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而下一阶导数 $F^{(n+1)}(x_0)$ 与 $f^{(n+1)}(x_0)$ 不相等。分别对函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 应用 Taylor 公式，得到

$$\begin{aligned}Y &= F(x_0) + \frac{h}{1}F'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}F^{(n)}(x_0)\\&\quad + \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdots (n+1)}\left[F^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon\right],\\ y &= f(x_0) + \frac{h}{1}f'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x_0)\\&\quad + \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdots (n+1)}\left[f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon'\right].\end{aligned}$$

两式相减，得到

$$Y - y = \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdots (n+1)}\left[F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon - \varepsilon'\right], \tag{24}$$

其中 $\varepsilon, \varepsilon'$ 是无穷小量。因此，两条曲线的接触阶数，等于在 $x = x_0$ 时彼此相等的 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的最高阶导数的阶数 n。

条件 (23) 是 Lagrange 给出的；它们是 $x = x_0$ 成为方程 $F(x) = f(x)$ 的一个 $n+1$ 重根的充要条件。这个方程的根就是两条曲线 C, C' 各交点的横坐标，所以也可以说：具有 n 阶接触的两条曲线，有 $n+1$ 个重合的交点。

公式 (24) 表明：若 n 为偶数，$Y-y$ 随 h 改变符号；若 n 为奇数，$Y-y$ 不随 h 改变符号。因此，具有奇数阶接触的两条曲线在切点处不彼此穿过，而具有偶数阶接触的两条曲线在切点处彼此穿过。这一点很容易从几何上理解。为明确起见，设一条曲线 C' 在点 A 附近同另一条曲线 C 相交于三点。若连续地改变曲线 C'，使这三个交点都趋近于 A，那么 C' 的极限位置同 C 有二阶接触；从图形即可看出，两条曲线在 A 处彼此穿过。这个论证显然可以推广。

一般地，两曲线的方程并未解成关于 Y 与 y 的形式。此时，利用通常的求导法则，仍能写出两曲线具有 n 阶接触所需的条件，所以问题并无特殊困难。这里只考察若干经常出现的特殊情形。

先设两条曲线都以辅助变量表示：

$$(C)\quad \begin{cases} x = f(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \qquad (C')\quad \begin{cases} X = f(u), \\ Y = \psi(u), \end{cases}$$

并且

$$\psi(t_0) = \phi(t_0), \qquad \psi'(t_0) = \phi'(t_0),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

也就是说，两曲线在一点 A 相切，该点的坐标为 $f(t_0), \phi(t_0)$。假定 $f'(t_0) \neq 0$；于是公共切线不平行于 y 轴，并且令 $u = t$，便可取得两曲线上横坐标相同的点。另一方面，$x - x_0$ 相对于 $t - t_0$ 是一阶无穷小量；因此，只须求 $\psi(t) - \phi(t)$ 相对于 $t - t_0$ 的阶数。两曲线至少具有 n 阶接触的充要条件是

$$\psi(t_0) = \phi(t_0), \quad \psi'(t_0) = \phi'(t_0), \quad \ldots \quad , \psi^{(n)}(t_0) = \phi^{(n)}(t_0). \tag{25}$$

若下一阶导数 $\psi^{(n+1)}(t_0)$ 与 $\phi^{(n+1)}(t_0)$ 不相等，则接触阶数不超过 n，因而恰为 n。

再考察如下情形：曲线 C 由两方程

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t) \tag{26}$$

表示，而曲线 C' 由单一方程 $F(x, y) = 0$ 表示。把 $F(x, y)$ 中的 x 换成 $f(t)$，并考察由方程

$$F[f(t), \psi(t)] = 0 \tag{27}$$

所定义的隐函数 $y = \psi(t)$，便可把这一情形化为前一种情形。于是曲线 C' 也由形如

$$x = f(t), \qquad y = \psi(t) \tag{28}$$

的两个方程表示。

若两曲线 C, C' 在对应于参数值 t_0 的一点 A 具有 n 阶接触，条件 (25) 必须成立。另一方面，隐函数 $\psi(t)$ 的相继各阶导数由下列方程给出：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \dfrac{\partial F}{\partial y} \psi'(t) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} [f'(t)]^2 + 2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'(t) \psi'(t) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} [\psi'(t)]^2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial F}{\partial x} f''(t) + \dfrac{\partial F}{\partial y} \psi''(t) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots, \\ \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n} [f'(t)]^n + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial y} \psi^{(n)}(t) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

这里 F 的各偏导数均在 $[f(t), \psi(t)]$ 处取值。因此，把

$$t = t_0, \qquad x = f(t_0), \qquad \psi(t_0) = \phi(t_0),$$

以及

$$\psi'(t_0)=\phi'(t_0),\qquad \ldots \qquad ,\psi^{(n)}(t_0)=\phi^{(n)}(t_0)$$

代入这些方程，就得到具有 n 阶接触的必要条件。

所得条件可以写成如下形式。令

$$\mathcal{F}(t)=F[f(t),\phi(t)].$$

则两条给定曲线至少具有 n 阶接触的充要条件是

$$\mathcal{F}(t_0)=0,\qquad \mathcal{F}'(t_0)=0,\qquad \ldots \qquad ,\mathcal{F}^{(n)}(t_0)=0. \tag{30}$$

方程 $\mathcal{F}(t)=0$ 的根，是与两条给定曲线交点相对应的参数值。因此，以上条件等价于说：$t=t_0$ 是一个 $n+1$ 重根，也就是说，两条曲线有 $n+1$ 个重合的交点。

中译者校记（底本原误）。1904 年英译本与现代 LaTeX 重排本此处都写作"n 重根"。但条件 (30) 表明 $\mathcal{F}$ 及其前 n 阶导数在 t_0 处全为零，故 t_0 应为至少 $n+1$ 重根；这也同紧随其后的"$n+1$ 个重合交点"一致。

213.　密切曲线

给定一条固定曲线 C，以及一条依赖于 $n+1$ 个参数 $a,b,c,\ldots,l$ 的曲线 C'：

$$F(x,y,a,b,c,\ldots,l)=0, \tag{31}$$

一般可以适当选择这 $n+1$ 个参数，使 C' 与 C 在 C 上任一预先指定的点处具有 n 阶接触。事实上，设曲线 C 由方程 $x=f(t),y=\phi(t)$ 给出。曲线 C,C' 在 $t=t_0$ 所对应的点具有 n 阶接触的条件，就是方程 (30)，其中

$$\mathcal{F}(t)=F[f(t),\phi(t),a,b,c,\ldots,l].$$

若 t_0 已给定，这 $n+1$ 个方程一般可以确定 $n+1$ 个参数 $a,b,c,\ldots,l$。这样得到的曲线 C'，称为曲线 C 的一条*密切曲线*。

把这一理论应用于最简单的曲线族。直线方程 $y=ax+b$ 依赖于两个参数 a,b，所以相应的密切直线具有一阶接触。若 $y=f(x)$ 是曲线 C 的方程，参数 a,b 必须满足

$$f(x_0)=ax_0+b,\qquad f'(x_0)=a;$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，密切直线就是通常的切线，这正是应有的结果。

圆的方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \tag{32}$$

依赖于三个参数 a,b,R；所以相应的密切圆具有二阶接触。设 $y=f(x)$ 是给定曲线 C 的方程。要求该圆同曲线在三个重合点相交，就能得到 a,b,R 的正确值。除方程 (32) 外，还得到

$$x-a+(y-b)y'=0, \qquad 1+y'^2+(y-b)y''=0. \tag{33}$$

由方程 (33) 求得的 a,b，恰好是曲率中心的坐标（§205）；所以密切圆同曲率圆重合。由于一般情形下接触阶数为二，由此可知，一条平面曲线的曲率圆一般在切点处穿过该曲线。

以上结果也都可以事先预见。曲率中心的坐标只依赖于 x,y,y',y''，所以任意两条具有二阶接触的曲线有同一个曲率中心。而密切圆的曲率中心显然就是这个圆自身的圆心；所以曲率圆必与密切圆重合。另一方面，考察两个彼此邻近的曲率圆。它们的半径之差等于两圆心之间的渐屈线弧长，因而大于两圆心之间的直线距离；所以其中一个圆必完全位于另一个圆之内。若这两个圆在接触点附近都完全位于曲线 C 的同一侧，这是不可能发生的。因此，它们穿过曲线 C。

不过，在任一平面曲线上，一般总有若干点，密切圆在这些点不穿过曲线；事实上，这一例外本身具有典型意义。给定一条依赖于 $n+1$ 个参数的曲线 C'，在方程 (30) 的 $n+1$ 个方程之外，还可以加入新方程

$$\mathcal{F}^{(n+1)}(t_0)=0,$$

只须把 t_0 也看作一个未知量，并同各参数 $a,b,c,\ldots,l$ 一起确定。由此可知，在任一平面曲线 C 上，一般有若干点，使它同密切曲线 C' 的接触阶数为 $n+1$。例如，通常存在切线具有二阶接触的点；这些点就是 $y''=0$ 的拐点。为了求密切圆具有三阶接触的点，应把方程 (33) 中最后一个方程再求一次导数，得到

$$3y'y''+(y-b)y'''=0.$$

消去 $y-b$，最终得到

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0. \tag{34}$$

满足这个条件的点，正是 $dR/dx=0$ 的点，也就是曲率半径取极大值或极小值的点。例如，在椭圆上，这些点是各顶点；在摆线上，它们是切线平行于基线的点。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

214.　作为极限曲线的密切曲线

显然，密切曲线可以看成如下曲线 C' 的极限位置：C' 与固定曲线 C 在 C 的一个固定点 A 附近相交于 $n+1$ 个点，而 A 是这些交点中每一个的极限位置。为明确起见，考察一个依赖于三个参数 a,b,c 的曲线族，并令

$$t_0+h_1,\qquad t_0+h_2,\qquad t_0+h_3$$

是接近 t_0 的三个参数值。同曲线 C 在相应三点相交的曲线 C'，由三个方程

$$\mathcal{F}(t_0+h_1)=0,\qquad \mathcal{F}(t_0+h_2)=0,\qquad \mathcal{F}(t_0+h_3)=0 \tag{35}$$

确定。从后两个方程分别减去第一个方程，并对所得两个差应用中值公式，便得到等价方程组

$$\mathcal{F}(t_0+h_1)=0,\qquad \mathcal{F}'(t_0+k_1)=0,\qquad \mathcal{F}'(t_0+k_2)=0, \tag{36}$$

其中 k_1 位于 h_1,h_2 之间，k_2 位于 h_1,h_3 之间。再从第三个方程减去第二个方程，并应用中值公式，得到同前两个方程组等价的第三个方程组：

$$\mathcal{F}(t_0+h_1)=0,\qquad \mathcal{F}'(t_0+k_1)=0,\qquad \mathcal{F}''(t_0+l_1)=0, \tag{37}$$

其中 l_1 位于 k_1,k_2 之间。当 h_1,h_2,h_3 都趋近于零时，k_1,k_2,l_1 也都趋近于零，以上方程在极限中化为

$$\mathcal{F}(t_0)=0,\qquad \mathcal{F}'(t_0)=0,\qquad \mathcal{F}''(t_0)=0;$$

这恰好就是确定密切曲线的方程。对于任意数目的参数，同一论证仍然成立。事实上，还可以把密切曲线定义为如下曲线 C' 的极限位置：C' 在 p 个点同 C 相切，并在另外 q 个点同 C 相交，其中

$$2p+q=n+1,$$

而这 $p+q$ 个点全都趋于重合。

例如，密切圆是一族圆的极限位置，其中每个圆都同给定曲线 C 相交于三个相邻点。它也可以看成一族圆的极限位置，其中每个圆同 C 相切，并且还在另一个点同 C 相交，而该点到切点的距离是无穷小量。后一个性质很容易验证，下面略加考察。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

把曲线 C 上的给定点取作原点，把该点处的切线取作 x 轴，并把沿法线指向曲率中心的方向取作 y 轴正向。在原点，$y'=0$，所以 $R=1/y''$。由 Taylor 公式，

$$y=x^2\left(\frac{1}{2R}+\varepsilon\right),$$

其中 ε 随 x 趋近于零。因此，当点 M 趋近于原点时，R 是表达式

$$\frac{x^2}{2y}=\frac{OP^2}{2MP}$$

的极限。另一方面，设 R_1 是圆 C_1 的半径；圆 C_1 在原点同 x 轴相切，并且通过点 M。于是

$$OP^2=Mm^2=MP(2R_1-MP),$$

或者

$$\frac{OP^2}{2MP}=R_1-\frac{MP}{2}.$$

所以，半径 R_1 的极限确实等于曲率半径 R。

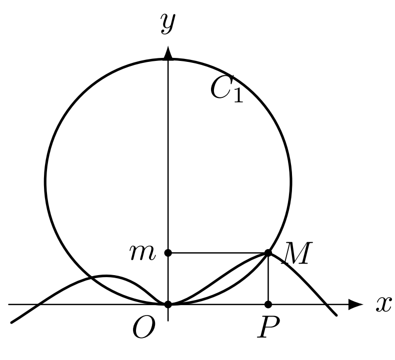


图 47

习题

1. 应用一般公式，求椭圆、双曲线和抛物线的渐屈线。

2. 证明：圆锥曲线的曲率半径，同法线在曲线与一条对称轴之间所截线段的立方成正比。

3. 证明：抛物线的曲率半径，等于法线在曲线与准线之间所截线段的二倍。

4. 设 F, F' 是一椭圆的两个焦点，M 是椭圆上一点，MN 是该点处的法线，N 是这条法线同椭圆长轴的交点。在 N 处作 MN 的垂线 NK，同 MF 相交于 K；再在 K 处作 MF 的垂线 KO，同 MN 相交于 O。证明：O 是椭圆在点 M 处的曲率中心。

5. 在长轴的端点处，前一构造退化。设 AOA' 是椭圆的长轴，BOB' 是短轴。在 OA, OB 上作矩形 $OAEB$。从 E 向 AB 作垂线，它同长轴、短轴分别相交于 C, D。证明：C, D 分别是椭圆在点 A, B 处的曲率中心。

6. 证明：对数螺线

$$\rho = ae^{m\omega}$$

的渐屈线，是一条同原螺线全等的螺线。

7. 一个圆沿另一固定圆无滑动地滚动时，其圆周上任一点所描述的轨迹称为外摆线或内摆线。证明：任一这样的曲线的渐屈线，仍是同一类曲线。

8. 设 AB 是一条不含奇点和拐点的曲线弧。在这段弧的每一点 m，沿该点的法线向两个方向各量取一个给定的常长 l；设所得两线段的端点为 m_1, m_2。当 m 描述弧 AB 时，点 m_1, m_2 分别描述两条对应弧 A_1B_1, A_2B_2。推导公式

$$S_1 = S - l\theta, \qquad S_2 = S + l\theta,$$

其中 S, S_1, S_2 分别是弧 AB, A_1B_1, A_2B_2 的长度，θ 是点 A, B 处两条法线之间的角。假定弧 A_1B_1 同渐屈线位于 AB 的同一侧，并且不与渐屈线相交。〔巴黎 Licence 考试，1879 年 7 月。〕

9. 求一条曲线，使任一点 M 处的曲率半径 ρ 与从曲线上任一固定点 A 起算的弧长 $s = AM$ 满足

$$as = \rho^2 + a^2,$$

其中 a 是给定的常长度。〔巴黎 Licence 考试，1883 年 7 月。〕

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

10. 设 C 是一条在 O 处有二重点的给定三次曲线。直角 MON 绕点 O 转动，它的两边同曲线 C 相交于两个动点 M, N。求直线 MN 的包络。特别地，分别对曲线

$$\lambda y^2 = x^3, \qquad x^3 + y^3 = \mu xy$$

解此问题。〔Bordeaux Licence 考试，1885 年 7 月。〕

11. 求曲线

$$x = a(n\omega - \sin\omega), \qquad y = a(n - \cos\omega)$$

上同密切圆具有高于二阶接触的各点。〔Grenoble Licence 考试，1885 年 7 月。〕

12. 设 m, m_1, m_2 是平面曲线上的三个相邻点。由这三点处的切线所成三角形的外接圆半径，在三点趋于重合时趋近于什么极限?

13. 证明：若一条无拐点平面曲线的渐屈线是一条闭曲线，则该渐屈线的全长，等于原曲线各曲率半径极大值之和与各曲率半径极小值之和的差的二倍。

14. 在曲线的每一点，作一条同法线成定角的定长线段。证明：这些线段端点的轨迹是一条曲线，而这条曲线的法线通过原曲线相应点处的曲率中心。

15. 设 r 是从一个固定极点到平面曲线上任一点的径矢长度，p 是该极点到曲线切线的垂距。推导公式

$$R = \pm r\frac{dr}{dp},$$

其中 R 是曲率半径。

16. 证明：在一个固定点同一条给定曲线具有二阶接触的所有抛物线，其焦点的轨迹是一个圆。

17. 求所有椭圆的中心轨迹，其中各椭圆的轴具有固定方向，并且都在一个固定点同一条给定曲线具有二阶接触。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 11 章

空间曲线

I. 密切平面

215. 定义与方程

设 MT 是给定空间曲线 Γ 在一点 M 处的切线。过 MT 以及 Γ 上靠近 M 的一点 M' 作一平面；一般说来，当点 M' 趋近于点 M 时，这个平面趋近于一个极限位置。若确有这样的极限位置，就把它称为曲线 Γ 在点 M 处的*密切平面*。下面求它的方程。

设

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t), \qquad z = \psi(t) \tag{1}$$

是曲线 Γ 以参数 t 表示的方程，又设 t 与 $t+h$ 分别是对应于点 M 与 M' 的参数值。于是平面 MTM' 的方程为

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

其中系数 A, B, C 必须满足两个关系

$$Af'(t) + B\phi'(t) + C\psi'(t) = 0, \tag{2}$$

$$A[f(t+h) - f(t)] + B[\phi(t+h) - \phi(t)] + C[\psi(t+h) - \psi(t)] = 0. \tag{3}$$

把 $f(t+h), \phi(t+h), \psi(t+h)$ 按 Taylor 公式展开，方程 (3) 变为

$$A\left\{hf'(t) + \frac{h^2}{1\cdot 2}[f''(t) + \varepsilon_1]\right\} + B\left\{h\phi'(t) + \frac{h^2}{1\cdot 2}[\phi''(t) + \varepsilon_2]\right\}$$
$$+ C\left\{h\psi'(t) + \frac{h^2}{1\cdot 2}[\psi''(t) + \varepsilon_3]\right\} = 0,$$

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 随 h 一同趋近于零。把方程 (2) 乘以 h 后相减，再除以 $h^2/2$，便得到一个与 (2)、(3) 等价的方程组：

$$Af'(t) + B\phi'(t) + C\psi'(t) = 0,$$

$$A[f''(t) + \varepsilon_1] + B[\phi''(t) + \varepsilon_2] + C[\psi''(t) + \varepsilon_3] = 0.$$

当 h 趋近于零时，第二个方程在极限中变为

$$Af''(t) + B\phi''(t) + C\psi''(t) = 0. \tag{4}$$

因此，密切平面的方程是

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0, \tag{5}$$

其中 A, B, C 满足

$$\begin{cases} A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \\ A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0. \end{cases} \tag{6}$$

从 (5) 与 (6) 中消去 A, B, C，还可把密切平面的方程写成

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

在所有通过切线的平面中，密切平面是在切点附近同曲线最为接近的一个。为了说明这一点，任取另一个通过该切线的平面，并把方程 (5) 暂且看作这个新切平面的方程。将 X, Y, Z 分别换成 $f(t+h), \phi(t+h), \psi(t+h)$；把基点参数 t 固定以后，所得左端是增量 h 的函数，记为 $F(h)$。于是

$$F(h) = \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left\{A[f''(t) + \eta_1] + B[\phi''(t) + \eta_2] + C[\psi''(t) + \eta_3]\right\},$$

其中各 η_i 随 h 一同趋近于零。若平面方程的法向量 (A, B, C) 未作单位化，那么点到平面的有向距离与 $F(h)$ 只差固定非零因子 $1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$；因此，Γ 上靠近 M 的另一点 M' 到这个平面的距离是二阶无穷小量。又因为对于充分小的一切 h，$F(h)$ 保持同一符号，所以曲线在切点附近完全位于所考察切平面的同一侧。

然而，对密切平面说来，这些结论并不成立。对于这个平面，有

$$Af'' + B\phi'' + C\psi'' = 0;$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所以必须把 Γ 上一点的坐标展开到三阶项。这样得到

$$F(h)=\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(A\frac{d^3x}{dt^3}+B\frac{d^3y}{dt^3}+C\frac{d^3z}{dt^3}+\eta\right).$$

由此可知，Γ 上一点到密切平面的有向距离是三阶无穷小量（通常的非负距离取其绝对值）；又因为 $F(h)$ 随 h 改变符号，空间曲线在其与密切平面的公共点处穿过这个平面。这些性质把密切平面同其他切平面鲜明地区分开来。

216. 驻定密切平面

如果密切平面的系数 A, B, C 满足关系

$$A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z=0, \tag{7}$$

那么上一节所得的结论便不再成立。此时必须把坐标的展开推进到四阶项，并得到形如

$$F(h)=\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(A\frac{d^4x}{dt^4}+B\frac{d^4y}{dt^4}+C\frac{d^4z}{dt^4}+\eta\right)$$

的关系。在 Γ 上任何满足 (7) 的点，都说密切平面在该点是*驻定的*。如果

$$A\,d^4x+B\,d^4y+C\,d^4z$$

不再等于零——一般情形确是如此——那么 $F(h)$ 不随 h 改变符号，曲线也不穿过它的密切平面。此外，在这样的点，曲线上一点到密切平面的距离是四阶无穷小量。如果在同一点还满足

$$A\,d^4x+B\,d^4y+C\,d^4z=0,$$

那么必须把展开推进到五阶项，依此类推。

> **中译者校记（现代重排本误排）。**现代 LaTeX 重排本此处误写成“$F(h)$ 随 h 改变符号”，但前式的首项含 h^4，而紧随其后的结论又明确说曲线不穿过密切平面。故应为“不随 h 改变符号”。

从方程 (6) 与 (7) 中消去 A, B, C，得到方程

$$\Delta=\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\\ d^3x & d^3y & d^3z\end{vmatrix}=0, \tag{8}$$

它的根就是参数 t 的那些值，这些值对应于 Γ 上密切平面驻定的点；但这些根未必存在。例如，螺距非零的圆螺线的行列式 Δ 恒不为零，因而没有驻定密切平面。

> **中译者校记（底本原误）**。原书在这里说“通常任何空间曲线上都有这类点”，这并非一般定理；$\Delta = 0$ 是否有根取决于具体曲线。

这促使我们问：是否存在一条曲线，使它的每一个密切平面都是驻定的？设 x, y, z 是单一变量 t 的三个函数，它们连同直到三阶的全部导数都连续；现在试求在 t 的两个界限 a, b 之间，对一切 t 都满足方程 (8) 的所有可能函数组。

先假定 Δ 中对应于第三行各元素的余子式至少有一个在区间 (a, b) 内不为零，例如

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x \neq 0.$$

两个方程

$$\begin{cases} dz = C_1\,dx + C_2\,dy, \\ d^2z = C_1\,d^2x + C_2\,d^2y, \end{cases} \tag{9}$$

与 (6) 等价，并在区间 (a, b) 内把 C_1, C_2 确定为 t 的连续函数。由于 $\Delta = 0$，这些函数还满足

$$d^3z = C_1\,d^3x + C_2\,d^3y. \tag{10}$$

分别对方程 (9) 求微分，并利用 (10)，得到

$$dC_1\,dx + dC_2\,dy = 0, \qquad dC_1\,d^2x + dC_2\,d^2y = 0.$$

因而 $dC_1 = dC_2 = 0$。所以 C_1, C_2 是常数；对 (9) 的第一个方程积分一次，便得到

$$z = C_1x + C_2y + C_3,$$

其中 C_3 是另一常数。于是曲线 Γ 是一条平面曲线。

如果行列式 $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ 在 a, b 之间参数 t 的某个值 c 处为零，上面的证明在该点失效，因为系数 C_1, C_2 在该点可能成为无穷大或不定。为说清楚这个过渡情形，先假定该行列式在区间 (a, b) 内除 $t = c$ 外不再为零，并且另一个同类行列式，例如

$$dx\,d^2z - dz\,d^2x,$$

在 $t = c$ 时不为零。前面的论证说明，与 $a < t < c$ 相应的曲线点都位于某一平面 P 内，而与 $c < t < b$ 相应的点都位于某一平面 Q 内。又因为第二个行列式

在 $t=c$ 时不为零，可取一个充分小的正数 h，使它在整个区间 $(c-h,c+h)$ 内都不为零；于是与这个区间相应的全部曲线点又位于某一平面 R 内。平面 R 分别同 P,Q 有无穷多个公共点，所以三个平面必定重合。

类似的推理说明，Γ 的全部点都位于同一个平面内，除非三个行列式

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x,\qquad dx\,d^2z-dz\,d^2x,\qquad dy\,d^2z-dz\,d^2y$$

在区间内同一点同时为零。若发生这种情形，曲线可能由若干位于不同平面内的部分组成，而各部分的接合点正是密切平面不定的点。[1]如果上述三个行列式在某一区间内恒等于零，那么曲线是一条直线，或者由若干段直线组成。例如，若 dx/dt 不为零，可以写成

$$\frac{d^2y\,dx-dy\,d^2x}{(dx)^2}=d\left(\frac{dy}{dx}\right),\qquad \frac{d^2z\,dx-dz\,d^2x}{(dx)^2}=d\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

从而

$$dy=C_1\,dx,\qquad dz=C_2\,dx,$$

最后得到

$$y=C_1x+C_2,\qquad z=C_3x+C_4.$$

这是一条直线。

217.　驻定切线

上一节提示我们研究空间曲线上此前尚未定义的一类点，即切向量与其导向量平行的点。原书用比例记号写成

$$\frac{d^2x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}=\frac{d^2z}{dz}. \tag{11}$$

这里的等式应按比例意义理解；不含除法、因而在某些分量为零时仍有效的等价条件是

$$dy\,d^2z-dz\,d^2y=0,\qquad dz\,d^2x-dx\,d^2z=0,\qquad dx\,d^2y-dy\,d^2x=0.$$

也就是说，若以 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 表示曲线，则 $\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)=0$。在这样的点，切线称为*驻定切线*。利用点到直线距离的公式很容易证明：Γ 上一点到

[1]这个奇异情形似乎首先由 Peano 注意到。显然，它只在纯分析的观点下才有意义。——原书注

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

邻近点处切线的距离，一般是二阶无穷小量；但对于驻定切线，它是三阶无穷小量。如果给定曲线 Γ 是平面曲线，那么驻定切线就是拐点处的切线。上一节的结果说明，切线处处驻定的唯一曲线是直线。

在切线驻定的点，有 $\Delta = 0$，密切平面的方程因而成为不定的。不过，一般说来，这个不定性可以消去。回到 §215 开头的计算，把点 M' 的坐标展开到三阶项；利用 (11)，容易看出，过 M' 和 M 处切线的平面方程可写成

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \phi'(t) & \psi'(t) \\ f'''(t)+\varepsilon_1 & \phi'''(t)+\varepsilon_2 & \psi'''(t)+\varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0,$$

其中各 ε_i 随 h 一同趋近于零。于是这个平面趋近于一个完全确定的极限位置；密切平面的方程，只须把 (6) 中第二个方程换成

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = 0$$

即可得到。

如果点 M 的坐标还满足（同样按比例意义理解）

$$\frac{d^3x}{dx} = \frac{d^3y}{dy} = \frac{d^3z}{dz},$$

那么应把 (6) 中第二个方程换成

$$A\,d^qx + B\,d^qy + C\,d^qz = 0,$$

其中 q 是使这个方程同

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

不再相同的最小整数。这个陈述的证明，以及曲线相对于其密切平面的行为的考察，留给读者。

通常，含三阶微分的方程已经足够，而且系数 A, B, C 不满足

$$A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z = 0.$$

在这种情形下，曲线穿过除密切平面以外的每一个切平面。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

218. 特殊曲线

考察满足形如

$$x\,dy - y\,dx = K\,dz \tag{12}$$

关系的空间曲线 Γ，其中 K 是给定常数。由 (12) 立即得到

$$\begin{cases} x\,d^2y - y\,d^2x = K\,d^2z, \\ x\,d^3y - y\,d^3x + dx\,d^2y - dy\,d^2x = K\,d^3z. \end{cases} \tag{13}$$

试求 Γ 的一个通过空间给定点 (a, b, c) 的密切平面。切点的坐标 (x, y, z) 必须满足

$$\begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

利用 (12) 与 (13)，这个方程可以写成

$$ay - bx + K(c - z) = 0. \tag{14}$$

因此，可能的切点就是 Γ 与平面 (14) 的交点；该平面通过点 (a, b, c)。

先设 $K \neq 0$，再把 dz, d^2z, d^3z 换成由 (12)、(13) 给出的值。给出密切平面驻定点的方程 $\Delta = 0$ 便化为

$$\Delta = \frac{1}{K}\left(dx\,d^2y - dy\,d^2x\right)^2 = 0.$$

所以在同一些点还有

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{y\,dx - x\,dy} = \frac{d^2z}{dz},$$

这说明：在密切平面驻定的每一点，切线也驻定。

写出满足 (12) 的空间曲线方程很容易。例如，代入

$$x = At^m, \qquad y = Bt^n, \qquad z = Ct^{m+n}$$

可知，这些常数必须满足

$$AB(n - m) = KC(m + n).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

凡满足这一关系的 A, B, C, m, n 都给出这类曲线。最简单的例子是空间三次曲线

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3$$

（此时 $K = 1/3$），以及空间四次曲线

$$x = t, \qquad y = t^3, \qquad z = t^4$$

（此时 $K = 1/2$）。更一般地，圆柱螺线

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = ct$$

满足 (12) 的充要条件是 $Kc = a^2$。

> **中译者校记（底本原误）**。1904 年英译本与现代重排本在本段把 A, B, C, m, n 说成任意常数，又把螺线写成 $z = Kt$；直接代入可见二者都漏掉了上述相容条件。若坚持写 $z = Kt$，则还必须有 $K^2 = a^2$。

为了求出满足 (12) 的全部曲线，把该方程写成

$$d(xy - Kz) = 2y\,dx.$$

若令

$$x = f(t), \qquad xy - Kz = \phi(t),$$

上式便化为

$$2yf'(t) = \phi'(t).$$

解出 x, y, z，得到 Γ 的一般方程

$$x = f(t), \qquad y = \frac{\phi'(t)}{2f'(t)}, \qquad Kz = \frac{f(t)\phi'(t)}{2f'(t)} - \phi(t). \tag{15}$$

这里假定 $K \neq 0$，并在所考察的局部区间内假定 $f'(t) \neq 0$；$f(t)$ 与 $\phi(t)$ 是参数 t 的任意函数。不过显然，在不失一般性的条件下，可以任意指定其中一个函数；事实上，可以令 $f(t) = t$，因为这只不过是把 $f(t)$ 选作新的参数。若 $K = 0$，则在 $x \neq 0$ 的局部区间上

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0,$$

所以 $y = \lambda x$，曲线位于一个通过 z 轴的固定平面内，而 z 仍可任意变化。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

II. 曲面族的包络

在研究空间曲线的曲率之前，先讨论曲面包络理论。

219. 单参数族

设 S 是单参数曲面族

$$f(x, y, z, a) = 0 \tag{16}$$

中的一个曲面，其中 a 是可变参数。如果存在一个曲面 E，它沿着一条曲线 C 同曲面族中的每一个曲面 S 相切，那么 E 称为曲面族 (16) 的*包络*，而两曲面 S, E 的切触曲线 C 称为*特征曲线*。

为了判断包络是否存在，需要查明：能否在每一个曲面 S 上找到一条曲线 C，使所有这些曲线的轨迹沿着相应曲线 C 与每一个曲面 S 相切。设 (x, y, z) 是一条特征曲线上一点 M 的坐标。如果 M 不是 S 的奇点，那么 S 在 M 处的切平面为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

当点在曲面 E 上运动时，x, y, z, a 都是表示点在 E 上位置的两个自变量的函数，并且这些函数满足 (16)。所以它们的微分满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial a}\,da = 0. \tag{17}$$

再者，E 的切平面同 S 的切平面重合的充要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0;$$

或者，由 (17)，

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0. \tag{18}$$

反过来，正如平面曲线的 §201 一样，从 (16) 与 (18) 中消去参数 a 所得的方程 $R(x, y, z) = 0$，表示一个或若干个在解析意义上彼此不同的曲面；每一个这样的曲面，或者是曲面族 S 的包络，或者是 S 的奇点轨迹，或者是二者的组合。最后，也同一理论中一样，对于 a 的每个固定值，由方程 (16) 与 (18) 所表示的特征曲线，是 S 与同族邻近曲面的交线的极限位置。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

220. 双参数族

设 S 是双参数曲面族

$$f(x,y,z,a,b)=0 \tag{19}$$

中的任一曲面，其中 a,b 是可变参数。一般说来，并不存在一个单一曲面，能沿着一条曲线同这个曲面族的每一个成员相切。事实上，任意指定 a,b 之间的一个关系 $b=\Phi(a)$，便把曲面族 (19) 化为单参数族。方程 (19)、方程 $b=\Phi(a)$，以及方程

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\Phi'(a)=0 \tag{20}$$

表示这个单参数族的包络；或者，对 a 的每个固定值，它们表示相应曲面 S 上的特征曲线。一般说来，这条特征曲线依赖于 $\Phi'(a)$；随着 $\Phi(a)$ 的指定方式不同，每一个曲面 S 上便有无穷多条特征曲线。所以，当 a,b 任意变化时，全部特征曲线的总体一般并不组成一个曲面。

现在试问，是否存在一个曲面 E，它只在一个或若干个点同曲面族 (19) 的每一个曲面相切，而不是沿一条曲线相切。如果这样的曲面存在，曲面 S 与包络 E 的切点坐标 (x,y,z) 就是两个参数 a,b 的函数，并满足 (19)；所以它们的微分满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}\,dz+\frac{\partial f}{\partial a}\,da+\frac{\partial f}{\partial b}\,db=0. \tag{21}$$

再者，为使切点轨迹所成的曲面同 S 相切，还必须有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}\,dz=0.$$

由于 a,b 是相互独立的变量，方程 (21) 推出

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial b}=0. \tag{22}$$

因此，若包络存在，其方程由 (19) 与 (22) 中消去 a,b 而得到。只要三个方程

$$f_x=f_y=f_z=0$$

不在 (x,y,z) 处同时成立，所得曲面便在该点同 S 相切；所以最后得到的曲面或者是包络，或者是 S 的奇点轨迹。

由此可见，按给定曲面族所含参数的数目不同，包络有两种类型。球面的全部切平面组成一个双参数族，每个平面只在一点同球面相切。另一方面，圆锥面或圆柱面的全部切平面组成一个单参数族，每个成员都沿着一整条母线同曲面相切。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

221. 可展曲面

任一单参数平面族的包络，称为*可展曲面*。设

$$z = ax + yf(a) + \phi(a) \tag{23}$$

是动平面 P 的方程，其中 a 是参数，而 $f(a), \phi(a)$ 是 a 的任意两个函数。于是 (23) 与

$$x + yf'(a) + \phi'(a) = 0 \tag{24}$$

表示这个平面族的包络；或者，对给定的 a 值，它们表示相应平面上的特征曲线。这两个方程表示一条直线；因此每一条特征曲线都是一条直线 G，而可展曲面是一张*直纹曲面*。

下面证明，所有直线 G 都与同一条空间曲线相切。对 (24) 关于 a 求导，得到

$$yf''(a) + \phi''(a) = 0, \tag{25}$$

它在 G 上确定一个特殊点 M。我们要证明，G 正是在 M 处与点 M 随 a 变化所描出的空间曲线 Γ 相切。Γ 的方程恰是 (23)、(24) 与 (25)。若有需要，可以由这三个方程求出 x, y, z 作为参数 a 的函数。对前两个方程求微分，并利用第三个方程，得到

$$dz = a\,dx + f(a)\,dy, \qquad dx + f'(a)\,dy = 0, \tag{26}$$

它们说明 Γ 的切线平行于 G。由于这两条直线又有一个公共点，所以它们重合。

曲线 Γ 的密切平面就是平面 P 本身。为了证明这一点，只须说明 x, y, z 关于 a 的一阶、二阶微分满足

$$dz = a\,dx + f(a)\,dy, \qquad d^2z = a\,d^2x + f(a)\,d^2y.$$

第一式正是 (26) 的第一式。再对它关于 a 求一次微分，得到

$$d^2z = a\,d^2x + f(a)\,d^2y + [dx + f'(a)\,dy]da,$$

利用 (26) 的第二式，便化为所需的第二个方程。因此，任一非退化可展曲面都可以定义为某一空间曲线 Γ 的全部切线的轨迹。在特殊情形中，回归边可能退化为一个有限点或一个无穷远点；相应曲面分别是圆锥面或圆柱面。由 (25) 可见：若 $f''(a) \neq 0$，有限的特殊点由 $y = -\phi''(a)/f''(a)$ 给出；若 $f''(a) = 0$ 而 $\phi''(a) \neq 0$，则没有有限解，应把相应点理解为无穷远点；若二者同时为零，还需另行考察更高阶退化。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

> **中译者校记（底本原误）。**原书把圆锥面、圆柱面的两种退化情形笼统归结为 $f''(a)=0$，并不准确。上面的分类直接来自方程 (25)；圆锥情形还要求动平面全都通过同一个有限点。

反过来，任一空间曲线 Γ 的全部切线的轨迹都是可展曲面。设

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t),\qquad z=\psi(t)$$

是任一空间曲线的方程。它的密切平面

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

组成一个单参数族，其包络由这个方程以及

$$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=0$$

共同给出。对 t 的每个固定值，同样这两个方程表示相应密切平面内的特征曲线。我们要证明，这条特征曲线恰好就是 Γ 在相应点处的切线。只须证明

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,\qquad dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0.$$

第一式就是 (6) 的第一个方程；第二式由第一式求微分，再利用 (6) 的第二个方程得到。因此，这条特征曲线平行于切线，并且通过同一点，所以二者重合。

这种构造可展曲面的方法，使曲面的形状一目了然。设 AB 是一条空间曲线弧。在 AB 的每一点 M 作切线，并且每条切线只取朝某一固定方向延伸的一半，例如取从 A 指向 B 的方向。这些半直线组成可展曲面的一叶 S_1；它的三条边界是弧 AB 以及 A,B 两点处的切线，并向无穷远延伸。各切线的另一半组成另一叶 S_2；它同 S_1 相似，并沿弧 AB 同 S_1 接合。对于位于两叶上方的观察者，这两叶看起来会有一部分彼此覆盖。任取一个通过 AB 上一点 O、但不与 Γ 相切的平面；该平面同两叶相交所得的两支曲线，在 O 处有一个尖点。空间曲线 Γ 常称为这个可展曲面的*回归边*。[2]

这个结论也可以直接验证。取 O 为原点，把上述截平面取作 xy 平面，把 Γ 的切线取作 z 轴，把密切平面取作 xz 平面。假定 Γ 上一点的坐标 x,y 可以按自变量 z 的幂展开，那么 Γ 的方程具有形式

$$x=a_2z^2+a_3z^3+\cdots,\qquad y=b_3z^3+\cdots,$$

[2]英文术语 “edge of regression” 并未提示这条曲线是尖点的轨迹；法文术语 *arête de rebroussement* 和 *point de rebroussement* 更能表达这一点。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因为在原点必须满足

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dz}=\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

所以曲线上靠近原点的一点处的切线方程为

$$\frac{X-a_2z^2-a_3z^3-\cdots}{2a_2z+\cdots}=\frac{Y-b_3z^3-\cdots}{3b_3z^2+\cdots}=Z-z.$$

令 $Z=0$，切线同截平面的交点坐标 X,Y 的展开分别从 z^2 项与 z^3 项开始；所以原点确是一个尖点。

例。取空间三次曲线

$$x=t,\qquad y=t^2,\qquad z=t^3$$

作为回归边。该曲线的密切平面方程是

$$t^3-3t^2X+3tY-Z=0. \tag{27}$$

要求 (27) 关于 t 有一个二重根，便得到相应可展曲面的方程；这等价于从方程组

$$\begin{cases} t^2-2tX+Y=0,\\ Xt^2-2tY+Z=0\end{cases} \tag{28}$$

中消去 t。结果是

$$(XY-Z)^2-4(X^2-Y)(Y^2-XZ)=0,$$

它说明这个可展曲面是四次曲面。方程 (28) 表示给定三次曲线的切线。

222. 可展曲面的微分方程

如果 $z=F(x,y)$ 是一张可展曲面的方程，那么函数 $F(x,y)$ 满足 Monge–Ampère 方程：

$$s^2-rt=0,$$

其中 r,s,t 仍照常表示 $F(x,y)$ 的三个二阶偏导数。

事实上，给定曲面的切平面

$$Z=pX+qY+z-px-qy$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

必须组成一个单参数族。因此，三个系数 $p, q, z - px - qy$ 中只有一个能够任意变化。特别地，p, q 之间必有一个形如 $f(p, q) = 0$ 的关系。于是雅可比行列式

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2$$

必须恒等于零。

反过来，如果 $F(x, y)$ 满足 $rt - s^2 = 0$，那么 p, q 之间至少有一个关系。若有两个彼此独立的关系，p, q 就都是常数，$F(x, y)$ 必为

$$ax + by + c$$

的形式，而曲面是一个平面。若 p, q 之间只有一个关系，可以写成

$$q = f(p),$$

其中 p 不是常数。又有恒等式

$$y(rt - s^2) = \frac{D(z - px - qy, p)}{D(x, y)}.$$

所以只要 $rt - s^2 = 0$，量 $z - px - qy$ 也是 p 的一个函数，记作 $\psi(p)$。未知函数 $F(x, y)$ 及其偏导数 p, q 因而满足

$$q = f(p), \qquad z - px - yf(p) = \psi(p).$$

分别对第二个方程关于 x, y 求偏导，得到

$$[x + yf'(p) + \psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad [x + yf'(p) + \psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

由于 p 不退化为常数，必有

$$x + yf'(p) + \psi'(p) = 0.$$

因此，曲面的方程由这个方程与

$$z = px + yf(p) + \psi(p)$$

中消去 p 而得到；这正是求以 p 为可变参数的上述平面族包络的过程。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

223.　空间曲线族的包络

一般说来，单参数空间曲线族没有包络。先考察直线族

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{29}$$

其中 a, b, p, q 是可变参数 α 的已知函数。下面求这个族的每一条直线都与同一条空间曲线 Γ 相切的条件。设 $z = \chi(\alpha)$ 是动直线 D 同其包络相切的点 M 的 z 坐标。所求曲线 Γ 由方程 (29) 与 $z = \chi(\alpha)$ 一同表示，而 Γ 的切线方向余弦与下列三个量成比例:

$$a\chi'(\alpha) + a'\chi(\alpha) + p', \qquad b\chi'(\alpha) + b'\chi(\alpha) + q', \qquad \chi'(\alpha).$$

这条切线就是直线 D 本身的充要条件是

$$\frac{dx}{d\alpha} = a\frac{dz}{d\alpha}, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = b\frac{dz}{d\alpha},$$

即

$$a'\chi(\alpha) + p' = 0, \qquad b'\chi(\alpha) + q' = 0.$$

未知函数 $\chi(\alpha)$ 必须同时满足这两个线性方程。若 $(a', b') \neq (0, 0)$，二式相容的充要条件是

$$a'q' - b'p' = 0,$$

并可用任一非零的分母写成

$$\chi(\alpha) = -\frac{p'}{a'} \quad (a' \neq 0), \qquad \text{或} \qquad \chi(\alpha) = -\frac{q'}{b'} \quad (b' \neq 0).$$

若 $a' = b' = 0$，则相容还要求 $p' = q' = 0$；此时动直线在该参数值处局部不动，χ 也不由这两个方程唯一决定。因而，原式 $a'q' - b'p' = 0$ 只有在 $(a', b') \neq (0, 0)$ 的非退化情形下才是充分条件。

上述论证很容易推广。考察由

$$F(x, y, z, a) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, a) = 0 \tag{30}$$

表示的单参数空间曲线族 (C)，其中 a 是可变参数。如果这些曲线中的每一条都与同一条曲线 Γ 相切，那么包络同参数为 a 的曲线 C 相切的点 M 的坐标 (x, y, z)，就是 a 的函数；它们满足 (30)，并且还满足另一个与这两个方程不同

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

的关系。设 dx, dy, dz 是 M 沿 C 位移时的微分。由于沿 C 参数 a 保持不变，这些微分满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz = 0. \end{cases} \tag{31}$$

另一方面，设 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta a$ 是 M 沿 Γ 位移时 x, y, z, a 的微分。它们满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,\delta z + \dfrac{\partial F}{\partial a}\,\delta a = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z + \dfrac{\partial \Phi}{\partial a}\,\delta a = 0. \end{cases} \tag{32}$$

C 与 Γ 相切的充要条件是

$$\frac{dx}{\delta x} = \frac{dy}{\delta y} = \frac{dz}{\delta z},$$

或者，利用 (31)、(32)，

$$\frac{\partial F}{\partial a}\,\delta a = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a}\,\delta a = 0.$$

因此，切点坐标必须满足

$$F = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0. \tag{33}$$

所以，为使曲线族 (30) 有包络，四个方程 (33) 必须对 a 的一切值都相容。反过来，如果对于 a 的一切值，这四个方程在 x, y, z 中都有一个公共解，那么上面的论证说明，该点所描出的曲线同相应的曲线 C 相切，只要 (x, y, z) 不是 C 的奇点。

注。如果曲线 C 是单参数曲面族

$$F(x, y, z, a) = 0$$

的特征曲线，那么方程 (33) 化为三个彼此不同的方程

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0. \tag{34}$$

所以，由这些方程表示的曲线就是特征曲线族的包络。这推广了上面对可展曲面母线所证明的定理。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

单参数直线族的方程常写成

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{35}$$

其中 x_0, y_0, z_0, a, b, c 都是可变参数 α 的函数。以 l 表示 (35) 中各比值的公共值，则直线上任一点的坐标为

$$x=x_0+la, \qquad y=y_0+lb, \qquad z=z_0+lc.$$

问题在于判断：能否用 α 的某个函数代替 l，使动直线始终与点 (x, y, z) 所描出的曲线相切。其必要条件是

$$\frac{dx_0+l\,da}{a}=\frac{dy_0+l\,db}{b}=\frac{dz_0+l\,dc}{c}. \tag{36}$$

以 m 表示这些比值的公共值，并从所得三个线性方程中消去 l, m，便得到条件

$$\begin{vmatrix} dx_0 & dy_0 & dz_0 \\ a & b & c \\ da & db & dc \end{vmatrix}=0. \tag{37}$$

若这个条件成立，方程 (36) 便确定 l，从而也确定包络的方程。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

III. 空间曲线的曲率与挠率

224.　球面示性曲线

在一条给定的空间曲线 Γ 上规定一个确定的运动方向，并设 s 是从某个固定点 A 起算到任一点 M 的弧 AM 的长度；如果从 A 到 M 的方向与所规定的方向相同，就取正号，反之取负号。令 MT 表示 M 点切线的正方向，即与弧长增加相对应的方向。过空间中任一点 O 作平行于这些半射线的直线，便形成一个锥面 S，称为由 Γ 的切线所生成的可展曲面的*导锥*。以 O 为中心作单位球面，并令 γ 为这个球面与导锥的交线。曲线 γ 称为曲线 Γ 的*球面示性曲线*（*spherical indicatrix；旧译"球面标形"*）。

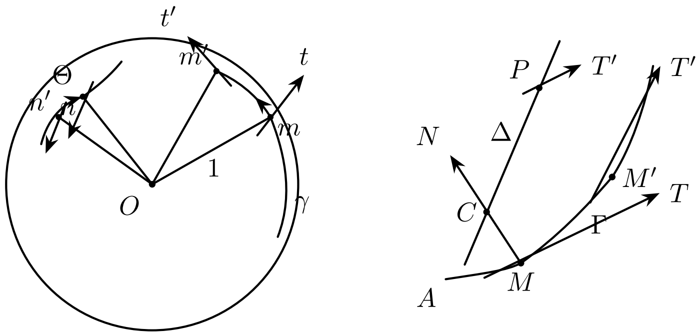


图 48

沿同一个参数值，这两条曲线的点彼此对应：Γ 上一点 M，对应于从 O 作平行于 MT 的射线同球面的交点 m。这里的一一对应是按参数而言；若曲线在不同点具有相同的有向切线，球面示性曲线可能重复经过同一个球面点。当 M 沿正方向描绘 Γ 时，m 沿某个方向描绘 γ；我们把这个方向规定为正方向。于是相应的弧长 s 与 σ 同时增加。

显然，如果移动点 O，整条曲线 γ 也只发生同样的平移；所以可以假定 O 就是坐标原点。同样，如果把 Γ 上的正方向反过来，γ 就被关于 O 对称的曲线所代替；不过应当注意，γ 的切线 mt 的正方向与 Γ 上所取的运动方向无关。

导锥沿母线 Om 的切平面平行于 Γ 在 M 点的密切平面。为证明这一点，设球心 O 位于原点，并令

$$AX + BY + CZ = 0$$

为平面 Omm' 的方程。这个平面平行于 M 与 M' 两点处的两条切线；所以，如果与 M, M' 相应的参数值分别为 $t, t+h$，就必须有

$$Af'(t)+B\phi'(t)+C\psi'(t)=0, \tag{38}$$

$$Af'(t+h)+B\phi'(t+h)+C\psi'(t+h)=0. \tag{39}$$

第二个方程可换成

$$A\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}+B\frac{\phi'(t+h)-\phi'(t)}{h}+C\frac{\psi'(t+h)-\psi'(t)}{h}=0;$$

当 h 趋近于零时，它在极限中变成

$$Af''(t)+B\phi''(t)+C\psi''(t)=0. \tag{40}$$

决定 m 点切平面系数 A, B, C 的方程 (38)、(40)，恰好与决定密切平面系数 A, B, C 的方程 (6) 相同。

225.　曲率半径

设 ω 是 Γ 上两个邻近点 M, M' 处切线正方向 $MT, M'T'$ 之间的角。当 M' 趋近于 M 时，比值

$$\frac{\omega}{\text{arc}\, MM'}$$

的极限，和在平面曲线的情形一样，称为 Γ 在 M 点的*曲率*。曲率的倒数称为*曲率半径*；它是比值 arc MM'/ω 的极限。

曲率半径 R 也可定义为两个无穷小弧 MM' 与 mm' 之比的极限，因为

$$\frac{\text{arc}\, MM'}{\omega}=\frac{\text{arc}\, MM'}{\text{arc}\, mm'}\,\frac{\text{arc}\, mm'}{\text{chord}\, mm'}\,\frac{\text{chord}\, mm'}{\omega},$$

而当 m' 趋近于 m 时，最后两个因子都趋近于 1。弧 $s=\text{arc}\, MM'$ 与 $\sigma=\text{arc}\, mm'$ 同时增大或减小；因此

$$R=\frac{ds}{d\sigma}. \tag{41}$$

设 Γ 的方程为

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t),\qquad z=\psi(t), \tag{42}$$

并以 O 为坐标原点。点 m 的坐标恰好就是 MT 的方向余弦：

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \beta=\frac{dy}{ds},\qquad \gamma=\frac{dz}{ds}.$$

对这些方程求微分，得到

$$d\alpha = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}, \qquad d\beta = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2}, \qquad d\gamma = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2}.$$

由于 $d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2$，展开后有

$$d\sigma^2 = \frac{ds^2 \sum (d^2x)^2 - \left(\sum dx\,d^2x\right)^2}{ds^4},$$

其中和号照例表示把 x 依次换成 x, y, z 所得的三个同类项。利用 Lagrange 恒等式（§131），上式可写成

$$d\sigma^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{ds^4},$$

其中

$$\begin{aligned} A &= dy\,d^2z - dz\,d^2y, \\ B &= dz\,d^2x - dx\,d^2z, \\ C &= dx\,d^2y - dy\,d^2x. \end{aligned} \tag{43}$$

在以下各节中，我们始终采用这些记号。由公式 (41) 得

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{44}$$

显然，R^2 是 $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ 的有理函数。曲率半径本身是无理式，但在本质上是一个正量。这里默认曲线正则且 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$；在曲率为零的点，球面示性曲线不再正则，应把 R 理解为无穷大并另行讨论。

注。若把曲线 Γ 的弧长 s 选作自变量，则函数 $f(s), \phi(s), \psi(s)$ 满足

$$[f'(s)]^2 + [\phi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2 = 1.$$

这时

$$\begin{gathered} \alpha = f'(s), \qquad \beta = \phi'(s), \qquad \gamma = \psi'(s), \\ d\alpha = f''(s)\,ds, \qquad d\beta = \phi''(s)\,ds, \qquad d\gamma = \psi''(s)\,ds, \\ d\sigma^2 = \left([f''(s)]^2 + [\phi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2\right) ds^2, \end{gathered} \tag{45}$$

而曲率半径的表达式取得优美的形式

$$\frac{1}{R} = \sqrt{[f''(s)]^2 + [\phi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2}. \tag{44'}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

226. 主法线；曲率中心

过 M 作一条平行于 γ 在 m 点切线 mt 的直线, 并在这条直线上取与 mt 正方向相对应的方向 MN。这条新直线称为 Γ 在 M 点的*主法线*。它就是位于密切平面内的那条法线，因为 mt 垂直于 Om，而平面 Omt 平行于密切平面。方向 MN 称为主法线的正方向。这个正方向是唯一确定的，因为前面已经指出, mt 的正方向不依赖于在 Γ 上所选的正向。以后还会给出一个不借助球面示性曲线的主法线定义。

从 M 沿 MN 截取一段等于 M 点曲率半径的长度 MC，其端点 C 称为 Γ 在 M 点的*曲率中心*；以 C 为圆心、以 MC 为半径，在密切平面内所作的圆称为*曲率圆*。设 α', β', γ' 是主法线的方向余弦，则曲率中心的坐标 (x_1, y_1, z_1) 为

$$x_1 = x + R\alpha', \qquad y_1 = y + R\beta', \qquad z_1 = z + R\gamma'.$$

另一方面,

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = R\frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3},$$

并且 β', γ' 有类似的公式。因此

$$x_1 = x + R^2\frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3}.$$

R^2 的系数可写成

$$\frac{ds^2 d^2x - dx\sum dx\, d^2x}{ds^4} = \frac{B\, dz - C\, dy}{ds^4},$$

而 y_1, z_1 的值由循环置换得到。于是

$$\begin{cases} x_1 = x + R^2\dfrac{B\, dz - C\, dy}{ds^4}, \\ y_1 = y + R^2\dfrac{C\, dx - A\, dz}{ds^4}, \\ z_1 = z + R^2\dfrac{A\, dy - B\, dx}{ds^4}. \end{cases} \tag{46}$$

这些表达式都是 $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ 的有理函数。

过 M 作垂直于 MN 的平面 Q。这个平面包含切线 MT，并且曲线 Γ 在 M 点不穿过它。为证明这一点，取从 M 起算的弧长 s 为自变量。此时

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而 y, z 有完全类似的关系。因此，Γ 上邻近 M 的一点 M' 的坐标 X, Y, Z 可展开成

$$X = x + \alpha s + \frac{s^2}{2}\left(\frac{\alpha'}{R} + \varepsilon_1\right),$$
$$Y = y + \beta s + \frac{s^2}{2}\left(\frac{\beta'}{R} + \varepsilon_2\right),$$
$$Z = z + \gamma s + \frac{s^2}{2}\left(\frac{\gamma'}{R} + \varepsilon_3\right),$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 都随 s 趋近于零。平面 Q 的方程是

$$\alpha'(X - x) + \beta'(Y - y) + \gamma'(Z - z) = 0.$$

利用

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

把上面的展开代入，左端成为

$$\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \eta\right),$$

其中 $\eta \to 0$。因 $R > 0$，这个量对于一切充分小而不为零的 s 都为正。再把 (X, Y, Z) 换成曲率中心

$$(x + R\alpha',\ y + R\beta',\ z + R\gamma')$$

代入同一方程，所得值为正数 R。所以曲率中心与 Γ 上邻近 M 的各点都位于 Q 的同一侧。

227. 极线；极面

过曲率中心、垂直于密切平面的直线称为极线。这条直线就是 Γ 的法平面族的特征线。事实上，邻近两点 M, M' 处法平面的交线同时垂直于两条切线 $MT, M'T'$，因而垂直于平面 mOm'。当 M' 趋近于 M 时，平面 mOm' 趋近于平行密切平面的位置；所以这条交线趋近于一条垂直于密切平面的直线。

还须证明这条极限直线通过曲率中心。取 s 为自变量，法平面的方程是

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0, \tag{47}$$

而其特征线由方程 (47) 连同

$$\alpha'(X - x) + \beta'(Y - y) + \gamma'(Z - z) - R = 0 \tag{48}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

来确定。后一个方程表示一个通过曲率中心并垂直于主法线的平面；所以这两个平面的交线就是极线。

这些极线形成一个直纹曲面，称为*极面*。这个曲面是可展曲面，因为它是 Γ 的法平面族的包络。如果 Γ 是平面曲线，极面就是一个柱面，它的正截线是 Γ 的渐屈线。

228.　挠率

在曲率的定义中，如果把“切线”换成“密切平面”，就得到密切平面转动快慢的一种度量。设 ω' 是邻近两点 M, M' 处密切平面之间的角。当 M' 趋近于 M 时，$\omega'/\operatorname{arc} MM'$ 的极限称为曲线 Γ 在 M 点的*挠率*，其倒数称为*挠率半径*。

在 M 点垂直于密切平面的直线称为*副法线*。先在它上面选定一个正方向——究竟取哪一个方向，稍后再决定——并设 $\alpha'', \beta'', \gamma''$ 是这个方向的方向余弦。过原点作它的平行线，与单位球面相交于一点 n；当 M 描绘 Γ 时，点 n 描绘一条球面曲线 Θ。同曲率半径的情形一样，挠率半径 T 也可定义为两条相应无穷小弧 MM' 与 nn' 之比的极限。若 τ 是 Θ 的弧长，则

$$T^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2}.$$

点 n 的坐标为

$$\alpha'' = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta'' = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\gamma'' = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

其中三个式子取同一个符号。因此，例如

$$d\alpha'' = \pm\frac{(A^2+B^2+C^2)dA - A(A\,dA + B\,dB + C\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}}.$$

由于 $d\tau^2 = d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2$，Lagrange 恒等式给出

$$d\tau^2 = \frac{\displaystyle\sum_{\text{cyc}}(B\,dC - C\,dB)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

利用

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \qquad dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = 0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

得到

$$\frac{dx}{B\,dC-C\,dB}=\frac{dy}{C\,dA-A\,dC}=\frac{dz}{A\,dB-B\,dA}=\frac{1}{K}. \tag{49}$$

由 (49)，三个循环分子分别等于 $K\,dx, K\,dy, K\,dz$，因而

$$d\tau^2=\frac{K^2\,ds^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

这里的量 K 为

$$\begin{aligned}K&=\frac{1}{dx}\left\{\begin{vmatrix}dz & dx\\ d^2z & d^2x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}\begin{vmatrix}dz & dx\\ d^3z & d^3x\end{vmatrix}\right\}\\ &=\sum_{\text{cyc}}\big(dz\,d^2x\,d^3y-dx\,d^2z\,d^3y\big).\end{aligned}$$

这恰好就是 (8) 中行列式 Δ 的展开式；因此

$$d\tau=\pm\frac{\Delta\,ds}{A^2+B^2+C^2},$$

并且

$$T=\pm\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}. \tag{50}$$

若把 T 看作正量，它的值就是右端的绝对值。不过，既然这个表达式是 $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''$ 的有理函数，给 T 附以符号是自然的。T 的两个符号对应于曲线在 M 附近本质不同的两种形态。由于 T 的符号只依赖于 Δ 的符号，下面就通过 Δ 来区分它们。公式要求 $A^2+B^2+C^2\neq 0$ 且 $\Delta\neq 0$；当 $\Delta=0$ 时，挠率为零，而挠率半径成为无穷大。

中译者校记（现代重排本误排）。现代 LaTeX 重排本在上一句只列到二阶导数，但紧前公式中的行列式 Δ 含有三阶微分；故按公式本身补入 x''', y''', z'''。另外，在本书选定的基本三面体取向下，现代常用的有符号挠率 τ 与本书的有符号挠率半径满足 $\tau=-1/T$；这解释了下文 Frenet 公式同现代教材常见符号的差别。

把三面体 $Oxyz$ 这样放置：一个双脚站在 xy 平面原点 O、头朝 z 轴正向的观察者，看到 x 轴转过 90° 到 y 轴时向自己的左方旋转。选取副法线的正方向，使三面体 MT, MN, MN_b 与 $Oxyz$ 具有同样的取向。若把曲线刚性移动到 M 与 O 重合、MT 与 Ox 重合、MN 与 Oy 重合，那么 MN_b 就与正 z 轴重合。

在这种刚性运动下，挠率半径的绝对值不变，Δ 的符号也不变。以 M 为原点，以 MT 为 x 轴，以 MN 为 y 轴，则原点附近一点的坐标具有形式

$$\begin{cases} x = a_1 t + t^2(a_2 + \varepsilon), \\ y = b_2 t^2 + t^3(b_3 + \varepsilon'), \\ z = t^3(c_3 + \varepsilon''), \end{cases} \tag{51}$$

其中 $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ 随 t 一同趋近于零。可以取 $a_1 > 0, b_2 > 0$；在 $t = 0$ 时，

$$\Delta = 12 a_1 b_2 c_3\, dt^6.$$

所以 Δ 的符号就是 c_3 的符号。若 $c_3 > 0$，则当 $-h < t < 0$ 时 x, z 同为负，而当 $0 < t < h$ 时二者同为正。也就是说，一个双脚位于正主法线上某点 P、面向密切平面的观察者，会看到正参数一侧的弧 MM' 位于自己的左方并在密切平面上方，而负参数一侧的弧 MM'' 位于自己的右方并在密切平面下方（图 49a）。这时称曲线在该点为*左旋的*（*sinistrorsal*）。若 $c_3 < 0$，上述形态完全反转（图 49b），曲线称为*右旋的*（*dextrorsal*）。

这两种形态本质上不同。譬如，在同一个直圆柱面或两个全等的圆柱面上作两条螺距相同的螺线：若二者同为左旋或同为右旋，就可以彼此重合；若一条左旋而另一条右旋，则只能把其中一条同另一条关于某个对称平面的镜像重合。[3]

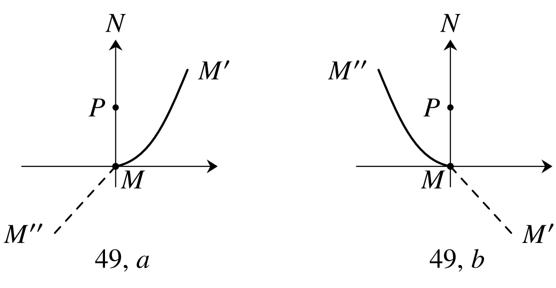


图 49a、49b

根据这些结果，我们以后写成

$$T = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta}, \tag{52}$$

[3]直接证明并不困难：从一组直角坐标轴换到另一组具有相同取向的直角坐标轴时，Δ 不会改变符号。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这样，T 在右旋点为正，在左旋点为负。若对坐标三面体的取向采用相反的约定，符号也随之反转。

229. Frenet 公式

在 Γ 的每一点 M，考察以切线、主法线和副法线为棱的三直角三面体；规定它的取向同固定坐标三面体 $Oxyz$ 相同。主法线的正方向已经确定；切线的正方向可以任意选取，但一经选定，就同时确定了副法线的正方向。三条棱的九个方向余弦分别为

$$(\alpha, \beta, \gamma), \qquad (\alpha', \beta', \gamma'), \qquad (\alpha'', \beta'', \gamma'').$$

这些方向余弦的微分，可以用 R, T 和方向余弦本身非常简洁地表示；相应公式由 Frenet 给出。[4]

前面已经得到

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}. \tag{53}$$

正向副法线的方向余弦同 A, B, C 成比例，可写成

$$\alpha'' = \varepsilon\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\beta'' = \varepsilon\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\gamma'' = \varepsilon\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$。由于三面体 (MT, MN, MN_b) 与 $Oxyz$ 具有相同取向,

$$\alpha' = \beta''\gamma - \beta\gamma'' = \varepsilon\frac{B\gamma - C\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

另一方面，$d\alpha''$ 的公式可写成

$$d\alpha'' = \varepsilon\frac{B(B\,dA - A\,dB) + C(C\,dA - A\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}}.$$

[4]Frenet，*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864, p. 281。美国通常采用与上文相反取向的坐标轴；在那种约定下，下列若干符号会相反。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

利用 (49)、$K = \Delta$ 与 (52)，便有

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \varepsilon\Delta\frac{C\beta - B\gamma}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} = -\alpha'\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2} = \frac{\alpha'}{T}.$$

对 β'', γ'' 作同样计算，得到

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}. \tag{54}$$

[5] 最后，对

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0$$

求微分，并使用 (53)、(54)，得到三个线性方程

$$\alpha'\,d\alpha' + \beta'\,d\beta' + \gamma'\,d\gamma' = 0,$$

$$\alpha\,d\alpha' + \beta\,d\beta' + \gamma\,d\gamma' + \frac{ds}{R} = 0,$$

$$\alpha''\,d\alpha' + \beta''\,d\beta' + \gamma''\,d\gamma' + \frac{ds}{T} = 0.$$

解出 $d\alpha', d\beta', d\gamma'$，得到

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}. \tag{55}$$

方程 (53)、(54)、(55) 称为 *Frenet* 公式。

几何注。公式 (54) 还表明，点 n 所描出的球面曲线 Θ 的切线平行于主法线。这个事实也可直接从几何上验证。设 S 是以 O 为顶点、以切向球面示性曲线 γ 为准线的导锥；又设 S' 是以 O 为顶点、以副法线球面示性曲线 Θ 为准线的锥面。母线 On 垂直于 S 沿 Om 的切平面，所以 S' 是 S 的极锥；这种关系是互反的，因而 Om 也垂直于 S' 沿 On 的切平面。于是，γ 在 m 处的切线 mt 同时垂直于 Om 与 On，故垂直于平面 mOn；同理，Θ 在 n 处的切线 nt' 也垂直于平面 mOn。所以 $mt \parallel nt'$，这正是所要证明的结论。

---

[5]若把挠率公式写成 $1/T = \Delta/(A^2+B^2+C^2)$，那么 (54) 就应写成 $d\alpha''/ds = -\alpha'/T$ 等式；采用美国通常的坐标轴取向时，正是这种形式。——英译者

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

230. 把 x, y, z 展成弧长 s 的幂级数

给定弧长 s 的两个函数 $R = \phi(s)$ 与 $T = \psi(s)$，其中 R 为正，就存在一条空间曲线，其曲率半径与挠率半径恰为这两个给定函数；除去它在空间中的位置以外，这条曲线完全确定。严格证明要留到微分方程理论中；这里仅在假定展开存在的前提下指出这些展开式。

以弧长原点 O 处的切线、主法线和副法线为坐标轴。于是

$$\begin{cases} x = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1\cdot 2}\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\dfrac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \cdots, \\ y = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1\cdot 2}\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\dfrac{d^3y}{ds^3}\right)_0 + \cdots, \\ z = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dz}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1\cdot 2}\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\dfrac{d^3z}{ds^3}\right)_0 + \cdots. \end{cases} \tag{56}$$

现在

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R},$$

再利用 Frenet 公式求微分，得到

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds} - \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right).$$

一般地,

$$\frac{d^nx}{ds^n} = L_n\alpha + M_n\alpha' + P_n\alpha'',$$

其中 L_n, M_n, P_n 是 R, T 及其关于 s 的导数的已知函数。把 $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ 分别换成 (β, β', β'') 与 $(\gamma, \gamma', \gamma'')$，便得到 y, z 的相应公式。

在原点处,

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = \gamma_0 = 0, \quad \alpha'_0 = \gamma'_0 = 0, \quad \beta'_0 = 1, \quad \alpha''_0 = \beta''_0 = 0, \quad \gamma''_0 = 1.$$

所以

$$\begin{cases} x = s - \dfrac{s^3}{6R^2} + \cdots, \\ y = \dfrac{s^2}{2R} - \dfrac{s^3}{6R^2}\dfrac{dR}{ds} + \cdots, \\ z = -\dfrac{s^3}{6RT} + \cdots, \end{cases} \tag{56'}$$

其中省略项的次数更高，而 $R, T, dR/ds, \ldots$ 都应换成它们在 $s = 0$ 时的值。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这些公式给出若干无穷小量的主部。相对于所选副法线正方向，曲线上一点到密切平面的**有向**距离是三阶无穷小量，其主部为 $-s^3/(6RT)$；通常的非负距离，其主部应取绝对值 $|s^3/(6RT)|$。曲线上一点到切线的距离是二阶无穷小量，其主部为 $s^2/(2R)$（参见 §214）。以下比较弦长与弧长时取 $s>0$；若 c 是相应的无穷小弦长，则

$$c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - \frac{s^4}{12R^2} + \cdots\,,$$

因而

$$c = s\left(1 - \frac{s^2}{12R^2} + \cdots\right)^{1/2} = s\left(1 - \frac{s^2}{24R^2} + \cdots\right).$$

所以 $s-c$ 是三阶无穷小量，其主部为 $s^3/(24R^2)$。同样，两条切线沿公垂线的有向分离量是三阶无穷小量，其主部为 $s^3/(12RT)$；因而它们之间的通常最短距离的主部为 $|s^3/(12RT)|$。这个定理由 Bouquet 得到。

231. 渐伸线与渐屈线

如果 Γ 的所有切线都是另一条曲线 Γ_1 的法线，就称 Γ_1 是 Γ 的一条*渐伸线*；反过来，Γ 是 Γ_1 的一条*渐屈线*。给定空间曲线的一切渐伸线都位于以该曲线为回归边的可展曲面上，并且正交地截其母线。

设 (x,y,z) 是 Γ 上一点 M，(α,β,γ) 是 MT 的方向余弦，并令 $l = MM_1$。于是

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad y_1 = y + l\beta, \qquad z_1 = z + l\gamma.$$

求微分，并要求 M_1 所描绘的曲线以 MM_1 为法线，便有

$$\alpha\,dx_1 + \beta\,dy_1 + \gamma\,dz_1 = 0,$$

即

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + dl + l(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = 0.$$

这化为 $ds + dl = 0$。所以空间曲线的渐伸线可用与平面曲线渐伸线相同的作图法得到。

现在还须求一条给定空间曲线的全部渐屈线。为此，按某一连续法则从各点的法线中选出一个单参数族，使这些法线组成一张可展曲面（图 50）；设 D

是这张可展曲面的回归边，也就是其中一条渐屈线。令 ϕ 为法线 MM_1 与主法线 MN 之间的角，并令 $l = MP$，其中 P 是 M_1 在 MN 上的投影。于是

$$\begin{cases} x_1 = x + l\alpha' + l\alpha'' \tan\phi, \\ y_1 = y + l\beta' + l\beta'' \tan\phi, \\ z_1 = z + l\gamma' + l\gamma'' \tan\phi. \end{cases} \tag{57}$$

这些公式可直接由把折线 MPM_1 依次投影到三条坐标轴上看出。

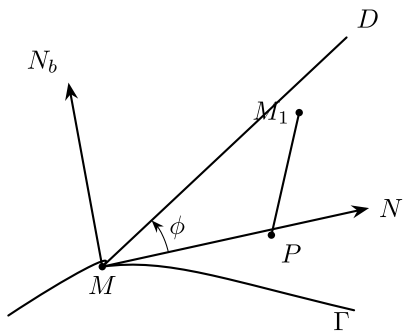


图 50

点 M_1 所描绘曲线的切线必须是 MM_1，即

$$\frac{dx_1}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{y_1 - y} = \frac{dz_1}{z_1 - z}.$$

若以 k 表示这个公共值，则利用 Frenet 公式后，方程 $dx_1 = k(x_1 - x)$ 变成

$$\alpha\, ds\left(1 - \frac{l}{R}\right) + \alpha'\left(dl + l\tan\phi\frac{ds}{T} - kl\right) + \alpha''\left[d(l\tan\phi) - \frac{l\,ds}{T} - kl\tan\phi\right] = 0.$$

把 $\alpha, \alpha', \alpha''$ 换成相应的 β 与 γ，便得到另外两个类似方程。由于这九个方向余弦所成行列式等于 1，这些方程等价于

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{l}{R}\right) ds = 0, \\ dl + l\tan\phi\dfrac{ds}{T} = kl, \\ d(l\tan\phi) - \dfrac{l\,ds}{T} = kl\tan\phi. \end{cases} \tag{58}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

所以 $l=R$：点 P 是曲率中心，而 PM_1 是极线。因此，一条空间曲线的全部渐屈线都位于它的极面上。从后两个方程中消去 k，得到 $ds=T\,d\phi$，因而

$$\phi(s)=\phi_0+\int_0^s \frac{du}{T(u)}. \tag{59}$$

所以，与两条不同渐屈线相切的两条法线相交成一个常角。如果已经知道一族形成可展曲面的法线，那么其余各族都可由下述方法得到：把每一条法线绕它与 Γ 的交点转过同一个固定角。

注 I。 若 Γ 是平面曲线，则 T 为无穷大，公式 (59) 给出 $\phi=\phi_0$。取 $\phi_0=0$，得到通常的平面渐屈线；其他渐屈线则位于以这条渐屈线为正截线的柱面上。这些曲线是螺线，下一节将加以研究。只有在这一情形，曲率中心的轨迹本身才是一条渐屈线。要使 (59) 在 $\phi=0$ 下成立，必须有 $T=\infty$，或者 Δ 恒等于零；因而无论如何，曲线都是平面曲线（参见 §216）。

注 II。 若 D 是 Γ 的一条渐屈线，则 Γ 是 D 的一条渐伸线，并且

$$ds_1=d(MM_1),$$

其中 s_1 是渐屈线的弧长。所以一条给定空间曲线的全部渐屈线都是可求长的。

232. 螺线

设 C 是一条平面曲线。在 C 上一点 m 处作垂直于 C 所在平面的直线，并在其上截取线段 mM，使其长度正比于从一个固定点 A 起算的 C 的弧长 σ。点 M 所描绘的空间曲线称为一条*螺线*。取 C 所在平面为 xy 平面，并设

$$x=f(\sigma), \qquad y=\phi(\sigma)$$

是点 m 的坐标，其中 σ 是 C 的弧长。于是螺线上相应点的坐标为

$$x=f(\sigma), \qquad y=\phi(\sigma), \qquad z=K\sigma, \tag{60}$$

其中 K 是常数。由于 $f'^2+\phi'^2=1$，有

$$ds^2=(1+K^2)d\sigma^2.$$

积分后一般有

$$s=\sigma\sqrt{1+K^2}+H,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 H 是常数；若 s 与 σ 从同一点起算，则 $H=0$，于是 $s=\sigma\sqrt{1+K^2}$。切线的方向余弦为

$$\alpha=\frac{f'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}},\qquad \beta=\frac{\phi'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}},\qquad \gamma=\frac{K}{\sqrt{1+K^2}}. \tag{61}$$

所以切线与 z 轴成常角。反过来，凡是切线与某一固定直线成常角的曲线，都是螺线。事实上，取该固定直线为 z 轴，并把曲线在 xy 平面上的投影写成

$$x=f(\sigma),\qquad y=\phi(\sigma),\qquad z=\psi(\sigma), \tag{62}$$

其中 $f'^2+\phi'^2=1$。这时

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{\psi'(\sigma)}{\sqrt{1+\psi'(\sigma)^2}};$$

所以 γ 为常数，当且仅当 ψ' 为常数，也就是

$$\psi(\sigma)=K\sigma+z_0.$$

由于 γ 是常数，Frenet 公式 $d\gamma/ds=\gamma'/R$ 给出 $\gamma'=0$。所以主法线垂直于柱面的母线；它又垂直于螺线的切线，因而正是柱面的法线。于是密切平面垂直于这个柱面。副法线位于柱面的切平面内，并且垂直于螺线的切线，所以它也与 z 轴成常角。因此 γ'' 是常数。Frenet 公式给出

$$\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}=0,$$

所以对螺线而言，比值 T/R 是常数。等价地，在 R,T 均有限且不为零的区间上，R/T 也是常数；按现代记号 $\kappa=1/R$、$\tau=-1/T$，这就是 τ/κ 为常数的 Lancret 定理。

反过来，设 T/R 是常数。以下逆命题由 J. Bertrand 得到。Frenet 公式给出

$$\frac{d\alpha}{d\alpha''}=\frac{d\beta}{d\beta''}=\frac{d\gamma}{d\gamma''}=\frac{T}{R}=\frac{1}{H},$$

其中 H 是常数。积分得到

$$\alpha''=H\alpha-A,\qquad \beta''=H\beta-B,\qquad \gamma''=H\gamma-C,$$

其中 A,B,C 都是常数。分别乘以 α,β,γ 并相加，得到

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=H,$$

或
$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{H}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$
所以切线与某一固定直线成常角，曲线因而是一条螺线。

由 (53) 与 (61)，
$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{1}{1+K^2} f''(\sigma), \qquad \frac{\beta'}{R} = \frac{1}{1+K^2}\phi''(\sigma).$$
由于 $\gamma' = 0$，
$$\frac{1}{R^2} = \frac{[f''(\sigma)]^2 + [\phi''(\sigma)]^2}{(1+K^2)^2}. \tag{63}$$
所以 $(1+K^2)/R$ 与 K 无关。当 $K=0$ 时，它就是正截线 C 的曲率半径 r 的倒数（参见 §205）；故
$$R = r(1+K^2).$$
最后，若 R, T 都是常数，则曲线必为螺线，而它的正截线具有常曲率。因此正截线是圆，所求曲线就是圆柱面上的圆螺线。这个命题由 Puiseux 给出。[6]

233. Bertrand 曲线

一条平面曲线的主法线，也同时是无穷多条其他平面曲线的主法线；这些曲线就是给定曲线的各条平行曲线。J. Bertrand 研究了空间曲线中的类似问题。设 x, y, z 是 Γ 上一点的坐标，视为弧长 s 的函数。在每条主法线上截取一段长度为 l 的线段，并以 X, Y, Z 表示其端点的坐标；则
$$X = x + l\alpha', \qquad Y = y + l\beta', \qquad Z = z + l\gamma'. \tag{64}$$
由 (X, Y, Z) 描绘的曲线 Γ' 的主法线与 Γ 的主法线重合的充要条件，是以下两个方程同时成立：
$$\alpha'\,dX + \beta'\,dY + \gamma'\,dZ = 0,$$
以及
$$\alpha'(dY\,d^2Z - dZ\,d^2Y) + \beta'(dZ\,d^2X - dX\,d^2Z) + \gamma'(dX\,d^2Y - dY\,d^2X) = 0.$$

[6]这里假定只讨论实曲线，因为证明中用了 $A^2+B^2+C^2 \neq 0$。参见 Lyon 的论文 *Sur les courbes à torsion constante*, 1890。——原书注

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第一个方程给出 $dl=0$，所以 l 是常数。把由 Frenet 公式所得的 $dX, d^2X, \ldots$ 的值代入第二个方程，得到

$$\frac{1}{T}\, d\left(1-\frac{l}{R}\right)=\left(1-\frac{l}{R}\right) d\left(\frac{1}{T}\right).$$

积分后有

$$\frac{l}{R}+\frac{l'}{T}=1, \tag{65}$$

其中 l' 是积分常数。所以，所求曲线恰好就是曲率与挠率之间存在一个线性关系的那些曲线；用现代记号可写成 $\lambda\kappa+\mu\tau=1$。反过来，这个条件也是充分的，而长度 l 由 (65) 给出。这些曲线称为 *Bertrand 曲线*。

一个显著的特殊情形是 R 为常数的情形；Monge 已经解出了这个问题。在 (65) 中取积分常数 $l'=0$，便得到 $l=R$；若 T 不是常数，这一选择事实上是被方程强制的。若 R, T 都是常数（圆螺线情形），还存在其他 Bertrand 对应，但 $l=R$ 仍给出下面这条曲率中心轨迹。由 (64) 定义的曲线 Γ' 此时就是 Γ 的曲率中心的轨迹。令 $l=R$ 为常数，得到

$$dX=-\frac{R}{T}\alpha''\, ds, \qquad dY=-\frac{R}{T}\beta''\, ds, \qquad dZ=-\frac{R}{T}\gamma''\, ds,$$

这表明 Γ' 的切线就是 Γ 的极线。Γ' 的曲率半径 R' 为

$$R'^2=\frac{dX^2+dY^2+dZ^2}{d\alpha''^2+d\beta''^2+d\gamma''^2}=R^2.$$

所以 R' 也是常数，并且等于 R。两条曲线 Γ, Γ' 互为对应：每一条都是另一条的极面的回归边。在圆螺线的情形，很容易直接验证这些断言。

注。容易写出曲率半径为常数的一切空间曲线的一般公式。设 R 是给定常数，又设 α, β, γ 是变量参数的任意三个函数，满足

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

那么

$$X=R\int \alpha\, d\sigma, \qquad Y=R\int \beta\, d\sigma, \qquad Z=R\int \gamma\, d\sigma, \tag{66}$$

其中

$$d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2},$$

表示一条具有所求性质的曲线；而所有这样的曲线都可用这种方式得到。因为 α, β, γ 是这条曲线的方向余弦，σ 是它的球面示性曲线的弧长。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

IV. 空间曲线之间的接触；曲线与曲面之间的接触

234.　两条曲线之间的接触

两条空间曲线的接触阶数，定义方式与平面曲线相同。设 Γ 与 Γ' 是在一点 A 相切的两条曲线。对于 Γ 上靠近 A 的每一点 M，按照某种法则指定 Γ' 上一点 M' 与之对应，使 M 与 M' 同时趋近于 A。我们要研究无穷小量 MM' 相对于主无穷小量——Γ 上的弧 AM——所能达到的最高阶数。如果这个最高阶数是 $n+1$，就说两条曲线具有 n 阶接触。

选取一组直角坐标轴，使 yz 平面不平行于 A 点的公共切线，并把两条曲线的方程写成[7]

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} y = f(x), \\ z = \phi(x), \end{cases} \qquad (\Gamma')\quad \begin{cases} Y = F(x), \\ Z = \Phi(x). \end{cases}$$

若 x_0, y_0, z_0 是点 A 的坐标，则 M 与 M' 的坐标分别为

$$[x_0+h, f(x_0+h), \phi(x_0+h)], \qquad [x_0+k, F(x_0+k), \Phi(x_0+k)],$$

其中 k 是 h 的函数，并且随 h 一同趋近于零。由 §211 可知，可以用 h 代替弧 AM 作为主无穷小量。三个差

$$k-h, \qquad F(x_0+k)-f(x_0+h), \qquad \Phi(x_0+k)-\phi(x_0+h)$$

都必须是阶数不低于 $n+1$ 的无穷小量。因此

$$\begin{aligned} k-h &= \alpha h^{n+1}, \\ F(x_0+k)-f(x_0+h) &= \beta h^{n+1}, \\ \Phi(x_0+k)-\phi(x_0+h) &= \gamma h^{n+1}, \end{aligned}$$

其中当 $h \to 0$ 时，α, β, γ 均保持有限。把 k 换成 $h+\alpha h^{n+1}$，再用 Taylor 级数展开，所有含 α 的项都带有因子 h^{n+1}。所以只须考察两个差

$$F(x_0+h)-f(x_0+h), \qquad \Phi(x_0+h)-\phi(x_0+h).$$

[7]这里采用三直角坐标轴并非本质要求；若使用斜坐标，只须把两点距离的一般公式代入，同样的论证仍然成立。——原书注

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

设 N 是 Γ' 上横坐标同 M 一样、也等于 x_0+h 的点。若某种对应法则使 MM' 是 $n+1$ 阶无穷小量，那么由上面的展开可见，MN 的阶数至少也是 $n+1$。因此，使阶数达到最高的对应法则，就是把两条曲线上横坐标相同的点相互对应。

由于两曲线相切，有

$$f(x_0)=F(x_0),\qquad f'(x_0)=F'(x_0),$$
$$\phi(x_0)=\Phi(x_0),\qquad \phi'(x_0)=\Phi'(x_0).$$

更一般地，假定

$$f''(x_0)=F''(x_0),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x_0)=F^{(n)}(x_0),$$
$$\phi''(x_0)=\Phi''(x_0),\quad \ldots,\quad \phi^{(n)}(x_0)=\Phi^{(n)}(x_0),$$

但两个差

$$F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0),\qquad \Phi^{(n+1)}(x_0)-\phi^{(n+1)}(x_0)$$

中至少有一个不为零，那么接触就是 n 阶的。换言之，为求两条空间曲线的接触阶数，可把它们投影到两个坐标平面上，再取所得两对平面投影曲线接触阶数中的较小者。

若两条曲线由参数方程

$$(\Gamma):\quad x=f(t),\qquad y=\phi(t),\qquad z=\psi(t),$$
$$(\Gamma'):\quad X=f(u),\qquad Y=\Phi(u),\qquad Z=\Psi(u)$$

给出，那么当 $u=t=t_0$ 时，两曲线相切的条件是

$$\Phi(t_0)=\phi(t_0),\qquad \Phi'(t_0)=\phi'(t_0),$$
$$\Psi(t_0)=\psi(t_0),\qquad \Psi'(t_0)=\psi'(t_0).$$

若 $f'(t_0)\neq 0$，则 n 阶接触的特征条件为

$$\Phi'(t_0)=\phi'(t_0),\quad \ldots,\quad \Phi^{(n)}(t_0)=\phi^{(n)}(t_0),$$
$$\Psi'(t_0)=\psi'(t_0),\quad \ldots,\quad \Psi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0),$$

并且

$$\Phi^{(n+1)}(t_0)-\phi^{(n+1)}(t_0),\qquad \Psi^{(n+1)}(t_0)-\psi^{(n+1)}(t_0)$$

中至少有一个不为零。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

一条曲线由

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t), \qquad z = \psi(t) \tag{67}$$

给出，而另一条曲线由两个隐式方程

$$F(x,y,z) = 0, \qquad F_1(x,y,z) = 0$$

给出的情形，很容易化归为上面的情形。若令

$$\mathcal{F}(t) = F[f(t), \phi(t), \psi(t)], \qquad \mathcal{F}_1(t) = F_1[f(t), \phi(t), \psi(t)],$$

那么在 $t = t_0$ 处具有 n 阶接触的一个必要条件是

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t_0) = 0, & \mathcal{F}'(t_0) = 0, & \ldots, & \mathcal{F}^{(n)}(t_0) = 0, \\ \mathcal{F}_1(t_0) = 0, & \mathcal{F}_1'(t_0) = 0, & \ldots, & \mathcal{F}_1^{(n)}(t_0) = 0. \end{cases} \tag{68}$$

235.　密切曲线

设 Γ 是方程 (67) 所表示的一条曲线，又设 Γ' 是一个含 $2n+2$ 个参数 $a, b, c, \ldots, l$ 的曲线族中的一条曲线，该族由

$$\begin{aligned} F(x,y,z,a,b,\ldots,l) = 0, \\ F_1(x,y,z,a,b,\ldots,l) = 0 \end{aligned} \tag{69}$$

定义。一般说来，可以确定这 $2n+2$ 个参数，使相应曲线在一个给定点同 Γ 具有 n 阶接触。所得曲线称为曲线族 (69) 对 Γ 的*密切曲线*。决定参数的方程恰好就是 (68) 中的 $2n+2$ 个方程。应当注意：若函数 F 与 F_1 不是各自至少含有 $n+1$ 个参数，这些方程一般无法解出。譬如，若 Γ' 被限制为平面曲线，那么方程 (69) 中有一个方程只含三个参数；所以一条平面曲线在任意选定点同任意空间曲线的接触阶数一般不能超过二阶。

下面把这套理论用于两类最简单的曲线——直线与圆。直线族依赖四个参数；所以密切直线具有一阶接触，它就是切线。若在所考察点 $z_0' \neq 0$，可用 z 作局部参数，把直线写成

$$x = az + p, \qquad y = bz + q.$$

若 $z_0' = 0$，只须改用一个导数不为零的坐标作局部参数。于是决定参数的方程给出

$$x_0 = az_0 + p, \qquad x_0' = az_0', \qquad y_0 = bz_0 + q, \qquad y_0' = bz_0',$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因而

$$a=\frac{x_0'}{z_0'},\qquad b=\frac{y_0'}{z_0'},\qquad p=x_0-\frac{x_0'}{z_0'}z_0,\qquad q=y_0-\frac{y_0'}{z_0'}z_0.$$

切线恰在

$$\frac{x_0''}{x_0'}=\frac{y_0''}{y_0'}=\frac{z_0''}{z_0'}$$

时具有二阶接触；这正是 §217 中讨论过的点。

空间中全体圆所成的曲线族依赖六个参数；所以密切圆具有二阶接触。六个参数可以取为圆心 a,b,c、半径 R，以及三个系数 A,B,C 的两个比值。把圆写成

$$F(x,y,z)=A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$

$$F_1(x,y,z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0.$$

决定密切圆的方程为

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,\qquad A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

$$(x-a)\frac{dx}{dt}+(y-b)\frac{dy}{dt}+(z-c)\frac{dz}{dt}=0,$$

$$(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0.$$

第二、第三个方程表明，密切圆所在平面就是曲线的密切平面。最后两个方程分别表示该点处的法平面以及邻近一点处法平面的极限位置；所以密切圆的圆心，是密切平面与极线的交点。因此，密切圆就是曲率圆。也可以预先看出这一点：两条曲线若有二阶接触，则它们在接触点的 y',z',y'',z'' 都相同，因而具有同一个曲率圆。

236.　曲线与曲面之间的接触

设 S 是一个曲面，Γ 是在一点 A 同 S 相切的一条曲线。对于 Γ 上靠近 A 的一点 M，在 S 上选取一点 M' 与之对应，使 M 与 M' 同时趋近于 A；我们首先要找出使无穷小量 MM' 相对于弧 AM 的阶数达到最大的对应法则。选取

直角坐标，使 Γ 的切线不平行于 yz 平面，并使 S 的切平面不平行于 z 轴。设曲面与曲线的方程分别为

$$z = F(x, y), \qquad y = f(x), \qquad z = \phi(x).$$

若

$$M = [x_0 + h, f(x_0 + h), \phi(x_0 + h)], \qquad M' = (X, Y, F(X, Y)),$$

那么，为使 MM' 成为 $n+1$ 阶无穷小量，必须有

$$X - x = \alpha h^{n+1}, \qquad Y - y = \beta h^{n+1}, \qquad F(X, Y) - z = \gamma h^{n+1},$$

其中

$$x = x_0 + h, \qquad y = f(x_0 + h), \qquad z = \phi(x_0 + h).$$

于是

$$F(x + \alpha h^{n+1}, y + \beta h^{n+1}) - z = \gamma h^{n+1},$$

从而 $F(x, y) - z$ 本身至少也是 $n+1$ 阶无穷小量。过 M 作平行于 z 轴的直线，令它同曲面相交于 $N = (x, y, F(x, y))$；则 MN 的阶数至少同 MM' 一样高。因此，最大接触阶数正由这种对应取得，而曲线同曲面的接触阶数，等于 Γ 同下述曲线的接触阶数：用将 Γ 投影到 xy 平面所得的投影柱面截曲面 S，所得交线就是这条曲线。这里 z 轴可以换成任意一条不平行于切平面的固定方向。若这条交线的方程为

$$y = f(x), \qquad z = F[x, f(x)] = \Phi(x),$$

则 n 阶接触的特征条件是

$$\Phi(x_0) = \phi(x_0), \quad \Phi'(x_0) = \phi'(x_0), \quad \ldots, \quad \Phi^{(n)}(x_0) = \phi^{(n)}(x_0),$$

以及

$$\Phi^{(n+1)}(x_0) \neq \phi^{(n+1)}(x_0).$$

换言之，曲线与曲面在 A 处有 $n+1$ 个重合交点。

若 Γ 由

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t), \qquad z = \psi(t)$$

给出，而 S 由 $F(x, y, z) = 0$ 给出，那么曲面上的辅助曲线具有形式

$$x = f(t), \qquad y = \phi(t), \qquad z = \pi(t),$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中

$$F[f(t),\phi(t),\pi(t)]=0.$$

于是，n 阶接触由

$$\pi(t_0)=\psi(t_0),\quad \pi'(t_0)=\psi'(t_0),\quad \ldots,\quad \pi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0)$$

表示。若令

$$\mathcal{F}(t)=F[f(t),\phi(t),\psi(t)],$$

则同一条件也可写成

$$\mathcal{F}(t_0)=0,\quad \mathcal{F}'(t_0)=0,\quad \ldots,\quad \mathcal{F}^{(n)}(t_0)=0.$$

若 S 属于一个依赖 $n+1$ 个参数的曲面族，那么可以选取这些参数，使 S 在一个给定点同一条给定曲线具有 n 阶接触；这样得到的曲面称为*密切曲面*。在平面的情形，决定密切平面的方程为

$$\begin{aligned} Af(t)+B\phi(t)+C\psi(t)+D&=0,\\ Af'(t)+B\phi'(t)+C\psi'(t)&=0,\\ Af''(t)+B\phi''(t)+C\psi''(t)&=0. \end{aligned}$$

这些就是先前已经得到的密切平面方程。一般说来，接触为二阶；若阶数更高，还必须有

$$Af'''(t)+B\phi'''(t)+C\psi'''(t)=0,$$

所以密切平面必定是驻定的。

237.　密切球面

球面的方程依赖四个参数；所以在通常的非退化情形下，密切球面具有三阶接触。以下计算假定曲率非零且挠率非零，也就是 R 与 T 都是有限的。把 Γ 上一点的坐标表示为弧长 s 的函数，并把以 (a,b,c) 为球心、以 ρ 为半径的球面写成

$$\mathcal{F}(s)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\rho^2.$$

所需条件为

$$\mathcal{F}(s)=0,\qquad \mathcal{F}'(s)=0,\qquad \mathcal{F}''(s)=0,\qquad \mathcal{F}'''(s)=0.$$

逐次求导，在每个方程中约去公因子 2，并应用 Frenet 公式，得到

$$(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma=0,$$

$$(x-a)\frac{\alpha'}{R}+(y-b)\frac{\beta'}{R}+(z-c)\frac{\gamma'}{R}+1=0,$$

$$\begin{aligned}0=&-\frac{x-a}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)-\frac{y-b}{R}\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)\\&-\frac{z-c}{R}\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right)-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\big[(x-a)\alpha'+(y-b)\beta'+(z-c)\gamma'\big].\end{aligned}$$

这三个方程决定球心坐标 a, b, c。第一个方程就是以 a, b, c 为流动坐标时曲线在 (x, y, z) 处的法平面；另外两个方程可由它关于弧长 s 连续求导两次得到。因此，密切球面的球心，正是极线同其包络相切的点。利用其余各方程化简最后一个方程，得到

$$(x-a)\alpha''+(y-b)\beta''+(z-c)\gamma''=T\frac{dR}{ds},$$

从而

$$\begin{aligned}a&=x+R\alpha'-T\frac{dR}{ds}\alpha'',\\b&=y+R\beta'-T\frac{dR}{ds}\beta'',\\c&=z+R\gamma'-T\frac{dR}{ds}\gamma''.\end{aligned}$$

因此密切球面的半径为

$$\rho^2=R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

在上述非退化情形下，若 R 为常数，密切球面的球心就与曲率中心重合；这与 §233 所得结果一致。若挠率为零，四个接触方程可能不再独立，密切球面可能不存在或不唯一；因此不能简单地在上式中令 $T=\infty$。

238. 密切直线

若一个曲线族的方程依赖 $n+2$ 个参数，那么可以选取这些参数，使所得曲线在曲面上一个给定点 M 同该曲面具有 n 阶接触。事实上，一个方程表示曲线通过点 M，另有 $n+1$ 个方程表示曲线与曲面在 M 处有 $n+1$ 个重合交点；这合起来正好给出关于参数的 $n+2$ 个方程。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

例如，直线的方程依赖四个参数。所以，通过一个给定曲面上的每一点 M，存在一条或若干条同曲面具有二阶接触的直线。把原点取在 M，假定 z 轴不平行于切平面，并设

$$z = F(x, y)$$

为曲面的方程。过原点的一条直线可写成

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \rho.$$

方程

$$c\rho = F(a\rho, b\rho)$$

必须以 $\rho = 0$ 为三重根；所以

$$c = ap + bq, \qquad 0 = a^2 r + 2abs + b^2 t,$$

其中 p, q, r, s, t 表示 $F(x, y)$ 在原点处的一阶和二阶偏导数。第一个关系说明该直线位于切平面内；第二个关系是关于切平面内射影方向 $[a : b]$ 的二次齐次方程，其判别式为 $4(s^2 - rt)$。因此：在双曲点 $s^2 - rt > 0$ 处有两条不同的实方向；在抛物点 $s^2 - rt = 0$ 处通常只有一条二重实方向；在椭圆点 $s^2 - rt < 0$ 处没有实方向。若 $r = s = t = 0$，则二次条件对所有切向方向都自动成立，还须考察更高阶项。我们将在下一章以*渐近线*的名义再次遇到这些方向。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

习题

1. 用有限形式求出下述曲线的各条渐屈线的方程：该曲线以一个常角截一直圆锥的直线母线。讨论本问题。〔Marseilles Licence 考试，1884 年 7 月。〕

2. 是否存在这样的空间曲线 Γ：一固定平面 P 分别同它的切线、主法线和副法线相交所得的三个点，总是一个等边三角形的三个顶点?

3. 设 Γ 是一个曲面的回归边，该曲面是一个单参数球面族的包络；也就是说，该曲面也是这些球面的特征圆的包络。证明：这些球面的球心轨迹位于 Γ 的极面上。再陈述并证明其逆命题。

4. 设 Γ 是一条给定空间曲线，M 是 Γ 上一点，O 是空间中的一个固定点。过 O 作一直线，平行于 Γ 在 M 处的极线；在这条平行线上截取线段 ON，使其等于 Γ 在 M 处的曲率半径。证明：点 N 所描绘的曲线 Γ'，与 Γ 的曲率中心所描绘的曲线 Γ''，在对应点处切线互相垂直、弧元素相等、曲率半径也相等。〔Rouquet〕

5. 若给定空间曲线 Γ 的密切球面具有常半径 a，证明 Γ 位于一个半径为 a 的球面上；唯一可能的例外，是 Γ 的曲率半径为常数且等于 a 的情形。

6. 证明：一条柱面上的螺线，其曲率中心轨迹仍是另一平行柱面上的螺线的充要条件，是第二个柱面的正截线为圆或对数螺线。在后一种情形，证明所有这些螺线都位于具有同一轴和同一顶点的圆锥面上。〔Tissot，*Nouvelles Annales*, Vol. XI, 1852〕

7. 若两条空间曲线具有相同的主法线，则它们在同一条法线上相交的对应点处的密切平面彼此成一个常角。上述两个对应点与两条曲线各自的曲率中心构成四个点，其交比为常数。两曲线在对应点处的挠率半径之积为常数。〔Paul Serret；Mannheim；Schell〕

8. 设 x, y, z 是空间曲线 Γ 上一点的直角坐标，s 是该曲线的弧长。由

$$x_0 = \int \alpha''\, ds, \qquad y_0 = \int \beta''\, ds, \qquad z_0 = \int \gamma''\, ds$$

定义的曲线 Γ_0 称为 Γ 的*共轭曲线*；而曲线

$$X = x\cos\theta + x_0 \sin\theta,$$
$$Y = y\cos\theta + y_0 \sin\theta,$$
$$Z = z\cos\theta + z_0 \sin\theta,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中 θ 是常数，称为一条*相关曲线*。求这些曲线各自的基本三面体的取向，并求其曲率半径与挠率半径。若 Γ 的曲率为常数，则 Γ_0 的挠率为常数，而各条相关曲线都是 Bertrand 型曲线。由此求出后一类曲线的一般方程。

9. 设 Γ 与 Γ' 是在一点 A 相切的两条空间曲线。从 A 起，沿两曲线的同一方向分别截取无穷小弧 AM 与 AM'。求直线 MM' 的极限位置。〔Cauchy〕

10. 一条通过空间曲线基本三面体顶点、并同该三面体刚性连接的直线，要描绘一个可展曲面，就必须同切线重合；除非给定空间曲线是一条螺线。在后一情形，满足要求的直线有无穷多条。对于一条 Bertrand 型曲线，存在两个同基本三面体刚性连接的双曲抛物面，使其中每一条母线都描绘一个可展曲面。〔Cesàro，*Rivista di Matematica*, Vol. II, 1892〕

11. 一条给定空间曲线的主法线要同时成为另一条曲线的副法线，前一条曲线的曲率半径与挠率半径必须满足形如

$$A\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}\right)=\frac{B}{R}$$

的关系，其中 A, B 是常数。〔Mannheim，*Comptes rendus*, 1877〕

一条通过空间曲线上一点并同基本三面体刚性连接的直线，同时成为另一条空间曲线的主法线（或副法线）的情形，曾由 Pellet、Cesàro 与 Balitrand 讨论。

12. 若一条空间曲线 Γ 的密切平面总与一个球心为 O 的固定球面相切，证明：过切线并垂直于主法线的平面通过 O；并证明曲率半径与挠率半径之比 R/T 是弧长的线性函数。陈述并证明这些命题的逆命题。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

第 12 章

曲面

I. 曲面上曲线的曲率

239. 基本公式；Meusnier 定理

为了研究曲面在一个非奇异点 M 处的曲率，取一组直角坐标，使 z 轴不平行于曲面在 M 处的切平面。如果曲面是解析的，它的方程可以写成

$$z = F(x, y), \tag{1}$$

其中，在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域内，$F(x, y)$ 可以像 §194 中那样展开成 $x - x_0$ 与 $y - y_0$ 的幂级数。在以下讨论中，只须假定 F 连同它的一阶和二阶导数在 (x_0, y_0) 附近连续。我们仍用 Monge 的记号 p, q, r, s, t 表示这些导数。

曲面法线的方向余弦同 $p, q, -1$ 成比例。如果把法线的正方向选成同 z 轴正向成锐角的方向，那么它的方向余弦 λ, μ, ν 为

$$\lambda = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \mu = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{2}$$

设 C 是曲面上一条通过 M 的曲线，并以参数形式给出。由于它的坐标满足 (1)，这些坐标的微分满足

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{3}$$

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2. \tag{4}$$

第一个方程表示曲线 C 的切线位于曲面的切平面内。为了从几何上解释第二

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

个方程，把 C 的弧长 σ 取作自变量。于是，采用 §229 的记号，

$$\frac{dx}{d\sigma}=\alpha,\qquad \frac{dy}{d\sigma}=\beta,\qquad \frac{dz}{d\sigma}=\gamma,$$

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2}=\frac{\alpha'}{R},\qquad \frac{d^2y}{d\sigma^2}=\frac{\beta'}{R},\qquad \frac{d^2z}{d\sigma^2}=\frac{\gamma'}{R}.$$

把这些值代入 (4)，再除以 $\sqrt{1+p^2+q^2}$，得到

$$\frac{\gamma'-p\alpha'-q\beta'}{R\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

或者由 (2),

$$\frac{\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

左端分子是曲线 C 的主法线同曲面正法线之间夹角 θ 的余弦。因此

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{5}$$

这个公式同 (4) 等价; 关于曲面上曲线曲率的一切能由二阶微分得到的信息, 都包含在这个公式中。这里 R 作为通常的曲率半径, 其数值为正, 而 $\sqrt{1+p^2+q^2}$ 也为正；因此，$\cos\theta$ 与二次型

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$$

具有相同符号。换言之，这个二次型的符号决定 θ 是锐角还是钝角。

先考虑曲面上所有通过 M、并且具有同一密切平面的曲线，这个密切平面不同于曲面的切平面。它们有同一条切线，即该密切平面同曲面切平面的交线；所以它们的方向余弦 α,β,γ 相同。它们的主法线在公共密切平面内也只有同样的两个可能方向，而 $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ 的符号确定其中正确的一个。因此，所有这些曲线都有同一曲率半径和同一曲率中心。

所以只须研究曲面的平面截线。设这些截面全都通过同一条切线 MT。改变 z 轴的方向会同时改变 r,s,t 的符号，所以不失一般性，可以先假定

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2>0.$$

于是相应的角 θ 为锐角。若 R_1 表示通过 MT 的法截线的曲率半径，那么对这条截线有 $\theta=0$，并且

$$\frac{1}{R_1}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

把它同 (5) 比较，得到

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos\theta}{R}, \tag{6}$$

或者 $R = R_1\cos\theta$。所以，任一斜截线的曲率中心，都是相应法截线曲率中心在这个斜截面上的投影。这就是 Meusnier 定理。

现在只剩下讨论法截线。为了避免对符号作两重约定，规定：若从 M 指向曲率中心的方向同曲面正法线方向相同，就给 R 取正号；若方向相反，就取负号。按照这个约定，法截线的曲率半径总由

$$\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \tag{7}$$

给出。

这个公式说明了在 M 附近曲面相对于其切平面的位置。如果 $s^2 - rt < 0$，分子中的二次型保持同一符号；一切法截线的曲率中心都位于切平面的同一侧，因而一切法截线在切点附近也位于切平面的同一侧，并说曲面在 M 处是凸的。此时 M 称为一个*椭圆点*。

如果 $s^2 - rt > 0$，这个二次型在两个方向上为零；相应的法截线通常具有拐点。这两个法平面把以曲面法线为公共棱的平面束分成两对对顶二面角：法平面位于其中一对时，R 为正，截线在切平面的一侧；位于另一对时，R 为负，截线在切平面的另一侧。因此曲面在切点穿过它的切平面。此时 M 称为一个*双曲点*。

最后，如果 $s^2 - rt = 0$，并且二次型 $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ 不恒为零，那么除一个二重方向以外的一切法截线在二阶近似下都位于切平面的同一侧；这个例外方向的法曲率为零，也就是曲率半径为无穷大。原书指出，相应截线通常仍会穿过切平面；这取决于三阶及更高阶项。此时 M 称为一个*抛物点*。若 $r = s = t = 0$，则所有方向的二阶法曲率都为零，必须考察更高阶项；这种退化点通常称为平坦点。

把曲面直接同它的切平面比较，也能得到同一分类。设

$$z' = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

是切平面上投影为 (x, y) 的点的纵坐标，并令 $u = z - z'$；那么 $u(x_0, y_0) = 0$，而且在 (x_0, y_0) 处

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t.$$

所以，由 §56 关于极值的结果，当 $s^2-rt<0$ 时，u 在 M 附近保持同一符号；而当 $s^2-rt>0$ 时，u 在 M 的每一个邻域内都改变符号。

中译者校记（底本原误）。1904 年英译本和现代重排本在这里把切平面的纵坐标误写成 $p(x-x_0)+q(y-y_0)$，漏去了常数项 z_0；若不补上这一项，就有 $u(M)=z_0$ 而不是 0，无法据 u 的符号比较曲面与其切平面。另须注意，在抛物方向上二次项消失，曲面究竟穿过切平面还要看三阶及更高阶项；“抛物点”的分类首先是二阶分类。

240. Euler 诸定理；指标曲线

为了研究法截线曲率半径的变化，取 M 为原点，并取切平面为 xy 平面。于是 $p=q=0$，而 (7) 变成

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\phi+2s\cos\phi\sin\phi+t\sin^2\phi, \tag{8}$$

其中 ϕ 是法平面在切平面内的迹同 x 轴正向所成的角。令右端关于 ϕ 的导数等于零，便可看出使 R 取驻值的两个方向互相垂直。

在法平面的迹上截取一段 Om，使它的数值等于相应曲率半径绝对值的平方根。点 m 的轨迹称为*指标曲线*。有三种情形。

如果 $s^2-rt<0$，曲率半径 R 保持同一符号；不妨假定它为正。令

$$\xi=\sqrt{R}\cos\phi,\qquad \eta=\sqrt{R}\sin\phi,$$

指标曲线的方程为

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1, \tag{9}$$

它是一条以原点为中心的椭圆。显然，法平面的迹通过这条椭圆的长轴时，R 取最大值；通过短轴时，R 取最小值。两个法平面若同这两条轴分别成相等的角，则相应法截线具有相同的曲率。通过这条椭圆两条轴的法截线，称为*主法截线*；它们的曲率半径称为*主曲率半径*。如果把这两条轴取作坐标轴，就有 $s=0$，而 (8) 变成

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\phi+t\sin^2\phi.$$

若 R_1,R_2 分别对应于 $\phi=0$ 和 $\phi=\pi/2$，那么

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\phi}{R_1}+\frac{\sin^2\phi}{R_2}. \tag{10}$$

如果 $s^2-rt>0$，满足

$$r\cos^2\phi+2s\cos\phi\sin\phi+t\sin^2\phi=0$$

的法截线具有无穷大的曲率半径。相应的迹就是指标曲线的渐近线。在一对对顶角内，指标曲线的方程是 (9)；在另一对对顶角内，它的方程为

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=-1,$$

即与前一条双曲线共轭的双曲线。如果把这两条双曲线的轴取作 x,y 轴，Euler 公式 (10) 仍然成立，不过 R_1 与 R_2 的符号相反。

如果 $s^2-rt=0$，指标曲线是抛物型的极限情形，即一对平行直线。取 y 轴平行于这两条直线，就有 $s=0,t=0$，并且

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\phi,\qquad \text{或}\qquad \frac{1}{R}=\frac{\cos^2\phi}{R_1};$$

这正是当 R_2 变为无穷大时 (10) 的极限形式。

Euler 公式也可以直接证明。取 M 为原点、切平面为 xy 平面，Taylor 公式给出

$$z=\frac{rx^2+2sxy+ty^2}{1\cdot 2}+\cdots.$$

对于迹为 $y=x\tan\phi$ 的法截面，作变换

$$x=x'\cos\phi-y'\sin\phi,\qquad y=x'\sin\phi+y'\cos\phi,$$

再令 $y'=0$。于是

$$z=\frac{r\cos^2\phi+2s\sin\phi\cos\phi+t\sin^2\phi}{1\cdot 2}x'^2+\cdots;$$

由 §214 的平面曲线接触公式，这就给出 (8)。

曲面同其切平面的交线在 M 附近有方程

$$0=rx^2+2sxy+ty^2+\phi_3(x,y)+\cdots,$$

并且，只要二次型 $rx^2+2sxy+ty^2$ 不恒等于零，它在原点通常有一个二重点。它的两条切线就是渐近切线；在二次型退化或完全消失时，必须继续考察更高阶项。更一般地，若两个曲面 S,S_1 都在原点同 xy 平面相切，那么它们交线在 xy 平面上的投影以

$$0=(r-r_1)x^2+2(s-s_1)xy+(t-t_1)y^2+\cdots$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

开头。这个二重点的性质取决于

$$(s-s_1)^2-(r-r_1)(t-t_1);$$

当这个量等于零时，交线在原点通常有一个尖点。

总括起来：在一个非脐的普通点处，有两个互相垂直的主方向，相应的法曲率取极值；若把复方向也计入，并按重数计算，另有两个由

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=0$$

确定的*渐近方向*。在双曲点它们是两条不同的实方向，在抛物点合并成一条二重实方向，在椭圆点则是一对共轭虚方向。脐点处每一个切线方向都是主方向，因而主方向不再由一对特殊直线唯一确定。[1]

241. 主曲率半径

对实法截线，给定的有向半径 R 并非总能实现。由 Euler 公式可知，法曲率 $1/R$ 必须位于两个主曲率 $1/R_1, 1/R_2$ 之间：若严格位于二者之间，通常有两条互成对称的法截线方向；若等于一个主曲率，只剩相应的主方向；若落在这个区间之外，则没有实方向（但在复数范围内仍有两个解）。为了确定这些截线，可以由下列方程求 α, β, γ：

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2, \qquad \gamma=p\alpha+q\beta, \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

消去 γ，得到齐次关系

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}. \tag{11}$$

若令

$$R=D\sqrt{1+p^2+q^2},$$

那么比值 β/α 由方程

$$\alpha^2(1+p^2-rD)+2\alpha\beta(pq-sD)+\beta^2(1+q^2-tD)=0$$

[1]读者应严格区分两类方向：指标曲线的渐近线方向，原书有时称为“principal tangents”；以及指标曲线两条轴的方向，也就是主法截线方向。为避免混淆，英译本后文不采用“principal tangent”这一名称。——英译者

确定。为了使这个二次方程有重根，它本身及其关于 α, β 的一阶导数都必须为零；所以

$$\begin{cases} \alpha(1+p^2-rD)+\beta(pq-sD)=0, \\ \alpha(pq-sD)+\beta(1+q^2-tD)=0. \end{cases} \tag{12}$$

消去 α, β，并用 D 的值代回，得到主曲率半径所满足的方程

$$(rt-s^2)R^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\,\bigl[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\bigr]R \\ +(1+p^2+q^2)^2=0. \tag{13}$$

反过来消去 D，便得到切平面同两个主法截面所在法平面相交所得两条直线的方程

$$\alpha^2\bigl[(1+p^2)s-pqr\bigr]+\alpha\beta\bigl[(1+p^2)t-(1+q^2)r\bigr] \\ +\beta^2\bigl[pqt-(1+q^2)s\bigr]=0. \tag{14}$$

由指标曲线的几何构造也可看出，方程 (13) 与 (14) 的根都是实的。

如果两个主曲率半径相等，指标曲线就是一个圆。对于实正则曲面，$1+p^2+q^2>0$，这等价于存在一个数 κ，使第二基本形式在该点等于 κ 倍的第一基本形式:

$$r=\kappa(1+p^2), \qquad s=\kappa pq, \qquad t=\kappa(1+q^2). \tag{15}$$

在各分母不为零时,这也可写成原书的比值形式 $r/(1+p^2)=s/(pq)=t/(1+q^2)$；式 (15) 则在 $pq=0$ 时仍无歧义。相应的点称为*脐点*。在这样的点上，方程 (14) 成为恒等式，因为圆形指标曲线的每一条直径都是一条对称轴。

主法截线往往可以从几何上辨认出来。如果曲面有一个通过点 M 的对称平面，那么这个平面同切平面的交线是指标曲线的一条轴，而该对称平面截曲面所得的截线就是一条主法截线。在旋转曲面上，通过一点的子午线是一条主法截线；另一条主法截线所在的法平面由曲面的法线和圆形纬线的切线确定。再由 Meusnier 定理可知，第二条主法截线的曲率中心，就是曲面法线同旋转轴的交点。

在可展曲面的任一点都有 $s^2-rt=0$，而指标曲线由两条平行直线组成。一条主法截线是母线，它的曲率半径为无穷大；另一条垂直于母线。因此，可展曲面的所有点都是抛物点；反过来，如 §222 所证明的，所有点都具有这一性质的曲面也只有可展曲面。

如果一张非可展曲面在某些点是凸的，而在另一些点是双曲的，那么通常有一条抛物点曲线把 $s^2-rt<0$ 的区域同 $s^2-rt>0$ 的区域分开。例如，在锚环面上，这些抛物线正是最上、最下两条圆形纬线。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

一般（非退化）情形下，凸曲面的脐点是孤立的。现在证明一个局部分类：一张连通实正则曲面若每一点都是脐点，那么它必是球面的一部分或平面的一部分；共同主曲率不为零时得到球面，共同主曲率为零时得到平面。对 (2) 求导，得到

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{pqt-(1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},\qquad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

利用 (15)，这些方程化为

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

第一个方程说明 λ 与 y 无关，第二个方程说明 μ 与 x 无关，第三个方程说明两端的共同值是一个常数，设为 $1/a$。因此

$$\lambda=\frac{x-x_0}{a},\qquad \mu=\frac{y-y_0}{a},\qquad \nu=\frac{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}{a}.$$

由于 $p=-\lambda/\nu$、$q=-\mu/\nu$，

$$p=-\frac{x-x_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},\qquad q=-\frac{y-y_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

积分得到

$$z=z_0+\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$$

这就是一个球面的方程。如果反而有

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}=0,$$

则曲面是一个平面。在复数范围内，方程 (14) 的三个系数还允许一类实情形中不存在的“各向同性”退化解，它们满足

$$1+p^2+q^2=0.$$

这正是为什么上面对 (15) 的无分母写法特意限定在实正则曲面上。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

II. 渐近线；共轭线

242.　渐近线的定义与性质

在曲面的每一个双曲点处，都有两个切线方向，使相应法截线的曲率半径为无穷大；它们正是指标曲线的两条渐近线。曲面上那些在每一点都同这两个方向之一相切的曲线，称为*渐近线*。如果一个点沿曲面上的一条曲线运动，那么微分 dx, dy, dz 同切线的方向余弦成比例。因此，对渐近切线有

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0,$$

而渐近线的微分必须满足

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{16}$$

如果曲面由 $z = F(x, y)$ 给出，那么把 r, s, t 作为 x, y 的函数代入后，方程 (16) 可对 dy/dx 求解；它给出两个微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \phi_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \phi_2(x, y). \tag{17}$$

以后将看到，一般说来，这两个方程各有无穷多个解，并且通过曲面的每一个普通点恰好有两条渐近线。它们合起来在曲面上形成一个双重曲线系。

渐近线还有一个纯粹射影的定义：曲面上的渐近线，就是密切平面处处同曲面切平面重合的曲线。事实上，曲面 $z = F(x, y)$ 上一条曲线的密切平面同曲面切平面重合的充要条件为

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = 0$$

（见 §215）。第一个方程对曲面上的每一条曲线都成立。对它求微分，得到

$$d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y - dp\,dx - dq\,dy = 0;$$

所以第二个方程可以换成

$$dp\,dx + dq\,dy = 0, \tag{18}$$

这同 (16) 完全相同。还可以从 Meusnier 定理直接看出两个定义为何等价：与指标曲线的一条渐近线相切的法截线，其法曲率为零；于是，同一切线方向的曲面曲线也应有零曲率，除非其密切平面同法平面垂直，使 Meusnier 公式退

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

化。后一情形恰好迫使曲线的密切平面同曲面切平面重合。若曲线本身是一条直线，则曲率半径为无穷大而密切平面不定，这只是上述说法的退化例外。

这个射影刻画也说明了为什么任意射影变换都把渐近线变为渐近线：无论坐标轴是直角的还是斜交的，密切平面的方程都保持同一形式。

对于实曲面，双曲点有两条不同的实渐近方向，普通抛物点有一条二重实渐近方向，椭圆点则没有实渐近方向。但是，如果曲面是解析的，微分方程 (16) 在复数范围内总有解。因此，推广地说，一个凸曲面具有两个共轭虚渐近线系。例如，单叶双曲面的渐近线就是它的两族直线母线；对于椭球面或球面，相应的母线是虚的。

例如，在曲面

$$z = x^m y^n$$

上有

$$r = m(m-1)x^{m-2}y^n, \qquad s = mnx^{m-1}y^{n-1}, \qquad t = n(n-1)x^m y^{n-2}.$$

方程 (16) 变成

$$m(m-1)\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)^2 + 2mn\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right) + n(n-1) = 0.$$

如果 h_1, h_2 是这个二次方程的两个根，那么两个渐近线系在 xy 平面上的投影分别是

$$y^{h_1} = C_1 x, \qquad y^{h_2} = C_2 x.$$

243. 参数形式的微分方程

设曲面用两个参数 u, v 表示：

$$x = f(u,v), \qquad y = \phi(u,v), \qquad z = \psi(u,v). \tag{19}$$

把切平面写成

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0, \tag{20}$$

其中 A, B, C 满足

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial f}{\partial u} + B\dfrac{\partial \phi}{\partial u} + C\dfrac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \\ A\dfrac{\partial f}{\partial v} + B\dfrac{\partial \phi}{\partial v} + C\dfrac{\partial \psi}{\partial v} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

这就是 §39 中求 A, B, C 的方程。由于渐近线的密切平面就是这个切平面，同一组系数还必须满足

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \qquad A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

第一个方程在曲面上恒成立。对它求微分，第二个方程便可换成

$$dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = 0, \tag{22}$$

这就是所求的微分方程。例如，如果在 (21) 中取 $C = -1$，那么 $A = p, B = q$，而 (22) 就化为 (18)。

考虑一张锥状面（conoid）

$$z = \phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

或者等价地写成

$$x = u, \qquad y = uv, \qquad z = \phi(v).$$

方程 (21) 变为

$$A + Bv = 0, \qquad Bu + C\phi'(v) = 0.$$

取

$$C = -u, \qquad A = -v\phi'(v), \qquad B = \phi'(v),$$

即可满足这两个方程；所以 (22) 给出

$$u\phi''(v)\,dv^2 - 2\phi'(v)\,du\,dv = 0.$$

一个解是 v 为常数，它给出直线母线。另一族满足

$$\frac{\phi''(v)}{\phi'(v)}\,dv = \frac{2\,du}{u},$$

因而在曲面上由

$$u^2 = K\phi'(v)$$

给出；或者在 xy 平面上由

$$x^2 = K\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

给出。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

对于 Jamet 所研究的曲面

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) = F(z),$$

如果把 z 与 $u = y/x$ 取作自变量，渐近线的微分方程可以写成

$$\sqrt{\frac{F''(z)}{F(z)}}\,dz = \pm\sqrt{\frac{f''(u)}{f(u)}}\,du.$$

所以每一族都可以用一次求积求出。对于螺旋面

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = f(\rho) + h\omega,$$

微分方程为

$$\rho f''(\rho)\,d\rho^2 - 2h\,d\omega\,d\rho + \rho^2 f'(\rho)\,d\omega^2 = 0,$$

所以 ω 仍可由一次求积求出。

244. 直纹曲面上的渐近线

从 (21) 与

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$$

中消去 A, B, C，得到渐近线的一般方程，其行列式形式为

$$\begin{vmatrix} f_u & \phi_u & \psi_u \\ f_v & \phi_v & \psi_v \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

化简以后，这个方程不含二阶微分。事实上，利用

$$d^2x = f_{uu}\,du^2 + 2f_{uv}\,du\,dv + f_{vv}\,dv^2 + f_u\,d^2u + f_v\,d^2v,$$

以及 d^2y, d^2z 的类似公式，可以从第三行减去第一行乘 d^2u，再减去第二行乘 d^2v。所得结果为

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0, \tag{24}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

其中

$$D = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}. \tag{25}$$

作为应用，设曲面是一张直纹曲面：

$$x = x_0 + \alpha u, \qquad y = y_0 + \beta u, \qquad z = z_0 + \gamma u,$$

其中 $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ 都只是 v 的函数。令 $u = 0$ 所得的曲线同每一条母线相交。由 (25) 可见，$D = 0$，D' 与 u 无关，而 D'' 是 u 的二次多项式。因此，一个渐近线系由直线母线 $v =$ 常数 组成。除以 dv 后，另一族的微分方程具有 Riccati 形式

$$\frac{du}{dv} + Lu^2 + Mu + N = 0, \tag{26}$$

其中 L, M, N 只是 v 的函数。

这类方程具有若干值得注意的性质。以后将看到，任意四个解的交比是常数。由此可知，一条母线同第二族任意四条渐近线的四个交点之交比，对所有母线都相同。因此，只要知道第二族中的三条渐近线，便可确定这一族的全部渐近线。以后还将看到，如果已知 (26) 的一个或两个积分，那么其余一切积分都可分别由两次求积或一次求积得到。特别地，如果全部母线都同一条固定直线相交，那么这条直线就是第二族的一条渐近线。如果曲面有两条直线准线，一个射影变换可把其中一条送到无穷远，并把曲面变为锥状面；于是如 §243 所示，不用任何求积就能求出渐近线。

245. 共轭线

在曲面一点处，指标曲线的任意两条共轭直径称为两条*共轭切线*。曲面的每一条切线都有一条与之共轭的切线；只有当这条切线是渐近切线时，二者才重合。

设 $z = F(x, y)$，并设 m, m' 是两条共轭切线在 xy 平面上的投影斜率。这两条切线的投影，必须关于两条渐近切线的投影构成调和共轭。由于后两条直

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

线的斜率满足

$$r + 2s\mu + t\mu^2 = 0,$$

共轭条件为

$$r + s(m + m') + tmm' = 0. \tag{27}$$

这个关系也可以从切平面的包络推出。设 C 是曲面上的一条曲线。沿 C 的曲面切平面包络出一张可展曲面；这张可展曲面沿 C 同给定曲面相切。在 C 的一点 M 处，这张可展曲面的母线，就是同 C 的切线共轭的切线。沿 C，各量 x, y, z, p, q 都依赖于一个参数。母线由

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0,$$

$$-dz + p\,dx + q\,dy - dp(X - x) - dq(Y - y) = 0$$

确定；第二个方程化为

$$\frac{Y - y}{X - x} = -\frac{dp}{dq} = -\frac{r\,dx + s\,dy}{s\,dx + t\,dy}.$$

如果 $m = dy/dx$ 是 C 的切线斜率，而

$$m' = \frac{Y - y}{X - x}$$

是母线的斜率，那么最后这个方程给出 $m' = -(r + sm)/(s + tm)$，恰好等价于 (27)。

> **中译者校记（底本原误）。** 1904 年英译本和现代重排本在这里都漏写了负号。由 $-dp(X - x) - dq(Y - y) = 0$ 必有 $(Y - y)/(X - x) = -dp/dq$；若取正号，反而不能推出共轭条件 (27)。

曲面上的两个单参数曲线族，如果通过每一点的两条曲线的切线互相共轭，就说它们组成一个*共轭网*。这样的网有无穷多个，因为可以任意指定其中一族，而另一族随后由一个一阶微分方程确定。

对于由 (19) 表示的曲面，$u =$ 常数 与 $v =$ 常数 构成共轭网的条件，可以直接写出。沿 $v =$ 常数 运动时，对 (20) 关于 u 求导，便得到切平面的特征线；这条特征线必须同曲线 $u =$ 常数 的切线重合。从 (21) 和所得条件中消去 A, B, C，得到

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

等价地，x, y, z 是如下形式方程的三个解：

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\frac{\partial\theta}{\partial u} + N\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{29}$$

其中 M, N 是 u, v 的任意函数。因此，这种方程的三个彼此独立的积分，确定一张用共轭网作参数曲线的曲面。

例如，如果 $M = N = 0$，每一个积分都是一个 u 的函数与一个 v 的函数之和。因此，在每一张曲面

$$x = f(u) + f_1(v), \qquad y = \phi(u) + \phi_1(v), \qquad z = \psi(u) + \psi_1(v) \tag{30}$$

上，曲线 $u =$ 常数 与 $v =$ 常数 构成一个共轭网。这样的曲面称为*平移曲面*。它们可以用两种互逆的方式生成：平移一条形状不变的曲线，使它的一个点描出另一条形状不变的曲线；或者反过来。

具体说，设 M_0, M_1, M_2, M 分别对应于

$$(u_0, v_0), \qquad (u, v_0), \qquad (u_0, v), \qquad (u, v).$$

由 (30)，这四点总是一个平面平行四边形的四个顶点。固定 v_0 而让 u 变化，M_1 描出曲面上一条曲线 Γ；固定 u_0 而让 v 变化，M_2 描出另一条曲线 Γ'。于是，可以让 Γ 作平移运动，使它的点 M_2 沿 Γ' 运动，从而生成整个曲面；也可以交换两条曲线的角色，让 Γ' 平移而使 M_1 沿 Γ 运动。

这种生成法还直接说明两族参数曲线互相共轭。例如，在 Γ 的各点处，曲线 Γ' 的各个平移位置之切线组成一个柱面；这个柱面沿 Γ 同平移曲面相切。因此，在每一点处，两条参数曲线的切线正是一对共轭切线。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

III. 曲率线

246. 曲率线的定义与性质

曲面 S 上的一条曲线，如果沿这条曲线的曲面法线组成一张可展曲面，就叫作一条*曲率线*。设曲面 S 关于直角坐标系的方程为 $z=f(x,y)$；它的法线为

$$\begin{cases} X=-pZ+(x+pz), \\ Y=-qZ+(y+qz). \end{cases} \tag{31}$$

这条直线描出一张可展曲面的充要条件，是两个方程

$$\begin{cases} -Z\,dp+d(x+pz)=0, \\ -Z\,dq+d(y+qz)=0 \end{cases} \tag{32}$$

关于 Z 有一个解（§223）。因此

$$\frac{d(x+pz)}{dp}=\frac{d(y+qz)}{dq},$$

或者更简单地，

$$\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq}.$$

把 dz, dp, dq 换成它们的值，得到

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}. \tag{33}$$

这个方程关于 dy/dx 有两个解；对于实曲面，除脐点以外，这两个解总是实的并且互不相等。如果在 (33) 中把 dx, dy 换成 α, β，它就成为 (14)，也就是主法截线同切平面交线的方程。因此，通过一点的两条曲率线的切线，同指标曲线的两条轴重合。以后将看到，除脐点外，通过每一个非奇异点，恰有一条曲率线同指标曲线的每一条轴相切。对于实曲面，这些曲率线都是实的；它们所组成的网既是正交网，也是共轭网。

例。求双曲抛物面

$$z=\frac{xy}{a}$$

的曲率线。这里

$$p=\frac{y}{a}, \qquad q=\frac{x}{a}, \qquad r=t=0, \qquad s=\frac{1}{a}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

方程 (33) 变成

$$(a^2+y^2)\,dx^2=(a^2+x^2)\,dy^2,$$

或者

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\pm\frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}}=0.$$

在两个根式都取正号的情形，一般积分为

$$\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\left(y+\sqrt{y^2+a^2}\right)=C.$$

若令

$$\lambda=x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2}, \tag{34}$$

则由恒等式

$$\left[x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2}\right]^2+a^4=\left[xy+\sqrt{(x^2+a^2)(y^2+a^2)}\right]^2$$

可把上述积分写成

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2+a^4}=C.$$

所以，一族曲率线的投影由 (34) 给出，其中 λ 为常数。同样，另一族曲率线的投影为

$$x\sqrt{y^2+a^2}-y\sqrt{x^2+a^2}=\mu. \tag{35}$$

由于 $xy=az$，这两族方程也可以写成

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=C,\qquad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=C'.$$

因此，这张双曲抛物面上的曲率线，正是到两条轴 Ox, Oy 的距离之和或者距离之差保持常数的那些曲线。

247.　曲面的渐屈面

设 C 是曲面 S 上的一条曲率线。当点 M 沿 C 运动时，曲面法线 MN 始终同一条曲线 Γ 相切。设法线 MN 同 Γ 相切的点 A 的坐标为 (X, Y, Z)。那么 Z 由方程 (32) 中任一个给出；由于 C 是曲率线，这两个方程化为同一个方程。我们可以写成

$$Z-z=\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

把第一个分式的分子、分母各乘 dx，把第二个分式的分子、分母各乘 dy，再用合比定理，得到

$$Z - z = \frac{dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2}{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}.$$

由于 dx, dy, dz 同 C 的切线方向余弦 α, β, γ 成比例，上式变为

$$Z - z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2} = \frac{1}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}.$$

把它同给出与 C 相切的主法截线曲率半径 R 的公式 (7) 比较，得到

$$Z - z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = R\nu, \tag{36}$$

其中 ν 是正法线同 z 轴正向所成锐角的余弦。因此，$z + R\nu$ 正好是相应主法截线曲率中心的纵坐标。于是，法线 MN 同其包络的切点 A，就是同 C 相应的主曲率中心。

当第一族曲率线中的曲线不断变化时，相应的曲线 Γ 扫出一张曲面 Σ；这张曲面同 S 的每一条法线相切。通过 M 的另一条曲率线 C'，以同样方式给出一条曲线 Γ' 和第二张曲面 Σ'。这两张曲面通常并非在解析意义下彼此分离，而是由一个不可约方程表示的同一曲面的两叶；它们合起来叫作 S 的*渐屈面*。

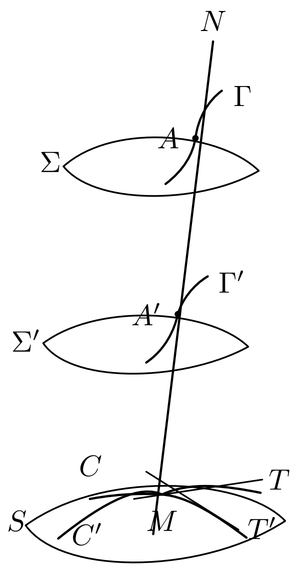


图 51

设法线同渐屈面的两叶分别交于两个主曲率中心 A 和 A'。如果 M 沿 C 运动，法线描出一张以 Γ 为回归边的可展曲面；与此同时，A' 在 Σ' 上描出一条曲线 γ'。这张可展曲面同 Σ' 在 A' 处相切，所以 Σ' 在 A' 处的切平面，就是通过 MN 以及 C 的切线的平面。同样，Σ 在 A 处的切平面，就是通过 MN 以及 C' 的切线的平面。这两个平面互相垂直。因此，从空间任一点观察曲面的渐屈面两叶，它们看起来总是以直角相交。这个命题的逆命题将在以后证明。

248. Rodrigues 公式

设 λ, μ, ν 是法线的方向余弦，R 是一个主曲率半径。相应主曲率中心的坐标为

$$X = x + R\lambda, \qquad Y = y + R\mu, \qquad Z = z + R\nu. \tag{37}$$

当点 (x, y, z) 沿同 R 相应的曲率线运动时，点 (X, Y, Z) 描出一条同法线相切的曲线。因此

$$\frac{dX}{\lambda} = \frac{dY}{\mu} = \frac{dZ}{\nu}.$$

代入 (37)，并略去各分式中公共的 dR 项，得到

$$\frac{dx + R\,d\lambda}{\lambda} = \frac{dy + R\,d\mu}{\mu} = \frac{dz + R\,d\nu}{\nu}.$$

这些比值的公共值是零。事实上，把三个分子分别乘以 λ, μ, ν 后相加，所得分子为

$$\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz + R(\lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu),$$

它恒等于零。于是得到 Olinde Rodrigues 的公式：

$$dx + R\,d\lambda = 0, \qquad dy + R\,d\mu = 0, \qquad dz + R\,d\nu = 0. \tag{38}$$

这些重要公式只适用于点 (x, y, z) 沿一条曲率线的位移。

249. 参数形式的曲率线

设曲面仍由公式 (19) 给出，即

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{19}$$

并设 A, B, C 如 (21) 中那样确定，因而法线为

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

由直线族成为可展曲面的判别法，曲率线的微分方程为

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0, \tag{39}$$

其中 x, y, z, A, B, C 都须用它们关于 u, v 的表达式代替。

例如，把直纹螺旋面写成（取 $a > 0$；改变 a 的符号只改变螺旋方向）

$$z = a \arctan \frac{y}{x}, \qquad x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta, \qquad z = a\theta.$$

这里，确定 A, B, C 的方程为

$$A \cos \theta + B \sin \theta = 0, \qquad -A\rho \sin \theta + B\rho \cos \theta + Ca = 0.$$

取 $C = \rho$，便可取

$$A = a \sin \theta, \qquad B = -a \cos \theta.$$

代入 (39) 后，微分方程成为

$$d\rho^2 - (\rho^2 + a^2)\, d\theta^2 = 0, \qquad \text{或者} \qquad d\theta = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}.$$

对于正号，积分给出

$$\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2} = ae^{\theta - \theta_0}, \qquad \rho = \frac{a}{2}\left(e^{\theta - \theta_0} - e^{-(\theta - \theta_0)}\right).$$

所以，这些曲率线在 xy 平面上的投影，是很容易作出的螺线。

同一方法也给出主曲率半径的方程。仍用字母 $A, B, C, \lambda, \mu, \nu$，以下把由 A, B, C 所定的方向选作曲面法线的正方向，并按 §239 的约定给主曲率半径 R 取有向值。于是可以取

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

如果 R 是相应的主曲率半径，并令

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

那么曲率中心为

$$X = x + \rho A, \qquad Y = y + \rho B, \qquad Z = z + \rho C.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

像前面一样推理，三个比值

$$\frac{dx+\rho\,dA+A\,d\rho}{A},\qquad \frac{dy+\rho\,dB+B\,d\rho}{B},\qquad \frac{dz+\rho\,dC+C\,d\rho}{C}$$

的公共值可以写成 $d\rho+K$。因此

$$\begin{cases} dx+\rho\,dA-AK=0,\\ dy+\rho\,dB-BK=0,\\ dz+\rho\,dC-CK=0. \end{cases} \tag{40}$$

消去 ρ 与 K，就再次得到 (39)。另一方面，把 dx,dy,dz,dA,dB,dC 都换成它们关于 du,dv 的表达式，再消去 du,dv,K，便得到 ρ 的方程

$$\begin{vmatrix} x_u+\rho A_u & x_v+\rho A_v & A\\ y_u+\rho B_u & y_v+\rho B_v & B\\ z_u+\rho C_u & z_v+\rho C_v & C \end{vmatrix}=0. \tag{41}$$

把 ρ 换成 $R/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$，便得到主曲率半径的一个方程。公式 (39) 与 (41) 也回答了前面已经研究过的若干问题：一点为抛物点的充要条件，是 (41) 作为 ρ 的多项式时 ρ^2 的系数为零；一点为脐点的充要条件，则是 (39) 对任意 du,dv 都成立。

对于直纹螺旋面

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=av,$$

可以取

$$A=a\sin v,\qquad B=-a\cos v,\qquad C=u.$$

方程 (41) 给出

$$a^2\rho^2=a^2+u^2,$$

从而

$$R=\pm\frac{a^2+u^2}{a}.$$

所以，螺旋面的两个主曲率半径绝对值相等而符号相反。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

250. Joachimsthal 定理

某些曲面上的曲率线可以由几何考虑求出。在旋转曲面上，它们显然是子午线和纬线，因为每一条这样的曲线在各点都同指标曲线的一条轴相切。还可以从曲率线的定义直接看出这一点: 沿一条子午线的法线都位于同一个平面内, 沿一条纬线的法线则组成一个圆锥面；二者都是可展曲面。

在可展曲面上，一族曲率线由母线组成，另一族由母线的正交轨迹组成, 也就是回归边的渐伸线（§231）。后一族可以由一次求积得到；如果已知其中一条曲线，就不需要任何求积便可得到其余全部曲线。这些结论也都可以直接验证。

对空间曲线渐屈线理论的研究, 使 Joachimsthal 得到下面这个重要定理; 它在该理论中经常使用。

Joachimsthal 定理说：设两张光滑曲面沿一条正则交线相交，并且沿该曲线两张曲面的法线都定义良好；如果这条交线是两张曲面的公共曲率线，那么两曲面的夹角沿该曲线为常数。事实上，沿公共曲线的每一张曲面的法线都组成一张可展曲面；这两族法线都垂直于同一条空间曲线，所以结论由空间曲线渐屈线的定理推出。反过来，如果两张曲面以常角相交，而它们的交线是其中一张曲面上的曲率线，那么这条交线也是另一张曲面上的曲率线。事实上，若空间曲线的一族法线形成可展曲面，那么在每一个法平面内把这些法线都转过同一个角，所得新法线族仍形成可展曲面。

平面或球面上的每一条曲线，都是该平面或球面的一条曲率线。因此，画在任意曲面上的一条平面曲线或球面曲线，恰在承载它的平面或球面同该曲面以常角相交时，才是该曲面上的一条曲率线。

251. Dupin 定理

我们在 §43 和 §146 中已经遇到过三重正交曲面系。它们的理论以 Dupin 的下列定理开始。

> 给定组成一个三重正交系统的三个光滑曲面族，在梯度不为零且交线正则的一般点处，属于不同曲面族的任意两张曲面的交线，都是这两张曲面各自的一条曲率线。

我们将使用下列判别法。设 $F(x,y,z)=0$ 是一张在原点同 xy 平面相切的曲面。于是，在原点 $F_x=F_y=0$，而通常 $F_z\neq 0$。x 轴和 y 轴成为指标曲线

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

两条轴的充要条件，是 $s=0$，其中 $s=\partial^2 z/\partial x\partial y$。对 $F(x,y,z)=0$ 求两次微分，得到

$$F_{xy}+F_{xz}q+F_{yz}p+F_{zz}pq+F_z s=0.$$

由于在原点 $p=q=0$，上述条件等价于

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0=0. \tag{42}$$

设三个曲面族为

$$F_1(x,y,z)=\rho_1,\qquad F_2(x,y,z)=\rho_2,\qquad F_3(x,y,z)=\rho_3,$$

并且例如

$$F_{1x}F_{2x}+F_{1y}F_{2y}+F_{1z}F_{2z}=0, \tag{43}$$

对于另两种循环置换也有类似关系。通过一个一般点 M，每个曲面族恰有一张曲面通过。三条交线的切线组成一个三直角三面角。把这三个切线方向选作坐标轴，那么三张曲面在原点分别同三个坐标平面相切；例如

$$\begin{aligned}
&(F_{1x})_0=0, && (F_{1y})_0=0, && (F_{1z})_0\neq 0,\\
&(F_{2x})_0\neq 0, && (F_{2y})_0=0, && (F_{2z})_0=0,\\
&(F_{3x})_0=0, && (F_{3y})_0\neq 0, && (F_{3z})_0=0.
\end{aligned}$$

对于曲面 $F_1=\rho_1$，如果 $(F_{1xy})_0=0$，那么 x 轴和 y 轴就是指标曲线的两条轴。为了证明这个等式，对 (43) 关于 y 求导，并只保留在原点不消失的项。得到

$$(F_{2x})_0(F_{1xy})_0+(F_{1z})_0(F_{2yz})_0=0,$$

或者

$$\frac{(F_{1xy})_0}{(F_{1z})_0}+\frac{(F_{2yz})_0}{(F_{2x})_0}=0. \tag{44}$$

由循环置换得到的另外两个类似关系是

$$\frac{(F_{2yz})_0}{(F_{2x})_0}+\frac{(F_{3zx})_0}{(F_{3y})_0}=0,\qquad \frac{(F_{3zx})_0}{(F_{3y})_0}+\frac{(F_{1xy})_0}{(F_{1z})_0}=0. \tag{45}$$

方程 (44) 和 (45) 推出

$$(F_{1xy})_0=0,\qquad (F_{2yz})_0=0,\qquad (F_{3zx})_0=0.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

因此，每一条交线在包含它的两张曲面上，都同各自指标曲线的一条轴相切；定理得证。

§147 的共焦二次曲面，给出三重正交系统的一个卓越例子。因此，椭球或双曲面上的曲率线，就是该曲面同它的共焦二次曲面的交线。抛物面族

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda$$

组成另一个三重正交系统，并且确定抛物面上的曲率线。最后，曲面系

$$\frac{xy}{z}=\alpha,\qquad \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=\beta,\qquad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=\gamma$$

也是三重正交的。

三重正交曲面系的研究，是微分几何中最有趣、也最困难的问题之一。关于这个题目已经发表了大量论文；Darboux 在一部著作中汇集了这些结果。[2]

每一张曲面 S 都属于无穷多个三重正交系统。其中一个系统由下列三族曲面组成：同 S 平行的一族曲面，以及沿 S 的两族曲率线的法线所生成的两族可展曲面。事实上，设 O 是 S 在 M 点法线 MN 上的任一点，而 MT, MT' 是通过 M 的两条曲率线的切线。通过 O 的平行曲面的切平面平行于 S 在 M 处的切平面；沿两条曲率线的法线所生成的两张可展曲面的切平面，分别是 MNT 与 MNT'。这三个平面两两垂直，所以三族曲面组成三重正交系统。

从任何一个已知的三重正交系统出发，连续作反演还可以得到无穷多个新的三重正交系统，因为反演保持一切角度。既然任意曲面都属于某个三重正交系统，就得到：反演把一张曲面的曲率线变成其像曲面的曲率线。这个事实也可以直接验证。

252. 对若干类曲面的应用

人们研究过许多这类问题：求出其曲率线具有预先指定的几何性质的全部曲面。这里只指出几个较简单的结果。先设曲面的一族曲率线由圆组成。由 Joachimsthal 定理，每一个圆所在的平面都同曲面以常角相交；因此，沿这个圆的各条法线在圆轴上的同一点相交。以这个点为球心、通过该圆的球面，沿整个圆同给定曲面相切。所以，这张曲面是一族单参数球面的包络。反过来，这种包络的特征曲线构成它的一族曲率线。

[2]Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, 1898。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

旋转曲面属于这一类。管状面也属于这一类；它们是半径固定、球心沿任意曲线 Γ 运动的一族球面的包络。特征曲线是半径为 R 的圆；这些圆的圆心位于 Γ 上，其平面垂直于 Γ。第二族曲率线，是用沿 Γ 的各条法线所组成的可展曲面截这张管状面而得到的。

如果两族曲率线全都是圆，那么曲面可以看作两族单参数球面中任意一族的包络。设 S_1, S_2, S_3 是其中一族的三个球面。另一族中的任一球面都同这三个球面相切；所以，原曲面是这样一族球面的包络：每一个球面都同三个固定球面相切。这样的曲面叫作 *Dupin cyclide*（Dupin 圆纹曲面，也常称 Dupin 环面）。作一次反演可以看出，它可以由一个锚环面得到；不过一般的 Dupin cyclide 并不必然就是旋转环面本身。

最后，求这样一些曲面：其中一族曲率线全是位于彼此平行平面内的平面曲线。取 xy 平面平行于这些平面，并把一个平行平面所截曲线的切线方程写成

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = F(\alpha, z).$$

由这个方程和它关于 α 的导数，可以得到曲面上一点的坐标：

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = F_\alpha.$$

因此

$$x = F\cos\alpha - F_\alpha\sin\alpha, \qquad y = F\sin\alpha + F_\alpha\cos\alpha, \qquad z = z. \tag{46}$$

除去导平面为 xy 平面的直纹曲面以外，每一张曲面都可以用这种形式表示。切平面的系数可以取为

$$A = \cos\alpha, \qquad B = \sin\alpha, \qquad C = -F_z;$$

所以法线同 z 轴夹角的余弦为

$$\nu = -\frac{F_z(\alpha, z)}{\sqrt{1 + F_z^2(\alpha, z)}}.$$

为了使所有平行于 xy 平面的截线都是曲率线，由 Joachimsthal 定理，这个角必须同 α 无关。因此 F_z 同 α 无关，从而

$$F(\alpha, z) = \phi(z) + \psi(\alpha).$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

代入 (46)，得到最一般的解

$$
\begin{cases}
x = \psi(\alpha)\cos\alpha - \psi'(\alpha)\sin\alpha + \phi(z)\cos\alpha, \\
y = \psi(\alpha)\sin\alpha + \psi'(\alpha)\cos\alpha + \phi(z)\sin\alpha, \\
z = z.
\end{cases}
\tag{47}
$$

当 z 为常数时，前两个方程在 xy 平面内表示一族平行曲线。因此，这类曲面可以这样生成：取任意一条平面曲线及其平行曲线，再把每一条曲线沿垂直于该平面的方向提升一个由任意规律指定的距离。等价地，它们是这样描出的曲面：让一条平面曲线所在的平面，在一张底线任意的柱面上无滑动地滚动。两族曲率线分别是 $z =$ 常数 与 $\alpha =$ 常数。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

IV. 直线族

空间中一条直线的方程含有四个可变参数。因此，按照在这四个参数之间给出的关系数目，我们可以考虑一参数、二参数或三参数的直线族。一参数直线族构成一张*直纹曲面*；二参数直线族叫作一个*直线汇*（*line congruence*）；最后，三参数直线族叫作一个*直线复形*（*line complex；旧译“直线丛”*）。

253. 直纹曲面

设一参数直线族 (G) 的方程为

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{48}$$

其中 a, b, p, q 是单个可变参数 u 的函数。我们来考察：当切点沿任一母线 G 运动时，由这些直线所形成的曲面 S 的切平面如何改变。方程 (48) 连同方程 $z = z$，把 S 上一点 M 的坐标 x, y, z 表成两个参数 z, u 的函数；因此，由 §39，M 点的切平面方程为

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ a & b & 1 \\ a'z + p' & b'z + q' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

其中 a', b', p', q' 表示 a, b, p, q 对 u 的导数。分别把 x, y 换成 $az + p, bz + q$ 并化简，得到

$$(b'z + q')(X - aZ - p) - (a'z + p')(Y - bZ - q) = 0. \tag{49}$$

首先可以看出，这个平面总通过母线 G；这一点本来就是显然的。其次，当切点 M 沿 G 运动时，这个平面绕 G 转动，除非比值

$$\frac{a'z + p'}{b'z + q'}$$

与 z 无关，也就是说，除非

$$a'q' - b'p' = 0.$$

在下面的讨论中，我们暂且排除这个特殊情形。由于上述比值是 z 的线性分式，所以通过一条母线的每一个平面，恰好在一个点同曲面相切。当切点沿母线向

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

任一方向无限远去时，切平面 P 趋近于一个极限位置 P'；我们把它叫作该母线*无穷远点处的切平面*。这个极限平面的方程是

$$b'(X - aZ - p) - a'(Y - bZ - q) = 0. \tag{50}$$

设 ω 是这个平面 P' 与母线上一点 $M(x, y, z)$ 处的切平面 P 之间的角。P' 与 P 的法线方向余弦分别同

$$b', \qquad -a', \qquad a'b - ab'$$

以及

$$b'z + q', \qquad -(a'z + p'), \qquad b(a'z + p') - a(b'z + q')$$

成比例。因此

$$\cos\omega = \frac{Az + B}{\sqrt{A}\sqrt{Az^2 + 2Bz + C}},$$

其中

$$\begin{aligned} A &= a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2, \\ B &= a'p' + b'q' + (ab' - ba')(aq' - bp'), \\ C &= p'^2 + q'^2 + (aq' - bp')^2. \end{aligned}$$

利用 Lagrange 恒等式，有

$$AC - B^2 = (a'q' - b'p')^2(1 + a^2 + b^2).$$

若 ω 只表示普通的非负夹角，就应在分子、分母上取绝对值；若给平面绕母线的转动规定方向，则可把符号吸收到有向角 ω 中，并写成

$$\tan\omega = \frac{(a'q' - b'p')\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{Az + B}. \tag{51}$$

原书把 $\sqrt{AC - B^2}$ 直接等同于可能为负的 $(a'q' - b'p')\sqrt{1 + a^2 + b^2}$；这里已明确区分无向夹角与有向角。

由此可知，极限平面 P' 垂直于母线上一点 O_1 处的切平面 P_1；该点的纵坐标 z_1 为

$$z_1 = -\frac{B}{A} = -\frac{a'p' + b'q' + (ab' - ba')(aq' - bp')}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}. \tag{52}$$

点 O_1 叫作这条母线的*中心点（腰点）*，O_1 处的切平面 P_1 叫作*中心平面*。任一点 M 处的切平面 P 与中心平面 P_1 之间的角 θ 等于 $\pi/2 - \omega$，所以公式 (51)

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

可以改写为

$$\tan\theta = \frac{A(z-z_1)}{\sqrt{AC-B^2}} = \frac{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2](z-z_1)}{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

设 ρ 是中心点 O_1 到点 M 的距离；当 O_1M 同正 z 轴所成的角为锐角或钝角时，分别给 ρ 以正号或负号。于是

$$\rho = (z-z_1)\sqrt{1+a^2+b^2},$$

而前一公式可以写成

$$\tan\theta = k\rho, \tag{53}$$

其中 k 叫作*分布参数*，由

$$k = \frac{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2}{(a'q'-b'p')(1+a^2+b^2)} \tag{54}$$

定义。

公式 (53) 以极简单的形式表示了切平面绕母线转动的方式。式中每一个量都有几何意义；下一节还将看到，k 本身也可以纯粹从几何上定义。不过，公式 (53) 仍含有一个约定上的歧义，因为角 θ 应当从哪一个方向量起并非一望可知。换句话说，随着点沿母线运动，切平面究竟以哪一种方向绕母线转动，事先并不清楚。这个转动方向由 k 的符号决定。

为了说明这一点，设想有一个观察者躺在一条母线 G 上。当切点 M 从他的脚端向头端运动时，他会看到切平面 P 从左向右转，或者反过来从右向左转。稍加思考即可看出，如果观察者转身，使头和脚互换位置，按这种方式定义的转动方向并不改变。取两个有一条公共母线、并且关于通过该母线的某一平面对称的双曲抛物面，就能清楚看出这两种可能情形。

现在移动坐标轴，使新原点位于中心点 O_1，新 z 轴就是母线 G 本身，而 xz 平面就是中心平面 P_1。显然，在这种坐标变换下，分布参数 (54) 的值不变，而公式 (53) 变为

$$\tan\theta = kz, \tag{53'}$$

其中 θ 表示 xz 平面 P_1 与切平面 P 之间的角，方向按方便的方式规定。对于同 z 轴对应的参数值 u_0，应有

$$a = b = p = q = 0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

于是该轴上任一点 M 处的切平面方程化为

$$(b'z+q')X-(a'z+p')Y=0.$$

要使原点确为中心点、xz 平面确为中心平面，还必须有 $a'=0, q'=0$；所以切平面方程化为

$$Y=\frac{b'z}{p'}X,$$

而公式 (54) 给出 $k=-b'/p'$。因此，公式 (53’) 中的角 θ 应当从 Oy 朝 Ox 的方向取正。如果坐标轴的定向采用 §228 中的约定，那么躺在 z 轴上的观察者在 $k>0$ 时会看到切平面从左向右转，在 $k<0$ 时则从右向左转。

一张直纹曲面各母线中心点的轨迹叫作它的*腰线*（*line of striction*）。这条曲线关于参数 u 的方程正是 (48) 与 (52)。

注。如果对某一条母线 G 有 $a'q'=b'p'$，那么该母线上任一点处的切平面都相同。如果这个关系对每一条母线都成立，也就是对所有 u 都成立，那么该直纹曲面就是一张可展曲面（§223），而前面所得结果很容易核验。事实上，如果 a' 与 b' 不同时为零，任一母线上所有点的切平面都相同；只在

$$z=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$$

处变成不定，这正是母线同其包络相切的点。容易验证，当 $a'q'=b'p'$ 时，这个 z 值同 (52) 给出的值相同。因此，对可展曲面，腰线退化为回归边，而分布参数为无穷大。

如果每一条母线上都有 $a'=b'=0$，那么曲面是柱面，中心点是不定的。

254. 分布参数的直接定义

中心点与分布参数也可以用一种完全不同、且不借助切平面的方式定义。设 G, G_1 是分别同参数值 $u, u+h$ 对应的两条相邻母线，并设 G_1 的方程为

$$x=(a+\Delta a)z+p+\Delta p, \qquad y=(b+\Delta b)z+q+\Delta q. \tag{55}$$

设 δ 是沿所选公共垂线方向量取的*有向*最短距离（真正的非负最短距离是 $|\delta|$），α 是两条有向直线之间的有向角，而 (X, Y, Z) 是 G 同两线公共垂线的交点。这样既能保留分布参数的符号，又不把“距离”误当成可为负的量。由解析几何中的熟知公式，有

$$Z=-\frac{\Delta a\,\Delta q+\Delta b\,\Delta p+(a\Delta b-b\Delta a)[(a+\Delta a)\Delta q-(b+\Delta b)\Delta p]}{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\Delta b-b\Delta a)^2},$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

$$\delta = \frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}},$$

以及

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{(a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2 + 1}}.$$

当 h 趋近于零时，Z 趋近由 (52) 定义的 z_1，而 $(\sin\alpha)/\delta$ 趋近于 k。因此，中心点就是相邻母线公共垂线在给定母线上垂足的极限位置；分布参数则是比值 $(\sin\alpha)/\delta$ 的极限。

在 δ 的表达式中，把 $\Delta a, \Delta b, \Delta p, \Delta q$ 换成它们关于 h 的展开式，例如

$$\Delta a = ha' + \frac{h^2}{1\cdot 2}a'' + \cdots,$$

并对其余三个量作同样展开，那么 δ 的分子成为

$$\begin{aligned}\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p = h^2(a'q' - b'p')\\ + \frac{h^3}{2}(a''q' + a'q'' - b''p' - b'p'') + \cdots,\end{aligned}$$

而分母关于 h 总是一阶无穷小。由此可见，通常最短距离关于 h 是一阶无穷小；但可展曲面例外，因为此时 $a'q' = b'p'$。不过 $h^3/2$ 的系数正是 $a'q' - b'p'$ 的导数，所以在可展曲面的情形它也为零，因而两条相邻母线之间的最短距离是三阶无穷小（参看 §230）。这个观察出自 Bouquet；他还证明，如果这个距离恒为四阶无穷小，那么它必定恒等于零，也就是说，给定的直线或者是某一平面曲线的切线，或者是某一锥面的母线。为证明这一点，只须把 $\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p$ 展开到四阶项即可。

255.　直线汇；直线汇的焦面

每一个二参数直线族

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{56}$$

其中 a, b, p, q 依赖于两个参数 α, β，都叫作一个*直线汇*。一般说来，通过空间中任一点会有若干条这个直线汇中的直线；因为当 x, y, z 给定时，方程 (56) 会确定若干组确定的 α, β 值。

在 α, β 之间任取一个关系，方程 (56) 就表示一张通常并不可展的直纹曲面。要使它可展，必须有

$$da\,dq - db\,dp = 0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

也就是把 da 换成 $a_\alpha d\alpha + a_\beta d\beta$ 等之后，有

$$\begin{aligned}(a_\alpha d\alpha + a_\beta d\beta)(q_\alpha d\alpha + q_\beta d\beta)\\ - (b_\alpha d\alpha + b_\beta d\beta)(p_\alpha d\alpha + p_\beta d\beta) = 0.\end{aligned} \tag{57}$$

这是关于 $d\beta/d\alpha$ 的二次方程。在判别式不为零并且最高次项不退化的一般情形，它给出两个不同的方向，可以写成

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_1(\alpha, \beta), \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_2(\alpha, \beta).$$

这两个微分方程中的每一个都定义一族可展曲面；在重根、一次退化或恒等退化时，两族可能合并，或者必须改用另一参数图来描述。在一些很一般的条件下——这些条件稍后会精确陈述，这里先假定它们成立——每一个方程都有无穷多个关于 α 的解函数，并且其中恰有一个解在 $\alpha = \alpha_0$ 时取得给定值 β_0。因此，直线汇中的每一条直线 G 都属于两张由该直线汇中的直线构成的可展曲面。

设 Γ, Γ' 是这两张可展曲面的回归边，而 A, A' 分别是 G 同 Γ, Γ' 的切点。这两个点叫作母线 G 的*焦点*。不必积分方程 (57)，也可以求出它们。任一焦点的纵坐标 z 必须同时满足

$$z\,da + dp = 0, \qquad z\,db + dq = 0. \tag{58}$$

把 da, db, dp, dq 展开，得到

$$\begin{cases} z(a_\alpha d\alpha + a_\beta d\beta) + p_\alpha d\alpha + p_\beta d\beta = 0, \\ z(b_\alpha d\alpha + b_\beta d\beta) + q_\alpha d\alpha + q_\beta d\beta = 0. \end{cases}$$

消去 z，重新得到方程 (57)；若消去 $d\beta/d\alpha$，则得到关于 z 的二次方程

$$(za_\alpha + p_\alpha)(zb_\beta + q_\beta) - (za_\beta + p_\beta)(zb_\alpha + q_\alpha) = 0. \tag{59}$$

它的两个根就是两个焦点的纵坐标。

焦点 A, A' 的轨迹通常构成一张曲面的两叶 Σ, Σ'；这两叶由方程 (56) 与 (59) 给出参数表示。一般说来，它们并非两张互不相干的曲面，而是同一解析曲面的两个部分；整个曲面叫作这个直线汇的*焦面*。显然，焦面也正是由直线汇中的直线所组成的各张可展曲面之回归边的轨迹。事实上，按曲线 Γ 的定义，它在任一点 A 处的切线是一条直线汇中的直线，所以 A 是该直线的一个焦点。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

直线汇中的每一条直线都同两叶 Σ, Σ' 相切，因为它分别同位于这两叶上的两条曲线相切。

用同 §247 完全类似的论证，很容易求出 Σ, Σ' 在 A, A' 处的切平面 (参看图 51)。例如，当直线 G 在始终同 Γ 相切的条件下运动时，它还始终同曲面 Σ' 相切；其切点 A' 描出一条必不同于 Γ' 的曲线 γ'。于是，在这种运动中由 G 描出的可展曲面同 Σ' 在 A' 处相切，因为这两个曲面的切平面都含有直线 G 和曲线 γ' 在 A' 处的切线。因此，Σ' 在 A' 处的切平面，恰好是 Γ 在 A 处的密切平面。同样，Σ 在 A 处的切平面是 Γ' 在 A' 处的密切平面。这两个平面叫作母线 G 的两个*焦平面*。

焦面的某一叶可能退化成一条曲线 C。在这种情形，直线汇中的各直线全都同另一叶 Σ 相切，而只是同 C 相交；两族可展曲面之一由外切于 Σ、且顶点位于 C 上的锥面组成。如果焦面的两叶都退化成曲线 C, C'，那么两族可展曲面由通过其中一条曲线、顶点位于另一条曲线上的锥面组成。特别地，若 C, C' 都是直线，这个直线汇叫作*线性直线汇*。

256. 法线直线汇

任一曲面的法线显然构成一个直线汇；但逆命题并不成立：一般的直线汇未必是某张曲面的法线直线汇。事实上，若考虑由曲面 S 的法线组成的直线汇，那么它的焦面两叶显然就是 S 的渐屈面两叶 Σ, Σ'（§247）；而我们已经看到，同一条法线在 A, A' 两点同这两叶相切时，这两个切平面彼此垂直。正如下面将由求直线 (56) 恒为某张曲面法线的条件看出的那样，这正是法线直线汇的特征性质。

所求曲面可以写成

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \qquad z = f(\alpha, \beta). \tag{60}$$

要使方程 (56) 所表示的直线成为这张曲面的法线，必须有

$$a\frac{\partial x}{\partial \alpha} + b\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0, \qquad a\frac{\partial x}{\partial \beta} + b\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0.$$

分别把 x, y 换成 $az + p, bz + q$，再除以 $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(z\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right) + \dfrac{ap_\alpha + bq_\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(z\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right) + \dfrac{ap_\beta + bq_\beta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0. \end{cases} \tag{61}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 · CC BY-SA 4.0 · GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这两个方程相容的充要条件是

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{ap_\alpha+bq_\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{ap_\beta+bq_\beta}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right). \tag{62}$$

如果这个条件满足，由 (61) 作一次求积即可求出 z。由此得到的曲面依赖于一个积分常数，构成一参数平行曲面族。

为了找出条件 (62) 的几何意义，应注意这个条件从本性上说既不依赖坐标轴的选取，也不依赖自变量的选取。因此，我们可以把直线汇中的任一条直线取作 z 轴，并把参数 α,β 取为直线汇中任一直线同 xy 平面交点的坐标。于是 $p=\alpha, q=\beta$，而 a,b 是 α,β 的函数，并在 $\alpha=\beta=0$ 时都为零。因此，对 $\alpha=\beta=0$，可积条件化为

$$a_\beta=b_\alpha.$$

另一方面，方程 (57) 在原点化为

$$a_\beta\,d\beta^2+(a_\alpha-b_\beta)\,d\alpha\,d\beta-b_\alpha\,d\alpha^2=0.$$

这正是把 α,β 分别换成 x,y 后，xy 平面同通过 z 轴的两张可展曲面之交线的方向方程。条件 $a_\beta=b_\alpha$ 表明，通过原点的这两条曲线互相垂直；也就是说，通过 z 轴的两张可展曲面的切平面互相垂直。由于被取作 z 轴的直线是直线汇中的任一条直线，我们得到下面的重要定理：

> 给定直线汇中的各直线成为某张曲面的法线的充要条件，是通过该直线汇每一条直线的两个焦平面互相垂直。

注。如果把参数 α,β 取为直线同 x 轴、y 轴所成角的余弦（因而在实数范围内 $\alpha^2+\beta^2<1$，并选定第三个方向余弦的符号），那么

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\qquad b=\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},$$
$$\sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}.$$

而方程 (61) 变成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha p_\alpha+\beta q_\alpha=0,\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha p_\beta+\beta q_\beta=0.\end{cases} \tag{63}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

在这种形式下，可积条件 (62) 化为

$$q_\alpha = p_\beta,$$

也就是说，p, q 必须是同一个函数 $F(\alpha, \beta)$ 的偏导数:

$$p = \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \qquad q = \frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

函数 $F(\alpha, \beta)$ 可由一次求积求出。于是 z 是全微分方程

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right) = -\left(\alpha F_{\alpha\alpha} + \beta F_{\alpha\beta}\right) d\alpha - \left(\alpha F_{\alpha\beta} + \beta F_{\beta\beta}\right) d\beta$$

的解，因此

$$z = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\left(C + F - \alpha\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial F}{\partial \beta}\right),$$

其中 C 是任意常数。

257. Malus 定理

如果由一点光源发出的光线经任意曲面反射（或折射），那么反射光线（或折射光线）是某一族平行曲面的法线。这个定理由 Malus 提出，后来 Cauchy、Dupin、Gergonne 和 Quetelet 把它推广到任意多次连续反射或折射的情形；我们可以陈述下面这个更一般的定理:

> 如果一族光线在某一时刻是某张曲面的法线，那么经过任意多次反射和折射之后，它仍保持这个性质。

由于反射可以看作折射率为 -1 的折射，所以只须证明一次折射的情形。设 S 是同未折射光线正交的曲面，mM 是在点 M 遇到分界面 Σ 的一条入射光线，而 MR 是折射光线。按照 Descartes 定律，入射光线、折射光线和法线 MN 共面，并且角 i, r（图 52）满足

$$n \sin i = \sin r.$$

为叙述明确，图中假定 $n < 1$。设 $l = Mm$，并在折射光线的延长线上取长度

$$l' = Mm' = kl,$$

其中 k 是稍后确定的常因子。点 m' 描出一张曲面 S'。我们将证明，可以选择 k，使 Mm' 成为 S' 的法线。

设 C 是 S 上任意一条曲线。当点 m 沿 C 运动时，点 M 在分界面 Σ 上描出一条曲线 Γ，相应点 m' 在 S' 上描出另一条曲线 C'。设 s,σ,s' 分别是三条曲线 C,Γ,C' 从各自固定点量起的弧长；设 ω 是 Γ 的切线 MT 同通过入射光线的法截面内切线 MT_1 所成的角，而 ϕ,ϕ' 分别是 MT_1 同 Mm, Mm' 所成的角。为了求 $\cos\phi$，可以在 Mm 上截取单位长度，先把它投影到 MT 上，再由 MT 投影到 MT_1 上。这样以及对 Mm' 作类似投影，得到

$$\cos\phi = \sin i\cos\omega, \qquad \cos\phi' = \sin r\cos\omega.$$

把 §82 中线段微分公式用于线段 Mm 与 Mm'，得到

$$dl = -d\sigma\cos\omega\sin i,$$

$$dl' = -d\sigma\cos\omega\sin r - ds'\cos\theta,$$

其中 θ 表示 $m'M$ 同 C' 的切线之间的角。把 dl' 换成 $k\,dl$，便有

$$\cos\omega\, d\sigma(k\sin i - \sin r) = ds'\cos\theta.$$

若取 $k=n$，则由 Descartes 定律，左边为零，从而

$$ds'\cos\theta = 0.$$

在 C' 的正则点处 $ds'\neq 0$，所以 $\cos\theta=0$，即 Mm' 垂直于 C'；由于 C' 是 S' 上任意一条曲线，Mm' 也垂直于曲面 S'。曲面 S' 叫作*反焦散面*（*anticaustic*），或*次级焦散面*。显然，S' 是以 M 为球心、以 $n\,Mm$ 为半径的球族的包络；于是可以陈述下面的定理：

> 把同入射光线正交的曲面 S 看作一族球面的包络，这些球面的球心都在分界面 Σ 上。那么，折射光线的反焦散面，是另一族具有相同球心的球面的包络；第二族球面的半径同第一族对应球面的半径之比，等于折射率，即 $n:1$。

中译者校记（底本原误）。上述推导给出 $Mm' = n\,Mm$，所以第二族球面半径同第一族对应球面半径之比应为 $n:1$。1904 年英译本随后把这个比例写成 $1:n$，与推导相反；正文已依推导订正。

这个包络由两叶组成，它们分别对应于数值相等、符号相反的两个折射率。一般说来，这两叶是同一不可约解析曲面的两个部分。

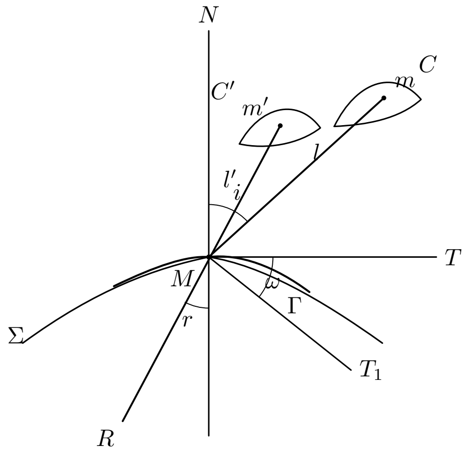


图 52

258. 直线复形

一个*直线复形*（*line complex*）由三参数直线族的全部直线组成。这里的“直线复形”不是只含一个参数的直线束。设一条直线的方程写成

$$x = az + p, \qquad y = bz + q. \tag{64}$$

任一直线复形都可以由 a, b, p, q 之间的一个关系

$$F(a, b, p, q) = 0 \tag{65}$$

定义；反之亦然。若 F 是 a, b, p, q 的多项式，这个直线复形叫作*代数直线复形*。

直线复形中通过任一点 (x_0, y_0, z_0) 的直线构成一个以该点为顶点的锥面。它的方程可由 (64)、(65) 以及

$$x_0 = az_0 + p, \qquad y_0 = bz_0 + q \tag{66}$$

消去 a, b, p, q 得到，即

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}, \frac{x_0 z - x z_0}{z - z_0}, \frac{y_0 z - y z_0}{z - z_0}\right) = 0. \tag{67}$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

这叫作这个直线复形在该点的*直线复形锥面*。公式 (67) 写在仿射图 $z \neq z_0$ 中；当母线平行于平面 $z = z_0$ 时，应取其齐次化后的极限方程。

同样，在空间任一平面内都有无穷多条属于直线复形的直线；这些直线包络一条曲线，叫作该平面内的*直线复形曲线*。如果直线复形是代数的，那么直线复形锥面的次数等于直线复形曲线的阶级。事实上，若要确定直线复形中通过某一给定点 A、并位于包含 A 的平面 P 内的直线数目，我们既可以数平面 P 截以 A 为顶点的直线复形锥面所得的母线数目，也可以数从 A 向平面 P 内的直线复形曲线所作的切线数目。两种计数必须相同，命题便得证。

如果直线复形锥面对每一个顶点总退化成一个平面，这个直线复形就叫作*线性直线复形*，而方程 (65) 具有形式

$$Aa + Bb + Cp + Dq + E(aq - bp) + F = 0. \tag{68}$$

于是，直线复形中通过任一点 (x_0, y_0, z_0) 的全部直线的轨迹，是平面

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(x_0 z - z_0 x) + D(y_0 z - z_0 y) \\ + E(y_0 x - x_0 y) + F(z - z_0) = 0. \end{aligned} \tag{69}$$

线性直线复形在任一平面内的直线复形曲线，因为其阶级必须为一，故退化为一点；也就是说，位于一个平面内、且属于该直线复形的全部直线都通过该平面的一个定点。这个点叫作该平面的*极点*或*焦点*。因此，线性直线复形在空间的点与平面之间建立一种对应：空间中任一点对应于通过它的一个平面，而任一平面对应于该平面内的一个点。它也在空间直线之间建立一种对应。

设 D 是一条不属于该直线复形的直线，F, F' 是任意两个通过 D 的平面的焦点，并令 $\Delta = FF'$。通过 Δ 的任一平面的焦点，都是该平面同 D 的交点 ϕ；因为 ϕF 与 $\phi F'$ 显然都属于这个直线复形。于是，任何同时同 D 与 Δ 相交的直线都属于这个直线复形；最后，任一通过 D 的平面的焦点，正是该平面同 Δ 的交点。直线 D, Δ 叫作*共轭直线*；其中每一条都是所有通过另一条直线的平面之焦点的轨迹。

如果直线 D 退到无穷远，那么通过 D 的平面变成一族平行平面；显然，这些平面的焦点位于一条直线上。总能找到一个平面，使得同它平行的各平面之焦点的轨迹垂直于它。把这条特殊直线取作 z 轴，则焦点位于 z 轴任一点的平面都平行于 xy 平面。由 (69)，发生这种情形的充要条件是

$$A = B = C = D = 0,$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

而直线复形方程化为简单形式

$$aq - bp + K = 0. \tag{70}$$

焦点为 (x, y, z) 的平面方程是

$$Xy - Yx + K(Z - z) = 0, \tag{71}$$

其中 X, Y, Z 是动坐标。

作为一个例子，我们来确定所有切线都属于上述直线复形的曲线。设这种曲线的坐标 x, y, z 是某个可变参数的已知函数，则任一点处的切线方程为

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

这条直线属于给定直线复形的充要条件，是它位于焦点为 (x, y, z) 的平面 (71) 内，也就是

$$x\,dy - y\,dx = K\,dz. \tag{72}$$

我们在 §218 已经说明，如何求出满足这种关系的一元参数函数组 x, y, z 的全部可能形式；因而所求曲线可以显式确定。

把方程 (72) 微分，得到

$$x\,d^2y - y\,d^2x = K\,d^2z. \tag{73}$$

方程 (72) 与 (73) 还表明，曲线在任一点的密切平面，恰好就是焦点位于该点的平面 (71)。所以可以陈述下列定理：

> 如果一条空间曲线的全部切线都属于某个线性直线复形，那么该曲线任一点处的密切平面，就是焦点位于该点的平面。

〔Appell〕

设要从空间任一点 O 向一条全部切线属于某线性直线复形的空间曲线 Γ 作密切平面。设 M 是其中一个密切平面的接触点。由 Appell 定理，直线 MO 属于该直线复形，所以 M 位于焦点为 O 的平面内。反过来，如果 Γ 上一点 M 位于这个平面内，那么属于直线复形的直线 MO 位于 M 点的密切平面内，因而该密切平面通过 O。所以，所求接触点正是曲线同焦点为 O 的平面的交点（参看 §218）。

线性直线复形在几何学和力学中有许多应用。例如，读者可以参看 Appell 与 Picard 的论文。[3]

[3] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1876 与 1877。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

习题

1. 求由下列平面族包络成的可展曲面的曲率线：

$$z = ax + y\phi(a) + R\sqrt{1 + a^2 + \phi(a)^2},$$

其中 a 是变量，$\phi(a)$ 是 a 的任意函数，R 是给定常数。

〔巴黎学士学位考试，1871 年 8 月〕

2. 设直线

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

其中 a, b, α, β 是同一可变参数的函数。求这些直线构成一张可展曲面的条件，并要求这张曲面上垂直于母线的整族曲率线位于一族同心球面上。

〔巴黎学士学位考试，1872 年 7 月〕

3. 求曲面

$$e^z = \cos x \cos y$$

的曲率线。

〔巴黎学士学位考试，1875 年 7 月〕

4. 考虑三轴互不相等的椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

以及它在 xz 平面内的椭圆截线 E。在 E 的每一点 M，求：1）椭球的两个主曲率半径 R_1, R_2；2）R_1, R_2 之间的关系；3）当点 M 描出椭圆 E 时，相应主法截线曲率中心的轨迹。

〔巴黎学士学位考试，1877 年 11 月〕

5. 对抛物面

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$$

上任一点的两个主曲率半径，导出它们所满足的二次方程。再沿着该抛物面与抛物面

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2z - \lambda$$

的交线，把两个主曲率半径分别表示成 z 的函数。

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

〔巴黎学士学位考试，1880 年 11 月〕

6. 当曲面 $xy = az$ 上的点描出 x 轴时，求其两个主法截线的曲率中心轨迹。

〔巴黎学士学位考试，1883 年 7 月〕

7. 对一张给定曲面 S，用通过 S 上同一点 M 的一切平面截取它。求这些平面截线的曲率中心所成轨迹曲面的方程。

8. 设 MT 是给定二次曲面在点 M 处的一条任意切线，O 是通过 MT 的任一平面截线在 M 处的曲率中心，O' 是该平面截线的渐屈线在 O 处的曲率中心。求当截平面绕 MT 转动时 O' 的轨迹。

〔克莱蒙学士学位考试，1883 年 7 月〕

9. 求把一个圆绕其一条切线旋转所得锚环面上的渐近线。

〔巴黎学士学位考试，1882 年 11 月〕

10. 在直角坐标系中，设 C 是 xz 平面内的一条给定曲线。一个圆所在的平面始终平行于 xy 平面，圆心描出曲线 C；圆的半径这样变化，使圆始终同 z 轴相交。以圆心纵坐标 z 以及圆的半径同该圆平面在 xz 平面内迹线所成的角 θ 为可变参数，导出所得曲面渐近线的微分方程。

    把所得结果应用于特殊情形：C 是顶点在原点、轴为 x 轴的抛物线。

〔巴黎学士学位考试，1880 年 7 月〕

11. 一张直纹曲面沿另一张直纹曲面的某一母线 Δ 处处同后者相切，并且第一张曲面的每一条母线都在某一点同 Δ 相交。求第一张曲面的渐近线。

12. 求直纹螺旋面上的曲线，使其密切平面始终含有曲面的法线。

〔巴黎学士学位考试，1876 年 7 月〕

13. 求下列参数方程所定义的直纹曲面上的渐近线：

$$x = (1 + u)\cos v, \qquad y = (1 - u)\sin v, \qquad z = u.$$

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

〔南锡学士学位考试，1900 年 11 月〕

14*. 通过一条直线 Δ 的各平面对曲面 S 的截线，同以 Δ 上各点为顶点、外切于 S 的各锥面的接触曲线，在曲面上构成一个共轭网。

〔Koenigs〕

15*. 一条刚性直线这样运动：直线上三个固定点分别始终位于三个两两垂直的平面内。证明这条直线始终是某一族平行曲面的法线。该曲面族中有一张，是如下点的轨迹：取动直线同某一坐标平面的交点，再取从坐标原点向该直线所作垂线的垂足，所求点是这两点所成线段的中点。

〔Darboux，*Comptes rendus*, Vol. XCII, p. 446, 1881〕

16*. 把曲面及其切平面复化。在任一曲面上，方程

$$1 + p^2 + q^2 = 0$$

所确定的点构成一条虚曲率线；对实正则曲面，左端严格为正，所以这里的曲线只能在复数范围内理解。

提示。把曲率线微分方程写成

$$(dp\,dy - dq\,dx)(1 + p^2 + q^2) + (p\,dy - q\,dx)(p\,dp + q\,dq) = 0.$$

〔Darboux，*Annales de l'École normale*, 1864〕

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

索引

n 维空间, 332
n 重积分, 332

Abel 判别法, 372
Abel 定理
    幂级数端点连续性, 403
Abel 积分, 223, 228
Ampère 变换, 82
Amsler 求积仪, 204
Appell 定理, 570
Archimedes, 137
Arndt 例, 379

$B(p, q)$ 函数, *see* Beta 函数
Bertrand 曲线, 521
    曲率与挠率的线性关系, 521
Beta 函数, 290
    收敛条件, 326
Bouquet, 562
Bouquet 定理, 516

Cauchy 一致收敛准则, 399
Cauchy 余项, 96
Cauchy 判别准则, 352
Cauchy 根值判别法, 357
Cauchy 积分判别法, 358
    多重级数, 382
Chasles 定理, 167
Chebyshev 不等式, 263
Chebyshev 二项微分定理, 226
Cotes 公式, 202

d'Alembert 定理, 133, 306
d'Alembert 比值判别法, 357
Descartes 叶形, 251
Dirichlet 判别法, 372
Dirichlet 条件, 442
Dirichlet 核, 456
Dirichlet 积分, 326, 399
Dirichlet 积分换序公式, 267
Duhamel 判别法, 366
Dupin cyclide, *see* Dupin 圆纹曲面
Dupin 圆纹曲面, 556
Dupin 环面, *see* Dupin 圆纹曲面

Euler
    三角级数系数, 439
Euler 公式, 535
Euler 常数, 108
Euler 积分, 186
    第一类, 290

CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

Euler 齐次函数定理, 30

Faà di Bruno 公式, 36
Fermat, 140
Fermat–Torricelli 点, 133
Fourier 定理, 447
Fourier 级数, 446
  收敛, 456
  间断点处的和, 456
Frenet 公式, 514

Γ 函数, 186
  近似值, 304
Gauss
  d’Alembert 定理的证明, 306
Gauss 判别法, 366
Gauss 方法, 202
Gauss 积分, 399
Gauss–Green 定理, 327
Graves 定理, 167
Green 定理, 270
  三重积分, 327

Hermite 方法, 213
Hesse 行列式, *see* 黑塞行列式
Hessian, *see* 黑塞行列式
Holditch 定理, 206

Jacobi 行列式, *see* 雅可比行列式
Jacobian, *see* 雅可比行列式
Joachimsthal 定理, 553

Kepler 方程, 433

l’Hôpital 定理, 8
Lagrange 乘子法, 131
Lagrange 余项, 96
Lagrange 公式, 432
Lagrange 反演公式, 432
Lagrange 条件
  曲线接触, 487
Lamé 微分参数, 85
Lancret 定理, 519
Laplace 方程, 77
Legendre 公式
  包络弧长, 462
Legendre 变换, 71
Legendre 多项式
  生成函数, 419
Legendre 积分, 236
Legendre 第一类完全积分, 399
Leibniz 交错级数判别法, 369
line complex, *see* 直线复形
line of striction, *see* 腰线
Liouville 定理, 233

Maclaurin 公式, 407
Maclaurin 级数, 104
Malus 定理, 566
Mertens 定理, 374
Meusnier 定理, 534
Monge–Ampère 方程, 500
Möbius 带, 291

Napier 对数, 141

Poincaré 引理, 335

Raabe 判别法, 366
Riemann 重排定理, 370
Rodrigues 公式, 550
Rolle 定理, 6

Schwarzian（施瓦茨导数）, 94

Simpson 公式, 202
Stirling 公式, 304
Stirling 近似, 304
Stokes 定理, 294, 343

Taylor 公式
  多元情形, 422
  带余项, 96
Taylor 级数, 104

Viviani 问题, 299

Wallis 乘积, 246
Wallis 公式, 245
Weierstrass M 判别法, 386
Weierstrass 函数, 452
Weierstrass 分解, 428
Weierstrass 逼近定理, 449

一致收敛, 384, 399
  判别法, 399
  连续性, 399
一致连续性, 147, 257
一致逼近, 449
三角级数, 439
  正交关系, 456
三重正交曲面系, 553
三重积分, 311
  变量代换, 316
上极限, 349, 383
  Cauchy–Hadamard 公式, 402
上确界, 144
下确界, 145
不定式, 102
不定积分, 157
中值定理, 7
中心平面, 559
中心点
  直纹曲面的, 559
主无穷小量, 19
主曲率中心, 130
主曲率半径, 535
主法截线, 535
主法线, 508
主部, 19
二重积分, 259
二重级数, 376
  绝对收敛, 378
二项微分, 226
代数基本定理, *see* d'Alembert 定理
仿射变换, 73
优函数, 412
  多元情形, 423
伪椭圆积分, 237
体积, 260, 296
体积元素, 320
余项, 96

偏导数, 11, 22
偏近点角, 255, 433
偶函数
  Fourier 展开, 456
全微分, 23, 44
  可积条件, 335
公共根
  两个方程, 341
共焦二次曲面, 555
共轭切线, 544
共轭曲线, 530
共轭直线
  线性直线复形中, 569

共轭线, 544
共轭网, 545
内摆线, 486
　四尖点, 462
内蕴方程, 476
函数, 2
函数指标, 341
函数行列式, *see* 雅可比行列式
分布参数, 560
切平面, 15, 41
　母线无穷远点处的, 559
切线, 30
　驻定, 492
副法线
　空间曲线, 510
包络, 457
　相邻曲线交点的极限, 487
原函数, 143, 157
双侧曲面, *see* 可定向曲面
双曲函数, 221
双曲点, 529, 534
双纽线, 237
双重点, 116
反函数, 43
反向对应, 272
反常积分
　一致收敛, 399
　二重积分, 287
反演, 53, 70
反焦散面, 567
变量代换
　三重积分, 316
可定向曲面, 291
可展曲面
　Monge–Ampère 方程, 500
　作为平面族包络, 498
　回归边, 499
　微分方程, 500
　退化情形, 498
可数性, 381
可积函数, 149
右旋点, 512
向量势, 343
周期
　线积分, 339
周期函数
　Fourier 展开, 456
回归边, 499
圆柱面, 498
圆螺线, 520
圆锥面, 498
垂足曲线, 72
复项级数, 372
外摆线, 486
多元函数, 10
多元幂级数, 421
多重积分, 329
多重级数, 381
多项式逼近, 456
奇函数
　Fourier 展开, 456
奇点, 114
　曲线族中的轨迹, 458
　解析曲线, 436
孤立双重点, 116
定积分, 150
　特殊计算, 302
密切圆, 483

三点圆的极限, 487
密切平面
定义, 488
驻定, 490
密切抛物线, 99
密切曲线, 482
极限位置, 487
空间曲线, 524
密切曲面, 527
密切球面, 528
退化情形, 528
密切直线, 487, 529
对合关系, 234
对数判别法, 361
对数积分, 250
导数, 4
导锥, 505
射影变换, 72
尖点, 116
第一类, 103, 436
第二类, 436
左旋点, 512
常点
平面曲线, 435
曲面, 438
空间曲线, 437
幂级数, 400
复合, 414
收敛区间, 402
逐项微分, 405
逐项积分, 407
除法, 417
平移曲面, 546
平行曲线, 463
弧长, 163
微分, 20
微分记号, 19

恰当微分, 335
悬链线, 223, 473
抛物点, 529, 534
曲线, 538
抛物线
求积, 137
拐点, 99
密切直线, 487
拓扑度, 341
指标, 160
指标曲线, 535
挠率, 510
符号约定, 511
挠率半径, 510
振幅, 145, 257
接触
奇偶阶与穿越, 487
阶数, 478
接触变换, 71
接触阶数, 478
空间曲线, 522
重根表述, 487
摆线, 471
收敛半径, 402
散度定理, *see* Gauss–Green 定理
数列
发散, 348
收敛, 348
斜曲线, *see* 空间曲线
方向余弦, 166
无处可导函数, 452

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

无穷小量, 19
星形线, 462
曲率, 466
内蕴方程, 476
平均曲率, 466
空间曲线, 506
曲率中心, 467
空间曲线, 508
曲率半径, 466
极值, 487
空间曲线, 506
曲率圆, 467
作为密切圆, 483
空间曲线, 508
曲率线, 547
曲线与曲面
接触, 526
曲线坐标, 320
曲面
曲率, 532
渐屈面, 549
曲面包络, 496
曲面定向, 293
曲面族
单参数族, 496
双参数族, 497
曲面积分, 291
与曲面无关, 343
曲面面积, 281
曲面面积元素, 284
曳物线, 474
最大值, 3
最大极限, *see* 上极限
最小值, 3
有理函数, 210
有理曲线, 223
未定情形, 123
条件收敛, 369
极值, 119
极大, 119
极小, 119
极性互反变换, 72, 82
极线
空间曲线, 509
极锥, 514
极限, 1
极面, 510
柱坐标, 323
棱柱体公式, 297
椭圆
周长的级数展开, 399
椭圆函数, 236
椭圆坐标, 323
椭圆点, 529, 534
椭圆积分, 234
次切线, 30
次法线, 30
次级焦散面, 567
正交曲线坐标, 84, 323
正则弧, 436
正向对应, 272
比较判别法, 353
求积, 162
求积仪, 204
法截线, 534
法线, 30
法线直线汇, 564
渐伸线, 464, 469

空间曲线, 516
渐屈线, 464, 468
空间曲线, 516
渐屈面
曲面的, 549
渐开线, *see* 渐伸线
渐近值, 304
渐近切线, 537
渐近方向, 529
渐近线, 529
曲面, 540

焦平面, 564
焦散线
反射的次级焦散线, 465
折射的次级焦散线, 465
焦点
直线汇的, 563
焦面
直线汇的, 563
特征曲线
曲面族, 496
球极坐标, 323
球面标形, *see* 球面示性曲线
球面示性曲线, 505
直纹曲面, 297, 558
可展曲面, 498
渐近线, 543
直线丛, *see* 直线复形
直线复形, 558, 568
代数的, 568
曲线, 569
极点, 569
焦点, 569
线性直线复形, 569
锥面, 569
直线汇, 558, 562
法线直线汇, 564
焦面, 563
线性直线汇, 564
相关曲线, 531
真近点角, 255
积分区域, 259
积分号下求导, 399
积分的约化, 228
空间曲线, 488
接触, 522
球面示性曲线, 505
空间曲线族
包络, 502
第一类积分, 232
第三类积分, 232
第二类积分, 232
管状面, 556
累次积分换序, 263
级数
Cauchy 乘积, 374
一致收敛, 399
分组, 368
发散, 350
和, 350
逐项微分, 399
逐项积分, 399
重排, 368
级数反演, 434
线丛, *see* 直线复形
线复形, *see* 直线复形
线汇, *see* 直线汇
线积分, 187

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0

与路径无关, 337
周期, 339
绕数, 341
绝对收敛, 367

脐点, 538
腰点, 559
腰线, 561
自变量, 2
自然方程, *see* 内蕴方程
螺线, 518
Lancret 定理, 519
圆柱螺线, 495
解析函数, 434
解析延拓, 410
解析曲线, 435
空间曲线, 437
解析曲面, 438
超椭圆积分, 228
超越函数的积分, 240
连续函数
多项式逼近, 456
无处可导, 452
连续性, 2

逐次导数, 6
通量周期, 343
部分和有界, 372
重根
曲线接触, 487
锚环面, 538
锥点, 118
阶乘
数量级, 304
隐函数
唯一性, 428
幂级数展开, 426
隐函数定理
解析形式, 429
雅可比行列式, 48
面积, 161
面积元素
平面曲线坐标, 276
曲面, 284
驻定切线, 492
驻定密切平面, 490
存在性, 491
高阶无穷小, 19
黑塞行列式, 61
齐次函数, 29

古尔萨《数学分析教程》中文译校项目 ·CC BY-SA 4.0 ·GOURSAT-V1-ZH-OPEN-1.0